

ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Випуск № 4

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Наукова бібліотека
ім. М. Максимовича
КНУ
ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА



17619JB

філія (вул. Сеченова)

₴ 40.00

ВИПУСК №4 2011

**Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
выпуск №4, 2011
Серія фізико-математичні науки**

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Фізика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України.

Редакційна колегія:

- Анісімов Анатолій Васильович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор, **головний редактор**;
- Хусаїнов Денис Яхєвич, доктор фізико-математичних наук, професор, **заступник головного редактора, відповідальний за видання**;
- Акіменко Віталій Володимирович, доктор технічних наук, професор;
- Анісімов Ігор Олексійович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Буй Дмитро Борисович, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник;
- Булавін Леонід Анатолійович, академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Волошин Олексій Федорович, доктор технічних наук, професор;
- Гарашенко Федір Георгійович, доктор технічних наук, професор;
- Данилов Вадим Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Єжов Станіслав Миколайович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Заславський Володимир Анатолійович, доктор технічних наук, доцент;
- Кириченко Володимир Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Козаченко Юрій Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Кудін Володимир Іванович, доктор технічних наук, старший науковий співробітник;
- Левитський Сергій Михайлович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Макара Володимир Арсенійович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Макарець Микола Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Мелешко В'ячеслав Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Перестук Микола Олексійович, академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- Погорілий Сергій Дем'янович, доктор технічних наук, професор;
- Скришевський Валерій Антонович, доктор фізико-математичних наук, професор.

Редакційний відділ:

- Анісімова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;
- Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
- Мороз Костянтин Олександрович, morozko@univ.kiev.ua;
- Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
- Хмелюк Надія Кузьмівна, khameluk@univ.kiev.ua;
- Сільвейструк Людмила Миколаївна, **технічний редактор**, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ ТА ТЕОРИЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Zhuchok A.V. Some least congruences on dimonoids	7
Городня Д.М. Єдиність розв'язків задач Коші для хвильових рівнянь із загальними стохастичними мірами	11
Дзямко В.Й., Моца А.І., Пашко А.О. Точність в $\$L_p(S_d)\$$ та надійність моделювання лінійних ізотропних полів на сфері	16
Дудченко І.В. Алгебри Фуджити	20
Кочубинська С.А. Цілком ізольовані піднапівгрупи часткового вінцевого добутку скінченних симетричних інверсних напівгруп	23
Курченко О.О. Аналог сталої Ойлера для монотонної, збіжної до нуля функції	26
Леонов Ю.Г. Про трикутне зображення самоподібних груп	30
Рябухо О.М. Професор Євстахій Жилінський (до 120-річчя від дня народження)	34
Семенчук А.В. Алгоритм обчислення раціональних вкорочень мішаного періодичного рекурентного дробу 3-го порядку	38
Сугакова О.В. Робастні оцінки параметрів суміші двох розподілів	43
Тузов О.Н. Про одне узагальнення сервантних підгруп	48
Хомченко А.Н., Мотайло А.П. Геометричне конструювання базису октаедра: модифікація метода Уачспреса	51
Швилов В.В. Про кількість класів еквівалентності напівланцюгових нерозкладних кілець	56

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Григоренко О.Я., Бергульов А.С. Розрахунок напружено-деформованого стану прямокутних анізотропних пластин в просторовій постановці	63
Ільченко Ю.В., Чайковський А.В. Про функцію Гріна для диференціального рівняння з запізненням аргументу та необмеженими операторними коефіцієнтами	67
Каліон В.А., Семенович К.О., Сорокін М.В. Метод гідродинаміки згладжених частинок в задачах про рух в'язкої рідини	71
Кіпніс О.Л., Острик В.І. Контакт з відривом на півнескінченному проміжку пружної смуги та жорсткої основи	75
Кондель В.М., Павліченко А.І. Дослідження стійкості сталених стиснутих елементів сталого та змінного поперечних перерізів	79
Курилко О.Б., Гуржій О.А. Топологічне змішування в'язких рідин в прямокутній порожнині	83
Лебедєва І.В., Бандура Л.А. Круговий динамічний демпфер для розбалансованого ротора	87
Лук'янов П.В. Генерація звуку лопаттю гелікоптера при косому обдуванні потоком	91
Мелешко В.В., Приходько Д.Ф. Хаотичні коливання П-подібного маятника	95
Печук С.Д. Хаос в модифікованій моделі взаємодії серцево-судинної і респіраторної систем	99
Романенко В.М. Апроксимація обмежених розв'язків лінійних різницевих рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами	103
Трунов О.О. Концентрація напружень у прямокутній пластині з круговим отвором	107

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Алксєєнко В.В., Ключин Д.А. Узагальнення р-статистики для вибірок з повтореннями	113
Верченко А.П., Гнаток В.О., Швець Д.В. Побудова та чисельне дослідження математичної моделі технологічного процесу подрібнення	117
Гук Л.М. Метод явного рахунку для реалізації моделі циркуляції атмосфери	121
Демків І.І. Інтерполяційні інтегральні ланцюгові дробі, що не вимагають правил підстановки	125
Джалладова І.А., Харламов А.О. Модель стабільного функціонування валютних операцій банку	133
Донченко В.С., Зінько Т.П. Побудова векторів ознак на основі виділення формант для класифікації мовних сигналів	137
Катеринич Л.О., Галкін О.В. Функціональні особливості реалізації нечіткої специфікації логічного виведення в експертній системі Н-Гомеопат	145
Коляденко М.А. Дослідження алгоритмічних систем торгівлі цінними паперами	151

Костюк О.О. Розробка моделі й прототипу програмного забезпечення для управління документообігом віртуального підприємства	157
Лялецький О.В. Принципи обробки логіко-математичних знань в комп'ютерних системах	163
Лялецький О.О. Про можливість побудови моделей не типізованої теорії λ на базі поняття (В)-неперервності функції	167
Мічута О.Р., Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання суфозії на фільтраційну консолідацію засоленних ґрунтів в неізотермічних умовах в двовимірному випадку	169
Нікітченко М.С., Шкільник С.С. Першопорядкові композиційно-номінативні логіки	176
Порхун О.В., Березань І.О. Застосування нейронних мереж до задачі вибору оптимальної енергетичної стратегії України	186
Прищепя О.В. Система типу $M/M/c/N$ з однією спробою повтору, керована гістерезисною стратегією	193
Россада Т.В. Класи номінативних даних зі швидким доступом до компонентів	199
Савельєв Д. М., Шестопалов М. Ю. Алгоритм обобщенной оценки кластеризации данных	205
Савкіна М.Ю. Характеристична функція сумісного розподілу двох квадратичних форм, що використовується при обчисленні моментів оцінок параметрів моделі сплайнової регресії	210
Слабоспицький О.С. Розщеплений рекурентний алгоритм оцінювання параметрів нелінійних дискретних динамічних систем при неklasичних припущеннях методом найменших квадратів з мінімальним відхиленням від точок "тяжіння"	218
Терещенко Л.М. Розв'язання задачі статичної магнітопружності для шаруватого еліпса	224
Терещенко О.В., Вергунова І.М. Особливості побудови інтегральних зображень для температури в кусково-однорідній півплощині	228
Тимофєєв В.Г. Проблема виконуваності у пропозиційній та реномінативній композиційно-номінативній логіці	233
Юнькова О.О., Кулян А.В. Математичне моделювання та побудова оптимальної структури інвестиційного портфеля	239
РАДІОФІЗИКА	
Бех І.І., Ільченко В.В., Онищенко Ю.М. Розрахунок енергетичного розподілу автоелектронів, емітованих вольфрамом	245
Іванісік А. І., Ісасіко* О. Ю., Коротков П. А., Понежа Г. В. Випромінювання черенковського типу при антистоксовому вимушеному комбінаційному розсіюванні з рухомої фокальної області самофокусування	251
Находкін М.Г., Куліш М.П., Родіонова Т.В. Перетворення фасетування на вершинах двійників всередині зерен полікремнієвих плівко	257
Павлюк С.П., Гандзюк В.І. Механізм утворення високопольового домена в КСДІ структурах	263
Первак Ю.О., Федоров В.В., Зарембовський К.В. Кутові залежності спектрального пропускання багатопарових структур з трьома півхвильовими резонаторами	267
Прокопенко О.В., Сулименко О.Р. Взаємна фазова синхронізація декількох магнітних наноструктур, керованих спин-поляризованим струмом	271
СУЧАСНА ФІЗИКА	
Атамась Н.О., Цханг Фенг-Жой, Хі Бай-Сонг. Дослідження впливу фізичних властивостей іонів на локальну структуру сильно розведених розчинів електролітів за $T=300\text{K}$	283
Вашенко В.М., Лоза Є.А. Вплив стратосферної температури на результати інструментального дистанційного вимірювання загального вмісту озону в атмосфері	287
Горб А.М., Горелов Б.М., Валицька С.В., Половина О.І. Вплив нанорозмірного діоксиду кремнію на акустичні, термічні та механічні властивості ненасиченої полієфірної смоли	295
Горкавенко Т.В., Зубкова С.М., Макара В.А., Русіна Л.М., Смельянский О.В. Температурна залежність електронної структури поверхні (111) Si	303
Григор'єв А.М., Королович В.Ф., Кузовков Ю.Г., Мороз К.О. Теплофізичні властивості кількох нанорозмірних рідинних систем	309
Демчишин А.Б., Селишев П.О. Перколяційні параметри розгалужених структур складених з окремих одиночних треків, створених при проходженні швидких важких іонів під різними кутами	313
Копитков В.В., Сельсин В.П., С.В. Сосновский С.В., Королович В.Ф., Мороз К.О., Пошивайло Л.Ю. Метод опису течії та визначення реологічних констант в'язкопластичних нафтоматеріалів	317
Теслик О.М. Вплив крутильних коливань на гідродинаміку Heli	319

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 512.579

Anatolii V. Zhuchok, PhD, Associate Professor

Some least congruences on dimonoids

We present the least commutative congruence on the free dimonoid, the least group congruence on the dimonoid with an inverse semigroup and the least group congruence on the dimonoid with an orthodox semigroup. We also show that every intra-regular dimonoid is a semilattice of simple subdimonoids.

Key Words: dimonoid, free dimonoid, semi-group, congruence.

E-mail: zhuchok_a@mail.ru

Статтю представив доктор фізико-математичних наук, професор В.В. Кириченко

1. A dimonoid [1] is a nonempty set D with two binary associative operations \prec and \succ satisfying the following axioms:

$$(x \prec y) \prec z = x \prec (y \succ z),$$

$$(x \succ y) \prec z = x \succ (y \prec z),$$

$$(x \prec y) \succ z = x \succ (y \succ z)$$

for all $x, y, z \in D$. If the operations of a dimonoid coincide, then the dimonoid becomes a semigroup. Examples of dimonoids were given in [1–7]. For further details and background see [1].

2. J.-L. Loday described a free dimonoid [1]. We constructed the dimonoid isomorphic to the free dimonoid in [6]. Recall this construction.

As usual N denotes the set of positive integers. Let $F[X]$ be the free semigroup in an alphabet X . We denote the length of a word $w \in F[X]$ by ℓ_w . Define the operations \prec and \succ on $F = \{(w, m) \in F[X] \times N | \ell_w \geq m\}$ by

$$(w_1, m_1) \prec (w_2, m_2) = (w_1 w_2, m_1),$$

$$(w_1, m_1) \succ (w_2, m_2) = (w_1 w_2, \ell_{w_1} + m_2)$$

for all $(w_1, m_1), (w_2, m_2) \in F$. Denote the algebra (F, \prec, \succ) by $\tilde{F}[X]$. By Lemma 3 from [6] $\tilde{F}[X]$ is the free dimonoid.

A dimonoid (D, \prec, \succ) is called commutative [3], if both semigroups (D, \prec) and (D, \succ) are commutative.

Анатолій В. Жучок, к. ф.-м. н., доцент

Деякі найменші конгруенції дімоноїдів

Побудовано найменшу комутативну конгруенцію на вільному дімоноїді, найменшу групову конгруенцію на дімоноїді з інверсною напівгрупою та найменшу групову конгруенцію на дімоноїді з ортодоксальною напівгрупою. Показано також, що кожний інтра-регулярний дімоноїд є напівструктурою простит піддімоноїдів.

Ключові слова: дімоноїд, вільний дімоноїд, напівгрупа, конгруенція.

Let $F^*[X]$ be the free commutative semigroup over X , G be a set of non-ordered pairs (p, q) , $p, q \in X$. Define the operations \prec and \succ on the set $F^*[X] \cup G$ by

$$a_1 \dots a_m \prec b_1 \dots b_n = a_1 \dots a_m b_1 \dots b_n,$$

$$a_1 \dots a_m \succ b_1 \dots b_n = \begin{cases} a_1 \dots a_m b_1 \dots b_n, & mn > 1, \\ (a_1, b_1), & m = n = 1, \end{cases}$$

$$a_1 \dots a_m \prec (p, q) = a_1 \dots a_m \succ (p, q) = a_1 \dots a_m pq,$$

$$(p, q) \prec a_1 \dots a_m = (p, q) \succ a_1 \dots a_m = pq a_1 \dots a_m,$$

$$(p, q) \prec (r, s) = (p, q) \succ (r, s) = pqr s$$

for all $a_1 \dots a_m, b_1 \dots b_n \in F^*[X]$, $(p, q), (r, s) \in G$.

Theorem 1. ([2], Theorem 3) $(F^*[X] \cup G, \prec, \succ)$ is the free commutative dimonoid.

3. In this section we present the least commutative congruence on the free dimonoid.

If $f: D_1 \rightarrow D_2$ is a homomorphism of dimonoids, then the corresponding congruence on D_1 will be denoted by Δ_f . If ρ is a congruence on the dimonoid (D, \prec, \succ) such that $(D, \prec, \succ)/\rho$ is a commutative dimonoid, then we say that ρ is a commutative congruence.

Denote the operation on $F^*[X]$ by $*$.

Theorem 2. Let $\tilde{F}[X]$ be the free dimonoid, $(x_1x_2\dots x_n, m) \in \tilde{F}[X]$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ and $(F^*[X] \cup G, \prec, \succ)$ be the free commutative dimonoid. Then the map

$$\alpha: \tilde{F}[X] \rightarrow (F^*[X] \cup G, \prec, \succ):$$

$$\begin{aligned} (x_1x_2\dots x_n, m) &\mapsto (x_1x_2\dots x_n, m)\alpha = \\ &= \begin{cases} (x_1, x_2), & n = m = 2, \\ x_1 * x_2 * \dots * x_n & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

is an epimorphism inducing the least commutative congruence on $\tilde{F}[X]$.

Proof. For arbitrary elements $(x_1x_2\dots x_n, m)$, $(y_1y_2\dots y_s, t) \in \tilde{F}[X]$, where $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_s \in X$, we consider the following five cases.

Case 1 : $n = m = s = t = 2$. Then

$$\begin{aligned} ((x_1x_2, 2) \prec (y_1y_2, 2))\alpha &= (x_1x_2y_1y_2, 2)\alpha = \\ &= x_1 * x_2 * y_1 * y_2 = (x_1, x_2) \prec (y_1, y_2) = \\ &= (x_1x_2, 2)\alpha \prec (y_1y_2, 2)\alpha, \\ ((x_1x_2, 2) \succ (y_1y_2, 2))\alpha &= \\ &= (x_1x_2y_1y_2, 4)\alpha = x_1 * x_2 * y_1 * y_2 = \\ &= (x_1, x_2) \succ (y_1, y_2) = (x_1x_2, 2)\alpha \succ (y_1y_2, 2)\alpha. \end{aligned}$$

Case 2 : $n = m = 2$, $t \neq 2$. Then

$$\begin{aligned} ((x_1x_2, 2) \prec (y_1y_2\dots y_s, t))\alpha &= (x_1x_2y_1y_2\dots y_s, 2)\alpha = \\ &= x_1 * x_2 * y_1 * y_2 * \dots * y_s = (x_1, x_2) \prec (y_1 * y_2 * \dots * y_s) = \\ &= (x_1x_2, 2)\alpha \prec (y_1y_2\dots y_s, t)\alpha, \\ ((x_1x_2, 2) \succ (y_1y_2\dots y_s, t))\alpha &= \\ &= (x_1x_2y_1y_2\dots y_s, 2+t)\alpha = x_1 * x_2 * y_1 * y_2 * \dots * y_s = \\ &= (x_1, x_2) \succ (y_1 * y_2 * \dots * y_s) = \\ &= (x_1x_2, 2)\alpha \succ (y_1y_2\dots y_s, t)\alpha. \end{aligned}$$

Case 3 : $m \neq 2$, $s = t = 2$. Then

$$\begin{aligned} ((x_1x_2\dots x_n, m) \prec (y_1y_2, 2))\alpha &= \\ &= (x_1x_2\dots x_ny_1y_2, m)\alpha = x_1 * x_2 * \dots * x_n * y_1 * y_2 = \\ &= (x_1 * x_2 * \dots * x_n) \prec (y_1, y_2) = \\ &= (x_1x_2\dots x_n, m)\alpha \prec (y_1y_2, 2)\alpha, \\ ((x_1x_2\dots x_n, m) \succ (y_1y_2, 2))\alpha &= \\ &= (x_1x_2\dots x_ny_1y_2, n+2)\alpha = x_1 * x_2 * \dots * x_n * y_1 * y_2 = \\ &= (x_1 * x_2 * \dots * x_n) \succ (y_1, y_2) = \end{aligned}$$

$$= (x_1x_2\dots x_n, m)\alpha \succ (y_1y_2, 2)\alpha.$$

Case 4 : $m \neq 2$, $t \neq 2$, $n \neq 1$. Then

$$\begin{aligned} ((x_1x_2\dots x_n, m) \prec (y_1y_2\dots y_s, t))\alpha &= \\ &= (x_1x_2\dots x_ny_1y_2\dots y_s, m)\alpha = \\ &= x_1 * x_2 * \dots * x_n * y_1 * y_2 * \dots * y_s = \\ &= (x_1 * x_2 * \dots * x_n) \prec (y_1 * y_2 * \dots * y_s) = \\ &= (x_1x_2\dots x_n, m)\alpha \prec (y_1y_2\dots y_s, t)\alpha, \\ ((x_1x_2\dots x_n, m) \succ (y_1y_2\dots y_s, t))\alpha &= \\ &= (x_1x_2\dots x_ny_1y_2\dots y_s, n+t)\alpha = \\ &= x_1 * x_2 * \dots * x_n * y_1 * y_2 * \dots * y_s = \\ &= (x_1 * x_2 * \dots * x_n) \succ (y_1 * y_2 * \dots * y_s) = \\ &= (x_1x_2\dots x_n, m)\alpha \succ (y_1y_2\dots y_s, t)\alpha. \end{aligned}$$

Case 5 : $n = m = s = t = 1$. Then

$$\begin{aligned} ((x_1, 1) \prec (y_1, 1))\alpha &= (x_1y_1, 1)\alpha = \\ &= x_1 * y_1 = x_1 \prec y_1 = (x_1, 1)\alpha \prec (y_1, 1)\alpha, \\ ((x_1, 1) \succ (y_1, 1))\alpha &= (x_1y_1, 2)\alpha = \\ &= (x_1, y_1) = x_1 \succ y_1 = (x_1, 1)\alpha \succ (y_1, 1)\alpha. \end{aligned}$$

Similarly, the remaining cases can be proved. Thus, α is a homomorphism.

For arbitrary $a_1a_2\dots a_n \in F^*[X]$, $(p, q) \in G$ there exist $(a_1a_2\dots a_n, 1)$, $(pq, 2) \in \tilde{F}[X]$ such that

$$(a_1a_2\dots a_n, 1)\alpha = a_1a_2\dots a_n, \quad (pq, 2)\alpha = (p, q).$$

So, α is surjective. By Theorem 1 $(F^*[X] \cup G, \prec, \succ)$ is the free commutative dimonoid. Then Δ_α is the least commutative congruence on $\tilde{F}[X]$. \square

4. In this section we present the least group congruence on the dimonoid (D, \prec, \succ) with an inverse semigroup (D, \prec) and the least group congruence on the dimonoid (D, \prec, \succ) with an orthodox semigroup (D, \prec) .

Lemma 1. Let (D, \prec, \succ) be a dimonoid. If (D, \prec) $((D, \succ))$ contains an identity, then the operations of (D, \prec, \succ) coincide.

Proof. Let e be an identity of (D, \prec) . For all $x, y, z \in D$ we have

$$(x \prec y) \prec z = x \prec (y \prec z) = x \prec (y \succ z).$$

Substituting $x = e$ in the last equality, we obtain $y \prec z = y \succ z$ for all $y, z \in D$.

Dually, the remaining statement of the lemma can be proved. \square

An inverse semigroup S is a semigroup in which every element $x \in S$ has a unique inverse $y \in S$ in the sense that $x = xyx$ and $y = yxy$. A regular semigroup S is called orthodox, if in S the set of idempotents is a subsemigroup.

If ρ is a congruence on the dimonoid (D, \prec, \succ) such that the operations of $(D, \prec, \succ)/\rho$ coincide and it is a group, then we say that ρ is a group congruence.

Define a relation σ on the dimonoid (D, \prec, \succ) with an inverse semigroup (D, \prec) by

$$\begin{aligned} & a \sigma b \text{ if and only if} \\ & \text{there exists an idempotent } e \\ & \text{of } (D, \prec) \text{ such that } e \prec a = e \prec b, \end{aligned}$$

and define a relation δ on the dimonoid (D, \prec, \succ) with an orthodox semigroup (D, \prec) by

$$\begin{aligned} & a \delta b \text{ if and only if} \\ & e \prec a \prec e = e \prec b \prec e \\ & \text{for some idempotent } e \text{ of } (D, \prec). \end{aligned}$$

Theorem 3. Let (D, \prec, \succ) be a dimonoid. Then

(i) σ on (D, \prec, \succ) with an inverse semigroup (D, \prec) is the least group congruence;

(ii) δ on (D, \prec, \succ) with an orthodox semigroup (D, \prec) is the least group congruence.

Proof. (i) The fact that the relation σ is a group congruence on the inverse semigroup (D, \prec) has been proved by Munn [8]. Let us show that σ is compatible concerning the operation \succ .

Let $a \sigma b, a, b, c \in D$. Then $a \prec c \sigma b \prec c$. It means that there exists an idempotent e of (D, \prec) such that $e \prec (a \prec c) = e \prec (b \prec c)$. Hence

$$\begin{aligned} e \prec (a \prec c) &= (e \prec a) \prec c = e \prec (a \succ c) = \\ &= e \prec (b \prec c) = (e \prec b) \prec c = e \prec (b \succ c) \end{aligned}$$

according to the associativity of the operation \prec and the axiom of a dimonoid. So, $a \succ c \sigma b \succ c$.

Dually, the left compatibility of the relation σ concerning the operation \succ can be proved. Thus, σ is a congruence on (D, \prec, \succ) .

As $(D, \prec)/\sigma$ is a group, then by Lemma 1 the operations of the dimonoid $(D, \prec, \succ)/\sigma$ coincide and so, it is a group.

The proof of (i) will be completed, if we show that σ is contained in every group congruence ρ on (D, \prec, \succ) . Let ρ be an arbitrary group congruence on the dimonoid (D, \prec, \succ) . If $a \sigma b, a, b \in D$, then $e \prec a = e \prec b$ for some idempotent $e \in (D, \prec)$. It is clear that $(e\rho) \prec (a\rho) = (e\rho) \prec (b\rho)$ in $(D, \prec)/\rho$. As $e\rho$ is an idempotent in $(D, \prec)/\rho$, then it is an identity. Hence $a\rho = b\rho$, that is, $a\rho b$. Thus, $\sigma \subseteq \rho$.

(ii) The fact that the relation δ is a group congruence on the orthodox semigroup (D, \prec) has been proved by Meakin [9]. Let us show that δ is compatible concerning the operation \succ .

Let $a \delta b, a, b, c \in D$. Then $a \prec c \delta b \prec c$. It means that there exists an idempotent e of (D, \prec) such that $e \prec (a \prec c) \prec e = e \prec (b \prec c) \prec e$. Hence $e \prec (a \prec c) \prec e = ((e \prec a) \prec c) \prec e = e \prec (a \succ c) \prec e = e \prec (b \prec c) \prec e = ((e \prec b) \prec c) \prec e = e \prec (b \succ c) \prec e$ according to the associativity of the operation \prec and the axiom of a dimonoid. So, $a \succ c \delta b \succ c$.

Dually, the left compatibility of the relation δ concerning the operation \succ can be proved. Thus, δ is a congruence on (D, \prec, \succ) .

As $(D, \prec)/\delta$ is a group, then by Lemma 1 the operations of the dimonoid $(D, \prec, \succ)/\delta$ coincide and so, it is a group. Let ρ be an arbitrary group congruence on the dimonoid (D, \prec, \succ) . Similarly to (i), we can prove that $\delta \subseteq \rho$. \square

Theorem 3 (i) extends Munn's description [8] of the least group congruence on an inverse semigroup and Theorem 3 (ii) extends Meakin's description [9] of the least group congruence on an orthodox semigroup.

5. In this section we show that every intra-regular dimonoid (D, \prec, \succ) is a semilattice Y of simple subdimonoids $D_i, i \in Y$.

Lemma 2. ([4], Lemma 2.1) The operations of a dimonoid (D, \prec, \succ) coincide, if (D, \prec) is a semilattice.

A semigroup S is called intra-regular, if $a \in Sa^2S$ for any $a \in S$. A semigroup is called simple, if it has no proper two-sided ideals. A dimonoid will be called intra-regular (respectively, simple), if both its semigroups are intra-regular (respectively, simple).

Observe that every idempotent dimonoid (see [4], [7]) is intra-regular.

Let (D, \prec, \succ) be a dimonoid and $a \in D$, $n \in \mathbb{N}$. Denote the degree n of an element a concerning the operation \prec (respectively, \succ) by a^n (respectively, by $n a$) and the semigroup (D, \prec) (respectively, (D, \succ)) with an identity by D_{\prec}^1 (respectively, by D_{\succ}^1).

In terms of dibands of subdimonoids (see [3–7]) we obtain the following theorem.

Theorem 4. *Every intra-regular dimonoid (D, \prec, \succ) is a semilattice Y of simple subdimonoids D_i , $i \in Y$.*

Proof. Let (D, \prec, \succ) be an intra-regular dimonoid. Define relations \mathfrak{S}_{\prec} and \mathfrak{S}_{\succ} on (D, \prec, \succ) by

$a \mathfrak{S}_{\prec} b$ if and only if
there exist $x_i \in D_{\prec}^1$, $1 \leq i \leq 4$ such that
 $a = x_1 \prec b \prec x_2$, $b = x_3 \prec a \prec x_4$,

and

$a \mathfrak{S}_{\succ} b$ if and only if
there exist $y_i \in D_{\succ}^1$, $1 \leq i \leq 4$ such that
 $a = y_1 \succ b \succ y_2$, $b = y_3 \succ a \succ y_4$.

From Theorem 4.4 [10] (see also [11]) it follows that \mathfrak{S}_{\prec} (respectively, \mathfrak{S}_{\succ}) is a semilattice congruence on the semigroup (D, \prec) (respectively, (D, \succ)) and every class of this congruence is a simple subsemigroup in (D, \prec) (respectively, (D, \succ)).

Now we show that $\mathfrak{S}_{\prec} = \mathfrak{S}_{\succ}$. Let $a, b \in D$ and $a \mathfrak{S}_{\prec} b$. Then $a = x_1 \prec b \prec x_2$, $b = x_3 \prec a \prec x_4$ for some $x_i \in D_{\prec}^1$, $1 \leq i \leq 4$. As (D, \succ) is an intra-regular semigroup, then there exist $t_i \in D$, $1 \leq i \leq 4$ such that

$$a = t_1 \succ 2a \succ t_2, \quad b = t_3 \succ 2b \succ t_4.$$

Using the associativity of the operations and the axiom of a dimonoid, we have $a = t_1 \succ 2a \succ t_2 = t_1 \succ a \succ (x_1 \prec b \prec x_2) \succ t_2 = t_1 \succ a \succ ((x_1 \prec b \prec x_2) \succ t_2) = t_1 \succ a \succ x_1 \succ b \succ x_2 \succ t_2 = (t_1 \succ a \succ x_1) \succ b \succ (x_2 \succ t_2)$, $b = t_3 \succ 2b \succ t_4 = t_3 \succ b \succ (x_3 \prec a \prec x_4) \succ t_4 = t_3 \succ b \succ ((x_3 \prec a \prec x_4) \succ t_4) = t_3 \succ b \succ x_3 \succ a \succ x_4 \succ t_4 = (t_3 \succ b \succ x_3) \succ a \succ (x_4 \succ t_4)$.

So, $a \mathfrak{S}_{\succ} b$. Analogously, we can show that $a \mathfrak{S}_{\succ} b \Rightarrow a \mathfrak{S}_{\prec} b$. Thus, $\mathfrak{S}_{\prec} = \mathfrak{S}_{\succ}$.

As $(D, \prec)/\mathfrak{S}_{\prec}$ is a semilattice, then according to Lemma 2 the operations of the dimonoid $(D, \prec, \succ)/\mathfrak{S}_{\prec}$ coincide and so, it is a semilattice.

Thus, (D, \prec, \succ) is a semilattice of simple subdimonoids. \square

Theorem 4 extends Andersen's decomposition [11] of intra-regular semigroups into semilattices of simple subsemigroups.

References

1. Loday J.-L. Dialgebras / J.-L. Loday // In: Dialgebras and related operads, Lect. Notes Math., Springer-Verlag, Berlin. – 2001. – 1763. – p. 7–66.
2. Zhuchok A.V. Free commutative dimonoids / A.V. Zhuchok // Algebra and Discrete Math. – 2010. – 9, № 1. – p. 109–119.
3. Zhuchok A.V. Commutative dimonoids / A.V. Zhuchok // Algebra and Discrete Math. – 2009. – 2. – p. 116–127.
4. Zhuchok A.V. Semilattices of subdimonoids / A.V. Zhuchok // Asian-Eur. J. Math. – 2011. – 4, № 2. – p. 359–371.
5. Zhuchok A.V. Dibands of subdimonoids / A.V. Zhuchok // Mat. Stud. – 2010. – 33, № 2. – p. 120–124.
6. Zhuchok A.V. Free dimonoids / A.V. Zhuchok // Ukr. Math. J. – 2011. – 63, № 2. – p. 165–175 (in Ukrainian).
7. Zhuchok A.V. Free rectangular dibands and free dimonoids / A.V. Zhuchok // Algebra and Discrete Math. – 2011. – 11, № 2. – p. 92–111.
8. Munn W.D. A class of irreducible matrix representations of an arbitrary inverse semigroup / W.D. Munn // Proc. Glasgow Math. Assoc. – 1961. – 5. – p. 41–48.
9. Meakin J. Congruences on orthodox semigroups II / J. Meakin // J. Austral. Math. Soc. – 1972. – 13. – p. 259–266.
10. Clifford A.H. The algebraic theory of semigroups / A.H. Clifford, G.B. Preston // Amer. Math. Soc., Providence. – 1964. – V. 1 (in Russian).
11. Andersen O. Ein Bericht über die Struktur abstrakter Halbgruppen / O. Andersen // Thesis, Hamburg. – 1952.

Надійшла до редколегії 5.07.2011

УДК 519.21

Городня Д. М.*, аспірант

Єдиність розв'язків задач Коші для хвильових рівнянь із загальними стохастичними мірами*Доведено єдиність слабого розв'язку задачі Коші для хвильових рівнянь, керованих загальними стохастичними мірами.**Ключові слова: стохастична міра, стохастичне хвильове рівняння, задача Коші, слабкий розв'язок.*

*E-mail: gorodnyaya-darya@i.ua

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Козаченко Ю. В.

1 Вступ

У роботах [1,2] доведено існування розв'язків задач Коші для хвильових рівнянь, які містять доданок, заданий інтегралом із стохастичною мірою. Для випадку d просторових змінних такий розв'язок визначається як процес V_t , $t > 0$, такий, що при фіксованому $t > 0$ V_t є узагальненою випадковою функцією, визначеною на просторі $D(\mathbb{R}^d)$ основних функцій з компактним носієм, і у певному сенсі задовольняє відповідне рівняння та початкову умову. Також в [1] при $d = 1$ встановлено, що відповідний розв'язок єдиний, якщо при кожному $\varphi \in D(\mathbb{R}^1)$ деякий побудований за допомогою V_t та φ випадковий процес задовольняє певну додаткову умову. У даній статті запропоновано інший підхід до доведення єдиності таких розв'язків, який дозволив встановити єдиність розв'язків у деякому класі узагальнених випадкових функцій незалежно від додаткової умови, яка використовується в [1].

Про застосування таких рівнянь також див [1] та наведені там посилання.

2 Необхідні теоретичні відомості

Позначимо через L_0 множину всіх випадкових величин, які задані на повному ймовірнісному просторі (Ω, \mathcal{F}, P) і розглядаються з точністю до P -еквівалентності; збіжність в L_0 — це збіжність за ймовірністю, тобто збіжність за семі-нормою

$$\|\eta\| = \sup\{\delta > 0 \mid P\{|\eta| > \delta\} > \delta\}, \quad \xi \in L_0.$$

Нехай $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbb{R}^d)$ — σ -алгебра борельових

Gorodnya D. M., PhD student

Uniqueness of solutions of Cauchy problems for wave equations with general stochastic measures*Uniqueness of the weak solution of Cauchy problems for wave equations driven by general stochastic measures is proved.**Key Words: stochastic measure, stochastic wave equation, Cauchy problem, weak solution.*множин простору \mathbb{R}^d .

Означення 1 [1] *Стохастичною мірою називається σ -адитивне відображення $\mu : \mathbf{B} \rightarrow L_0$.*

Відзначимо, що значення випадкової міри обмежені за ймовірністю, а отже [3, с. 16]

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sup_{A \in \mathbf{B}} \|t\mu(A)\| = 0. \quad (1)$$

У роботі [3] визначається інтеграл $\int_A f d\mu$, в якому $A \in \mathbf{B}$, f — дійсна вимірна функція, та вивчаються його властивості. Зокрема [1], для цього інтеграла справджується аналог теореми Лебега про мажоровану збіжність і теорема про диференціювання інтеграла по параметру, а також наступна лема (див. [3, с. 22]).

Лема 1 *Якщо функція $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ інтегровна по $d\mu$ на \mathbb{R}^d і обмежена сталою $C > 0$ на \mathbb{R}^d то*

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu \right\| \leq 16 \sup_{A \in \mathbf{B}} \|C\mu(A)\|.$$

Означення 2 [1] *Узагальненою випадковою функцією (у.в.ф.) називається лінійне неперервне відображення $\xi : D(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_0$.*

Набір усіх у.в.ф. позначатимемо $D'_r(\mathbb{R}^d)$. Стохастична міра μ визначає у.в.ф. $\dot{\mu}$ за правилом

$$(\dot{\mu}, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\mu(x), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^d).$$

У подальшому використовується інтеграл Рімана від випадкової функції. Наступне означення цього інтеграла та його властивості встановлено В. М. Радченком. Нехай B — вимірна за Жорданом підмножина \mathbb{R}^m , $\xi : B \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — вимірна випадкова функція.

Означення 3 Функція ξ називається інтегрованою за Ріманом по B , якщо множини $\{\xi(x), x \in B\}$ обмежена за ймовірністю і для довільної послідовності розбиттів $B = \bigcup_{k=1}^n B_{k,n}$, $n \geq 1$, такої, що $\max_{1 \leq k \leq n} \text{diam} B_{k,n} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, і для довільного набору точок $x_{k,n} \in B_{k,n}$ існує границя за ймовірністю інтегральних сум

$$P - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi(x_{k,n}) m(B_{k,n}) = \int_B \xi(x) dx.$$

Тут m – міра Жордана в R^m . Для не випадкової функції ξ це означення співпадає з означенням інтеграла Рімана в [4].

Справджуються такі леми.

Лема 2 Нехай ξ інтегровна по B , $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ – рівномірно неперервна і обмежена сталою $C > 0$ на B функція. Тоді функція $f\xi$ теж інтегровна по B і

$$\| \int_B \xi(t) f(t) dt \| \leq 16 \sup_{A \subset B} \| C \int_A \xi(t) dt \|.$$

Тут супремум береться по всіх вимірних за Жорданом множинах A , таких, що $A \subset B$.

Лема 3 Нехай $A \in \mathbf{B}$, μ – стохастична міра, $h(x, s): B \times A \rightarrow \mathbb{R}$ – не випадкова, вимірна, інтегровна за Ріманом по dx на B при кожному фіксованому $s \in A$, а також $|h(x, s)| \leq g(s)$, $s \in A$, для деякої інтегрованої по $d\mu(s)$ на A функції $g: A \rightarrow \mathbb{R}$. Тоді функція $\xi(x) = \int_A h(x, s) d\mu(s)$ визначена, інтегровна за Ріманом на B , функція $f(s) = \int_B h(x, s) dx$ інтегровна по $d\mu(s)$ на A і

$$\int_B dx \int_A h(x, s) d\mu(s) = \int_A d\mu(s) \int_B h(x, s) dx.$$

Зауважимо, що похідна від випадкового процесу $\eta: (a; b) \rightarrow L_0$ розглядається у сенсі збіжності за ймовірністю.

3 Основний результат

Розглянемо задачу Коші

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_t}{\partial t^2} &= a^2 \Delta_t V_t + f \dot{\mu}, \quad t > 0, \\ \frac{\partial V_t}{\partial t} \Big|_{t=0+} &= \zeta, \quad V_t \Big|_{t=0+} = \nu, \end{aligned} \quad (2)$$

відносно невідомого процесу $V_t, t > 0$, що набуває значення в D'_t . Тут μ, ν, ζ – випадкові міри, $(f \dot{\mu}, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, t) \varphi(x) d\mu(x)$, $\varphi \in D$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $f(x, t)$ – вимірна дійсна функція, визначена на $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$, яка при кожному фіксованому $x \in \mathbb{R}^d$ належить $C^2([0, \infty)) \cap C^1([0, \infty))$ а також $f(x, t), \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2}$ обмежені на $\mathbb{R}^d \times (0, \infty)$.

У роботах [1,2] доведено, що при $d = 1, 2, 3$ задача Коші (2) має розв'язок вигляду

$$(V_t, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} r_1(y, t, \varphi) d\mu(y) + \quad (3)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} r_2(y, t, \varphi) d\zeta(y) + \int_{\mathbb{R}^d} r_3(y, t, \varphi) d\nu(y),$$

$$\varphi \in D(\mathbb{R}^d), \quad t > 0,$$

причому для кожного фіксованого $\varphi \in D(\mathbb{R}^d)$ функції $r_k(y, t, \varphi)$, $1 \leq k \leq 3$, належать множині G усіх таких функцій $g(y, t): \mathbb{R}^d \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, що для кожного $T > 0$ функції $g, \frac{\partial g}{\partial t}$ неперервні і обмежені на $\mathbb{R}^d \times [0, T]$, а функція $\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$ неперервна і обмежена на $\mathbb{R}^d \times (0, T]$. Інтеграли із (3) задають розв'язки таких задач Коші:

$$\frac{\partial^2 V_t^1}{\partial t^2} = a^2 \Delta_t V_t^1 + f \dot{\mu}, \quad t > 0, \quad \frac{\partial V_t^1}{\partial t} \Big|_{t=0+} = 0, \quad (4)$$

$$V_t^1 \Big|_{t=0+} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 V_t^2}{\partial t^2} = a^2 \Delta_t V_t^2, \quad t > 0, \quad \frac{\partial V_t^2}{\partial t} \Big|_{t=0+} = \zeta, \quad (5)$$

$$V_t^2 \Big|_{t=0+} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 V_t^3}{\partial t^2} = a^2 \Delta_t V_t^3, \quad t > 0, \quad \frac{\partial V_t^3}{\partial t} \Big|_{t=0+} = 0, \quad (6)$$

$$V_t^3 \Big|_{t=0+} = \nu.$$

Тому виникає питання про єдиність розв'язків задач Коші (4 – 6), які зображуються у вигляді інтегралів із (3) з підінтегральними функціями, що належать G . Відзначимо, що коли V_t, \dot{V}_t – розв'язки однієї із задач Коші (4 – 6), то $W_t = V_t - \dot{V}_t$ є розв'язком задачі Коші

$$\frac{\partial^2 W_t}{\partial t^2} = a^2 \Delta_t W_t, \quad t > 0, \quad \frac{\partial W_t}{\partial t} \Big|_{t=0+} = 0, \quad (7)$$

$$W_t \Big|_{t=0+} = 0.$$

Також, наприклад, при $d = 2$, згідно з [2] розв'язок задачі (5) має вигляд

$$(V_t, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{t}{2\pi} \int_{U_1} \frac{\varphi(y + at\eta) d\eta}{\sqrt{1 - |\eta|^2}} \right) d\zeta(y),$$

$$\varphi \in D(\mathbb{R}^2).$$

Тут U_1 - одинична куля в \mathbb{R}^2 з центром у нулі. Цей розв'язок продовжується до у.в.ф. із $D'_r(\mathbb{R}^3)$, тобто знайдеться така $V \in D'_r(\mathbb{R}^3)$, що $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^2) \forall \psi \in D(\mathbb{R}) : (V, \varphi(x)\psi(t)) = \int_0^\infty (V_t, \varphi)\psi(t)dt$.

З урахуванням леми 3 потрібно продовження визначається за правилом

$$(V, \Phi(x, t)) =$$

$$\int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^2} d\zeta(y) \left(\frac{t}{2\pi} \int_{U_1} \frac{\Phi(y + at\eta) d\eta}{\sqrt{1 - |\eta|^2}} \right),$$

$$\Phi \in D(\mathbb{R}^3).$$

Ці міркування пояснюють умови, при яких доводиться наступна теорема, яка містить основний результат даної статті.

Теорема 1 При $d = 1, 2, 3$ задача Коші (7) має тільки нульовий розв'язок у класі процесів W_t , $t \geq 0$, які продовжуються до у. в. ф. із $D'_r(\mathbb{R}^{d+1})$ і зображуються у вигляді

$$(W_t, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} r(y, t, \varphi) d\mu(y), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^d), \quad (8)$$

де μ - стохастична міра в \mathbb{R}^d і при кожному фіксованому $\varphi \in D(\mathbb{R}^d)$ функція $r(y, t, \varphi)$ належить G .

У подальшому точки простору D^{d+1} позначатимемо (x, t) де $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}$. Для доведення теореми 1 використовуються такі твердження.

Лема 4 Припустимо, що у.в.ф. $V \in D'_r(\mathbb{R}^{d+1})$ задовольняє такі умови:

- 1) $V = 0$ при $t < 0$;
 - 2) $\forall \Phi \in D(\mathbb{R}^{d+1}) : (V, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}) = a^2(V, \Delta_x \Phi)$.
- Тоді V є нульовою у.в.ф. при $d = 1, 2, 3$.

Для доведення леми 4 розглядаються узагальнені функції зі значеннями у просторі Фреше і використовується підхід, за допомогою якого у [5] доводиться єдиність узагальненої задачі Коші для звичайного хвильового рівняння. Його деталі будуть викладені в іншій роботі.

Лема 5 Нехай μ - стохастична міра на $\mathbb{B}(\mathbb{R}^d)$, $h(x, t) : \mathbb{R}^d \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - така функція, що $h(x, t)$ та $\frac{\partial h(x, t)}{\partial t}$ неперервні та обмежені на $\mathbb{R}^d \times [a, b]$, $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - неперервно диференційовна на $[a, b]$ функція. Тоді для випадкової

функції $\xi(t) = \int_{\mathbb{R}^d} h(x, t) d\mu(x)$, $t \in [a, b]$ справедлива формула інтегрування частинами

$$\int_a^b \xi'(t) \varphi(t) dt = \xi(b) \varphi(b) - \quad (9)$$

$$\xi(a) \varphi(a) - \int_a^b \xi(t) \varphi'(t) dt.$$

Доведення. Внаслідок теореми про диференціювання інтеграла по параметру для кожного $t \in [a, b]$ існує $\xi'(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} d\mu(x)$. Скориставшись також лемою 2, робимо висновок, що інтеграли з (9) визначені коректно, а також

$$\int_a^b \xi'(t) \varphi(t) dt =$$

$$\int_a^b dt \int_{\mathbb{R}^d} (\varphi(t) \frac{\partial h(x, t)}{\partial t}) d\mu(x) =$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mu(x) \int_a^b \varphi(t) dt h(x, t) =$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mu(x) (\varphi(x) h(x, t))|_a^b - \int_a^b h(x, t) \varphi'(t) dt =$$

$$\varphi(b) \int_{\mathbb{R}^d} h(x, b) d\mu(x) - \varphi(a) \int_{\mathbb{R}^d} h(x, a) d\mu(x) -$$

$$\int_a^b \varphi'(t) \int_{\mathbb{R}^d} h(x, t) d\mu(x) =$$

$$= \varphi(b) \xi(b) - \varphi(a) \xi(a) - \int_a^b \varphi'(t) \xi(t) dt.$$

Лему 5 доведено.

У подальшому d належить множині $\{1, 2, 3\}$.

Лема 6 Нехай W_t , $t > 0$ - розв'язок задачі Коші (7), який задовольняє такі умови:

1) для довільних $T > 0$ та $\varphi \in D(\mathbb{R}^d)$ випадкова функція (W_t, φ) інтегровна за Ріманом на $[0, T]$;

2) $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^d) \quad \forall \psi \in D(\mathbb{R}) : \int_0^\infty (W_t, \varphi) \psi''(t) dt = \int_0^\infty \frac{d^2(W_t, \varphi)}{dt^2} \psi(t) dt$;

3) $\exists W \in D'_r(\mathbb{R}^{d+1}) \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^d) \quad \forall \psi \in D(\mathbb{R}) : (W, \varphi(x)\psi(t)) = \int_0^\infty (W_t, \varphi)\psi(t) dt$.

Тоді $\int_0^\infty (W_t, \varphi)\psi(t) dt = 0$ для довільних $\varphi \in D(\mathbb{R}^d)$ та $\psi \in D(\mathbb{R})$.

Доведення. Зафіксуємо функції $\varphi \in D(\mathbb{R}^d)$, $\psi \in D(\mathbb{R})$. Відзначимо, що $\Phi(x, t) = \varphi(x)\psi(t) \in D(\mathbb{R}^{d+1})$.

Згідно з означенням розв'язку задачі Коші [2]

$$\frac{d^2(W_t, \varphi)}{dt^2} = a^2(W_t, \Delta\varphi), \quad t > 0,$$

$$P - \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{d(W_t, \varphi)}{dt} = P - \lim_{t \rightarrow 0+} (W_t, \varphi) = 0, \quad (10)$$

а отже, при $t = 0$ випадкові функції (W_t, φ) , $\frac{d^2(W_t, \varphi)}{dt^2}$ доводяться нулем за неперервністю у сенсі збіжності за ймовірністю, а також $\frac{d^2(W_t, \varphi)}{dt^2}$ інтегровна за Ріманом на $[0, T]$ для кожного $T > 0$. Тому внаслідок умов 1, включення $\psi \in D(\mathbb{R})$ та леми 2 інтеграл з умов 2, 3 визначені коректно.

Покладемо

$$(\tilde{W}, \Phi) = \int_0^\infty (W_t, \varphi)\psi(t)dt. \quad (11)$$

Оскільки $\Delta_x \Phi(x, t) = \psi(t)\Delta\varphi(x)$, $\frac{\partial^k \Phi(x, t)}{\partial t^k} = \varphi(x)\psi^{(k)}(t)$, $k \geq 1$, то з урахуванням (10) та умов 1, 2, дістанемо

$$\begin{aligned} (\tilde{W}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}) &= \int_0^\infty (W_t, \varphi)\psi''(t)dt = \\ &= \int_0^\infty \frac{d^2(W_t, \varphi)}{dt^2} \psi(t)dt = \\ &= \int_0^\infty a^2(W_t, \Delta\varphi)\psi(t)dt = a^2(\tilde{W}, \Delta_x \Phi). \end{aligned} \quad (12)$$

Якщо

$$\Phi = \sum_{k=1}^m \Phi_k, \quad (13)$$

де $\Phi_k = \varphi_k \psi_k$, $\{\varphi_k\} \subset D(\mathbb{R}^d)$, $\{\psi_k\} \subset D(\mathbb{R})$, то з урахуванням (11) покладемо $(\tilde{W}, \Phi) = \sum_{k=1}^m (\tilde{W}, \Phi_k)$. Оскільки $W_t \in D'_t(\mathbb{R}^d)$ при кожному $t \geq 0$, то з (11, 12) та лінійності операцій диференціювання та інтегрування випливає, що для функцій Φ виду (13) теж виконується рівність

$$(\tilde{W}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}) = a^2(\tilde{W}, \Delta_x \Phi). \quad (14)$$

Згідно з [5, с. 129] функції виду (13) утворюють скрізь щільну множину в $D(\mathbb{R}^{d+1})$, а отже, \tilde{W} продовжується до у.в.ф. W , заданої на $D(\mathbb{R}^{d+1})$. Внаслідок умови 3 і співвідношень (11–14) у.в.ф. W задовольняє умови 1, 2 леми 4. Звідси робимо висновок, що W - нульова у.в.ф. Лему 6 доведено.

Лема 7 Нехай μ - стохастична міра, $v: \mathbb{R}^d \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ - така функція, що $v(x, t)$ та $\frac{\partial v(x, t)}{\partial t}$ неперервні та обмежені на $\mathbb{R}^d \times [\alpha, \beta]$. Покладемо при $t \in [\alpha, \beta]$

$$\xi(t) = \int_{\mathbb{R}^d} v(x, t) d\mu(x), \quad \eta(t) = \int_{\alpha}^t \xi(s) ds.$$

Тоді для кожного $t_0 \in [\alpha, \beta]$ існує $\eta'(t_0) = \xi(t_0)$.

Доведення. Якщо виконується припущення леми, то функція

$$h(x, t) = \begin{cases} \frac{v(x, t) - v(x, t_0)}{t - t_0}, & x \in \mathbb{R}^d, \quad t \in [\alpha, \beta] \setminus t_0, \\ \frac{\partial v(x, t_0)}{\partial t}, & x \in \mathbb{R}^d, \quad t = t_0, \end{cases}$$

теж неперервна і обмежена на множині $\mathbb{R}^d \times [\alpha, \beta]$ тією ж сталою $L > 0$, що й функція $\frac{\partial v}{\partial t}$. Тому внаслідок лем 2, 3 при $\Delta t \neq 0$, $t_0 + \Delta t \in [\alpha, \beta]$

$$\left\| \frac{\eta(t_0 + \Delta t) - \eta(t_0)}{\Delta t} - \xi(t_0) \right\| =$$

$$\left\| \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \frac{t - t_0}{\Delta t} \cdot \frac{\xi(t) - \xi(t_0)}{t - t_0} dt \right\| \leq$$

$$16 \sup_A \left\| \int_A \frac{\xi(t) - \xi(t_0)}{t - t_0} dt \right\| =$$

$$16 \sup_A \left\| \int_{\mathbb{R}^d} d\mu(x) \int_A h(x, t) dt \right\|.$$

Тут супремум розглядається по всіх вимірних за Жорданом множинах $A \subset [t_0 - |\Delta t|; t_0 + |\Delta t|] \cap [\alpha, \beta]$. При цьому $\left| \int_A h(x, t) dt \right| \leq 2L|\Delta t|$, а отже, з урахуванням леми 2 і співвідношення (1),

$$\left\| \frac{\eta(t_0 + \Delta t) - \eta(t_0)}{\Delta t} - \xi(t_0) \right\| \leq$$

$$16^2 \sup_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} \|2L|\Delta t|\mu(B)\| \rightarrow 0, \quad \Delta t \rightarrow 0.$$

Лему 7 доведено.

Лема 8 Нехай μ - стохастична міра, $v: \mathbb{R}^d \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ - така функція, що для довільного $T > 0$ функції $v(x, t)$ та $\frac{\partial v(x, t)}{\partial t}$ неперервні та обмежені на $\mathbb{R}^d \times [0, T]$, а також для процесу $\xi(t) = \int_{\mathbb{R}^d} v(x, t) d\mu(x)$, $t \geq 0$, виконується рівність $\int_0^\infty \xi(t)\psi(t)dt = 0$ для кожного $\psi \in D(\mathbb{R})$. Тоді $\xi(t) \equiv 0$, $t \geq 0$.

Доведення. Зафіксуємо $\tau > 0$ і таку послідовність $\{\psi_n, n \geq 1\} \subset D(\mathbb{R})$, що:

- 1) $\forall n \geq 1 : \text{supp } \psi_n \subset [0, \tau]$;
- 2) $\forall n \geq 1 \forall t \in \mathbb{R} : 0 \leq \psi_n(t) \leq 1$;
- 3) $\{\psi_n, n \geq 1\}$ поточково на \mathbb{R} збігається до індикатора $\chi_{[0, \tau]}$ множини $[0, \tau]$.

Тоді з урахуванням аналога теореми Лебега про мажоровану збіжність дістанемо:

$$0 = \int_0^\infty \xi(t) \psi_n(t) dt =$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mu(x) \int_0^\tau v(x, t) \psi_n(t) dt \rightarrow$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mu(x) \int_0^\tau v(x, t) dt = \int_0^\tau \xi(t) dt, n \rightarrow \infty.$$

Отже, для процесу $\eta(t) = \int_0^t \xi(s) ds, t \geq 0$, виконуються рівності $\eta(t) = 0, t \geq 0$, звідки внаслідок леми 7 $\xi(t) = \eta'(t) = 0, t \geq 0$. Лему 8 доведено.

Для доведення теореми 1 залишилось зауважити, що твердження цієї теореми виконується внаслідок лем 5 – 8.

Список використаних джерел

1. Радченко В. Н. Уравнение теплопроводности и волновое уравнение с общими случайными мерами // Укр. мат. журнал. - 2008. - 60, N 12. - С. 1675-1685.
2. Радченко В., Городня Д. Існування розв'язків задач Коші для хвильових рівнянь із стохастичними мірами // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. - 2011. - 25. - С. 29-32.
3. Радченко В. Н. Интегралы по общим случайным мерам // Труды института математики НАН Украины, 1999. - 196 с.
4. Никольский С. Н. Курс математического анализа. - М.: Физматлит, 2001. - 592 с.
5. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1981. - 512 с.

Надійшла до редколегії 15.08.2011

УДК 519.21

В. Й. Дзямко, канд. фіз.-мат. наук, доц.
А. І. Моца, канд. фіз.-мат. наук, доц.
А. О. Пашко, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Точність в $L_p(S_d)$ та надійність модельовання лінійних ізотропних полів на сфері

Побудовано моделі лінійних ізотропних полів з простору Орліча $L_u(\Omega)$. Ці моделі наближають ізотропні поля із заданою точністю та надійністю в нормах простору $L_p(S_d)$.

Ключові слова: ізотропні випадкові поля, простір Орліча, точність, надійність.

E-mail: yura-mlavec@ukr.net

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Козаченко Ю.В.

Вступ

В роботі будуються моделі лінійних ізотропних полів на сфері, що наближають ці поля із заданою точністю та надійністю в просторі $L_p(S_d)$. Розглядаються поля, що належать просторам Орліча випадкових величин, зокрема просторам $L_p(\Omega)$. Робота продовжує дослідження, започатковані в роботі [1], де розглядалися гауссові поля і в роботі [2], де результати роботи [1] застосовувалися до субгауссових полів. Відзначимо, що в цій роботі використовуються методи відмінні від методів робіт [1] та [2]. Тут істотно використані методи роботи [3]. Зауважимо, також, що вперше загальні розклади ізотропних полів на сфері отримав М. Й. Ядренко (див., наприклад, книгу [4]). Різні методи модельовання випадкових полів розглянуто в книгах [5], [6].

1 Моделі ізотропних полів з просторів Орліча

Означення 1. [4] Випадкове поле на сфері S_d

$$\xi(x) = \xi(\theta_1, \dots, \theta_{d-2}, \varphi)$$

називається ізотропним в широкому розумінні, якщо $E\xi(x) = \text{const}$ (вважатимемо, що $E\xi(x) = 0$) та

$$E\xi(x_1) \cdot \xi(x_2) = B(\cos \theta). \quad (1)$$

V. Yo. Dzjamko, Ph.D.

A. I. Moza, Ph.D.

A. O. Pashko, Ph.D.

The accuracy in $L_p(S_d)$ and the reliability of linear isotropic fields simulation on the sphere

The models of linear isotropic fields of Orlicz $L_u(\Omega)$ space were constructed. These models approximate isotropic fields with a given accuracy and reliability in the norms of $L_p(S_d)$ space.

Key Words: isotropic random field, Orlicz space, accuracy, reliability.

Тобто, $E\xi(x_1) \cdot \xi(x_2)$ залежить лише від кутової відстані $\cos \theta$ між x_1 та x_2 .

Зауваження 1.1. Будемо вважати, що радіус сфери дорівнює одиниці, оскільки величина радіуса не впливає на властивості поля.

Теорема 1. [4] Неперервне в середньому квадратичному ізотропне поле на S_d (тобто поле, для яких функція $B(z)$ з (1) – неперервна) можна зобразити у вигляді

$$\xi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,d)} \xi_m^l \cdot S_m^l(x), \quad (2)$$

де $S_m^l(x)$ – сферичні гармоніки, а ξ_m^l – послідовність випадкових величин таких, що $E\xi_m^l = 0$, $E\xi_m^l \cdot \xi_{m'}^{l'} = b_m \delta_m^{m'} \cdot \delta_l^{l'}$ ($m = 0, 1, \dots; l = 1, \dots, h(m, d)$), δ_m^k – символ Кронекера. Ряд (2) збігається в середньому квадратичному.

Зауваження 1.2. [4] При фіксованому m число сферичних гармонік S_m^l дорівнює

$$h(m, d) = (2m + d) \cdot \frac{(m + d - 1)!}{m! \cdot d!}$$

та ряд $\sum_{m=1}^{\infty} b_m \cdot h(m, d)$ збігається.

Означення 2. Ізотропне в широкому розумінні поле називатимемо лінійним ізотропним полем, якщо випадкові величини ξ_m^l незалежні. Надалі це поле будемо називати IL -полем.

Означення 3. [7] Функція $u = \{u(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається C -функцією Орліча, якщо вона неперервна, парна, опукла, $u(0) = 0$ та $u(x) > 0$, коли $x \neq 0$.

Нехай (Ω, L, P) – стандартний імовірнісний простір.

Означення 4. [7] Нехай $u(x)$ – деяка C -функція. Простором Орліча випадкових величин $L_u(\Omega)$ називається сім'я випадкових величин, для кожної з яких існує стала $\gamma_\xi > 0$, така що $Eu\left(\frac{\xi}{\gamma_\xi}\right) < \infty$.

Простір $L_u(\Omega)$ – це простір Банаха відносно норми

$$\|\xi\|_u = \inf \left\{ \gamma > 0 : Eu\left(\frac{\xi}{\gamma}\right) \leq 1 \right\}.$$

Зауважимо, що $Eu\left(\frac{\xi}{\|\xi\|_u}\right) \leq 1$.

Лема 1. [7] Нехай $\xi \in L_u(\Omega)$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ справедлива нерівність

$$P\{|\xi| \geq \varepsilon\} \leq \left(u\left(\frac{\xi}{\|\xi\|_u}\right)\right)^{-1},$$

де $\|\xi\|_u > 0$.

Властивості просторів Орліча випадкових величин можна знайти в монографії [7].

Означення 5. [3], [8] Скажемо, що простір Орліча $L_u(\Omega)$ має властивість H , якщо для будь-якої сім'ї незалежних центрованих випадкових величин $\{\xi_i, i = \overline{1, n}\}$, $\xi_i \in L_u(\Omega)$ існує абсолютна константа C_u , така, що виконується

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_u^2 \leq C_u \cdot \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_u^2. \quad (3)$$

Приклади просторів, що мають властивість H , можна знайти в роботах [3], [8]. Зокрема, властивість H мають простори $L_p(\Omega)$, $p \geq 2$ $\left(u(x) = |x|^p, C_u = 2\sqrt{2} \left(\Gamma\left(\frac{p+1}{2\sqrt{2}}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\right)$, (див. [9]).

Означення 6. Лінійне ізотропне поле називатимемо строго Орлічевим в просторі $L_u(\Omega)$, якщо простір $L_u(\Omega)$ має властивість H , а величини $|\xi_m^l|$ належать простору $L_u(\Omega)$, причому існує абсолютна константа $C > 0$, така, що при всіх $m \geq 1$ має місце нерівність

$$\|\xi_m^l\|_u^2 \leq CE \left(\xi_m^l\right)^2 = Cb_m, \quad (4)$$

де b_m визначається в теоремі 1.

Зауважимо, що (4) виконується за умови

$$\sup_{m \geq 0} \frac{\|\xi_m^l\|_{u_p}^2}{E|\xi_m^l|^2} < \infty$$

(тоді C дорівнює цьому супремуму). Зокрема, (4) має місце, коли ξ_m^l – однаково розподілені невідроджені випадкові величини з $L_u(\Omega)$.

Означення 7. Випадкове поле

$$\xi_N(x) = \sum_{m=0}^N \sum_{l=1}^{h(m,d)} \xi_m^l \cdot S_m^l(x), N = 1, 2, \dots$$

називаємо моделлю IL -поля $\xi(x)$.

Означення 8. Модель $\xi_N(x)$ наближає $\xi(x)$ із заданою надійністю ε : $0 < \varepsilon < 1$ та точністю $\delta > 0$ в просторі $L_p(S_d)$, $p \geq 2$, якщо виконується нерівність

$$P \left\{ \left(\int_{S_p} |\xi(x) - \xi_N(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq \delta \right\} \leq \varepsilon.$$

Наступна теорема доведена в роботі [3]. Ми тут виправляємо технічні описки, що мають місце в сформульованій теоремі цієї роботи.

Теорема 2. Нехай (T, V, μ) – вимірний простір з мірою, $u(x)$ – деяка функція, $u_p(x) = u(x^p)$, $p \geq 2$, ξ_k ($k = \overline{1, \infty}$) – незалежні центровані випадкові величини, такі, що $|\xi_k|^p \in L_{u_p}(\Omega)$, де простір $L_{u_p}(\Omega)$ має властивість H з константою C_{u_p} . Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\xi_k\|_{u_p}^2 \cdot \left(\int_T |f_k(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{2}{p}} \quad (5)$$

збіжний, то ряд $X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \cdot f_k(t)$, $t \in T$ збігається за ймовірністю в просторі $L_p(T)$. При цьому для будь-якого $\delta > 0$ і довільному $m \in \mathbb{N}$ справеджується нерівність

$$P \left\{ \left(\int_T \left| \sum_{k=m}^{\infty} \xi_k f_k(t) \right|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} \geq \delta \right\} \leq \left(u \left(\frac{\delta^p}{\left(C_{u_p} \cdot \sum_{k=m}^{\infty} \|\xi_k\|_{u_p}^2 \cdot \left(\int_T |f_k(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{2}{p}} \right)^{\frac{1}{2}}} \right) \right)^{-1}.$$

Теорема 3. Нехай $\xi(x)$ – строго Орлічеве ІЛ-поле з простору $L_{up}(\Omega)$, $\xi_N(x)$ – модель цього поля. Якщо при деякому $p > 2$ збіжний ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} h(m, d) b_m \cdot m^{(d-1)(2-\frac{2}{p})},$$

то при будь-якому $\delta > 0$ справджується нерівність

$$P \left\{ \left(\int_{S_d} |\xi(x) - \xi_N(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq \delta \right\} \leq \left(u \left(\frac{\delta^p}{C_{up} \cdot C \cdot (3^{d-1})^2 \sum_{m=N+1}^{\infty} h(m, d) b_m \cdot m^{(d-1)(2-\frac{2}{p})}} \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{-1}.$$

Для доведення цієї нерівності використаємо таку лему.

Лема 2. (Нерівність Нікольського [10]) Нехай $T(\vec{u})$, $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $0 \leq u_i \leq 2\pi$, $i = \overline{1, n}$ – тригонометричний поліном від n змінних порядку $\vec{v} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$. Тоді при $p > r > 1$ є справедливою нерівність

$$\|T\|_p \leq 3^d \cdot \left(\prod_{i=1}^d \nu_i \right)^{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)} \cdot \|T^1\|_r.$$

Доведення теореми. З означення 6 та теореми 2 випливає, що для будь-якого $\delta > 0$ має місце нерівність

$$P \left\{ \left(\int_{S_d} |\xi(x) - \xi_N(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq \delta \right\} = \quad (6)$$

$$= P \left\{ \left(\int_T \left| \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{l=1}^h \xi_m^l \cdot S_m^l(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq \delta \right\} \leq$$

$$\leq \left(u \left(\frac{\delta^p}{C_{up} \cdot \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{l=1}^h \|\xi_m^l\|_{up}^2 \cdot \left(\int_T |S_m^l(x)|^p dx \right)^{\frac{2}{p}}} \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{-1}.$$

Оскільки $S_m^l(x)$ – це тригонометричний поліном $(d-1)$ -змінної порядку $\vec{v}' = (m, m, m, \dots, m)$, то для $p > 2$ справджується нерівність

$$\|S_m^l\|_p \leq 3^{d-1} \cdot m^{(d-1) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)} \cdot \|S_m^l\|_2,$$

а $\|S_m^l(x)\|_2 = 1$. Отже, при $p \geq 2$ маємо

$$\left(\int_T |S_m^l(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq 3^{d-1} \cdot m^{(d-1) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)},$$

$$\|\xi_m^l\|_{up}^2 \leq C \cdot b_m.$$

Тому виконується нерівність

$$C_{up} \cdot \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{l=1}^h \|\xi_m^l\|_{up}^2 \cdot \left(\int_T |S_m^l(x)|^p dx \right)^{\frac{2}{p}} \leq (7)$$

$$\leq C_{up} \cdot C \cdot (3^{d-1})^2 \cdot \sum_{m=N+1}^{\infty} h(m, d) b_m \cdot m^{(d-1) \cdot \left(2 - \frac{2}{p}\right)}.$$

З нерівності (7) та нерівності (6) випливає справедливість теореми 3.

Зауважимо, що при $p = 2$ отримуємо таке твердження.

Теорема 4. Нехай $\xi(x)$ – строго Орлічеве ІЛ-поле з простору $L_{u2}(\Omega)$, $\xi_N(x)$ – модель цього поля. Якщо ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} h(m, d) b_m \cdot m^{d-1}$$

збіжний, то при будь-якому $\delta > 0$ є справедливою нерівність

$$P \left\{ \left(\int_{S_d} |\xi(x) - \xi_N(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \geq \delta \right\} \leq \left(u \left(\frac{\delta^2}{C_{u2} \cdot C \cdot \sum_{m=N+1}^{\infty} h(m, d) b_m \cdot m^{d-1}} \right) \right)^{-1}. \quad (8)$$

З теорем 3 і 4 випливають такі теореми.

Теорема 5. Нехай $\xi(x)$ – строго Орлічеве ІЛ-поле з простору $L_{up}(\Omega)$, $p > 2$. При виконанні умов теореми 3 і нерівності

$$\sum_{m=N+1}^{\infty} h(m, d) \cdot b_m \cdot m^{(d-1) \cdot \left(2 - \frac{2}{p}\right)} \leq$$

$$\leq \frac{\delta^p}{\left(u^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^{\frac{2}{p}} \cdot C_{u_p} \cdot C(3^{d-1})^2} \quad (9)$$

модель $\xi_N(x)$ наближає це поле $\xi(x)$ з надійністю $\varepsilon > 0$ і точністю $\delta > 0$ в просторі $L_p(S_d)$.

Теорема 6. Якщо виконуються умови теореми 4 і справджується нерівність

$$\sum_{m=N+1}^{\infty} h(m, d) \cdot b_m \cdot m^{d-1} \leq \frac{\delta^2}{u^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \cdot C_{u_2} \cdot C}, \quad (10)$$

тоді модель $\xi_N(x)$ наближає строго Орлічеве IR -поле $\xi(x)$ з простору $L_{u_p}(\Omega)$ з надійністю $\varepsilon > 0$ і точністю $\delta > 0$ в просторі $L_2(S_d)$.

Приклад 1. Нехай $u(x) = |x|^q$, $q \geq 1$. Тоді $u_p(x) = |x|^{pq}$ і нерівність (9) має вигляд

$$\sum_{m=N+1}^{\infty} h(m, d) b_m \cdot m^{(d-1) \left(2 - \frac{2}{p}\right)} \leq \frac{\delta^p \varepsilon^{\frac{2}{qp}}}{C_{u_p} \cdot C(3^{d-1})^2},$$

де

$$C_{u_p} = 2\sqrt{2} \cdot \left(\Gamma \left(\frac{pq+1}{2\sqrt{\pi}} \right) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

При $p = 2$ нерівність (10) прийме вигляд

$$\sum_{m=N+1}^{\infty} h(m, d) b_m \cdot m^{(d-1)} \leq \frac{\delta^2 \varepsilon^{\frac{1}{q}}}{C_{u_2} \cdot C},$$

де

$$C_{u_2} = 2\sqrt{2} \cdot \left(\Gamma \left(\frac{2q+1}{2\sqrt{\pi}} \right) \right)^{\frac{1}{2q}}.$$

Висновки

В роботі побудовані моделі лінійних ізотропних полів з простору Орліча $L_u(\Omega)$, які наближають ці поля із заданою точністю та надійністю в нормах простору $L_p(S_d)$.

Список використаних джерел

1. Kozachenko Ju. V., Kozachenko L. F. Modeling Gaussian Isotropic Random Fields on a Sphere // Journal of Mathematical Sciences, – 2001, – Vol. 107, No. 2, – pp. 3751–3757.

2. Козаченко Ю. В., Пашко А. О. Оцінки точності моделювання в L_p , $p \geq 2$ субгауссових випадкових полів на сфері // Вісник Київського національного ун-ту імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка, – 2002, – вип. 7, – с. 26–32.
3. Дзямко В. Й., Козаченко Ю. В., Моца А. І. Про побудову моделей випадкових процесів з просторів Орліча // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика, – 2010, – №. 1–2, – с. 125–134.
4. Ядренко М. Й. Спектральная теория случайных полей. – Київ: "Наукова думка" – 1980, – 196 с.
5. Козаченко Ю. В., Пашко А. О. Моделювання випадкових процесів. – Київ: ВІД "Київський університет" – 1999, – 223 с.
6. Козаченко Ю. В., Пашко А. О., Розора А. О. Моделювання випадкових процесів та полів. – Київ: ВПЦ "Задруга" – 2007, – 230 с.
7. Buldygin V. V., Kozachenko Ju. V. Metric characterization of random variables and random processes // American Mathematical Society. – Providence RI, – 2000.
8. Kozachenko Ju. V., Mlavets Ju. Ju. Probability of large deviations of sums of random processes from Orlicz space // Monte Carlo Methods Appl., – 2011, – Vol. 17, – pp. 155–168.
9. Мацак И. К., Пличко А. Н. Некоторые неравенства для сумм независимых случайных величин в банаховых пространствах // Теория вероятностей и математ. статист. – 1988, – вып. 38, – с. 201–221.
10. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: "Наука" – 1977.

Надійшла до редколегії 15.10.2011

УДК 512.552

Ірина В. Дудченко, кандидат фізико-
математичних наук**Алгебри Фуджити**

Розглянуто сильнозв'язні сагайдаки з числом вершин $p = 2, 3$ та їх алгебри Фуджити. Встановлено, які з перелічених алгебр є фробеніусовими.

Ключові слова: сильнозв'язний сагайдак, алгебра Фуджити, фробеніусова алгебра.

E-mail: dudchira@meta.ua

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, професор Кириченко В.В.

1. Вступ

В останні роки японський математик Фуджита ввів до розгляду A -повні матричні алгебри. Ці алгебри грають важливу роль в дослідженні різних класів кілець, зокрема черепичних порядків [4, гл.14]. Зокрема в статті [5] вивчаються фробеніусові A -повні матричні алгебри.

В цій статті подається перелік всіх сильнозв'язних сагайдаків без кратних дуг та петель з числом вершин $p = 2, 3$. Кожному такому сагайдаку відповідає одна алгебра Фуджити.

Для будь-якого сильнозв'язного простого сагайдака без петель Q існує алгебра Фуджити A , така що $Q[A] = Q$ і R – радикал Джекобсона.

2. Сильнозв'язні сагайдаки з числом вершин $p = 2, 3$ та їх алгебри Фуджити

Означення 1. Будемо казати, що артінове кільце A дозволяє підстановку Накаями $v(A): i \mapsto v(i)$ множини $\{1, \dots, s\}$, якщо виконуються наступні умови:

$$(1) \text{soc} P_k = \text{top } P_{v(k)},$$

$$(2) \text{soc } Q_{v(k)} = \text{top } Q_k.$$

Означення 2. Артінове кільце A називається квазіфробеніусовим, якщо A дозволяє підстановку Накаями $v(A)$ множини $\{1, 2, \dots, s\}$.

Квазіфробеніусове кільце A називається фробеніусовим, якщо $p_{v(i)} = p_i$ для всіх $i = 1, \dots, s$.

Зрозуміло, що підстановка v визначена з точністю до спряженості в симетричній групі на s літерах. Ці спряження відповідають перенумераціям головних модулів P_1, \dots, P_s .

Irina V. Dudchenko, Ph.D.

Fujita's algebra

The strongly connected quivers with $p = 2, 3$ and their Fujita's algebra are considered. For this Fujita's algebra to established the Frobenius algebras.

Key Words: strongly connected quiver, Fujita's algebra, Frobenius algebra.

Нагадаємо, що сагайдак, що має більш однієї вершини, називається сильнозв'язним, якщо існує орієнтований шлях з довільної його вершини в іншу, яка може співпадати з початковою.

Перебираємо всі сагайдаки з перелічених в [6], що задовольняють нашим умовам.

2.1.

$$1 \bullet \longleftrightarrow \bullet 2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & 0 \end{vmatrix}; \quad R^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отже маємо, що $\text{soc } P_1 = U_2$, $\text{soc } P_2 = U_1$. Ця алгебра Фуджити є фробеніусовою.

3.1.

$$\begin{array}{ccc} & 2 & \\ & \bullet & \\ 1 & \nearrow & \searrow \bullet 3 \\ \bullet & & \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{vmatrix}$$

або

$$R = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{12}\sigma_{23} \\ \sigma_{23}\sigma_{31} & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{31}\sigma_{12} & 0 \end{vmatrix};$$

тоді

$$R^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sigma_{12}\sigma_{23} \\ \sigma_{23}\sigma_{31} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{31}\sigma_{12} & 0 \end{vmatrix};$$

$$R^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отже маємо, що $\text{soc } P_1 = U_3$, $\text{soc } P_2 = U_1$,
 $\text{soc } P_3 = U_2$. Ця алгебра Фуджити є фробеніусовою.

3.2.



$$R = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{vmatrix}$$

або

$$R = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{12}\sigma_{23} \\ \sigma_{21} & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{32}\sigma_{21} & \sigma_{32} & 0 \end{vmatrix};$$

тоді

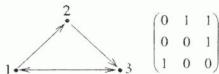
$$R^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sigma_{12}\sigma_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{32}\sigma_{21} & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$R^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отже маємо, що $\text{soc } P_1 = U_3$, $\text{soc } P_2 = U_1 \oplus U_3$,
 $\text{soc } P_3 = U_1$. Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

вою.

3.3.



$$R = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{vmatrix}$$

або

$$R = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{23}\sigma_{31} & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{31}\sigma_{12} & 0 \end{vmatrix};$$

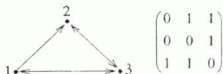
тоді

$$R^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{23}\sigma_{31} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{31}\sigma_{12} & 0 \end{vmatrix};$$

$$R^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отже маємо, що $\text{soc } P_1 = U_2 \oplus U_3$, $\text{soc } P_2 = U_1$,
 $\text{soc } P_3 = U_2$. Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

3.4.



$$R = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{vmatrix}$$

або

$$R = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{23}\sigma_{31} & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{vmatrix};$$

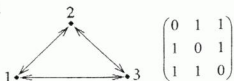
тоді

$$R^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{23} \sigma_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$R^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отже маємо, що $\text{soc } P_1 = U_2 \oplus U_3$, $\text{soc } P_2 = U_1$, $\text{soc } P_3 = U_1 \oplus U_2$. Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

3.5.



$$R = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{vmatrix}$$

або

$$R = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{vmatrix};$$

тоді

$$R^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

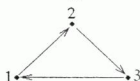
$$R^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отже маємо, що $\text{soc } P_1 = U_2 \oplus U_3$, $\text{soc } P_2 = U_1 \oplus U_3$, $\text{soc } P_3 = U_1 \oplus U_2$. Ця алгебра Фуджити не є фробеніусовою.

Отже, з усього переліку сагайдаків лише для

$$1 \bullet \longleftrightarrow 2$$

та



існує алгебра Фуджити, що є фробеніусовою.

Список використаних джерел

1. H. Fujita and Y. Sakai and D. Simson, Minor degenerations of the full matrix algebra over a field // J.Math. Soc.Japan, 59. – 2007, – С. 1–33;
2. H. Fujita and Y. Sakai and D. Simson, On Frobenius full matrix algebras with rtructure systems // Algebra and discrete mathematics. – №1. – 2007, – С. 13-28;
3. H. Fujita and Y. Sakai, Frobenius full matrix algebras and Gorenstein tiled orders, // Comm.Algebra, 34. – 2006, – С. 1181-12034;
4. M.Hazewinkel, N. Gubareni and V.V. Kirichenko, Algebras, Rings and modules // Kluwer Academic Publishers, 2004, 380 p;
5. H. Fujita and Y. Sakai, Communications in Algebra v.3, (2006) p. 1181-1203. Frobenius full matrix algebras and Gorenstein tiled orders;
6. И.В Дудченко, Властивості алгебр Фуджити // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. – Серія фіз.-мат. науки. – 2005. – № 6. – С. 126–130.

Надійшла до редколегії 25.10.2010.

УДК 512.53

Є.А. Кочубінська, к. ф.-м. н., асистент

**Цілком ізольовані піднапівгрупи
часткового вінцевого добутку
скінченних симетричних інверсних
напівгруп***У роботі описано всі цілком ізольовані піднапівгрупи часткового вінцевого добутку скінченних симетричних інверсних напівгруп**Ключові слова: напівгрупа перетворень, симетрична інверсна напівгрупа, вінцевий добуток, цілком ізольована піднапівгрупа*

eugenia@univ.kiev.ua

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, професор Кириченко В.В.

Вступ

Одним з аспектів дослідження певної напівгрупи є вивчення будови та властивостей різноманітних типів її піднапівгруп: ізольованих, цілком ізольованих, нільпотентних тощо. У статті вивчаються цілком ізольовані піднапівгрупи вінцевого добутку скінченних симетричних інверсних напівгруп.

Розглянемо множину всіх часткових бієкцій, визначених на множині X . Відносно природної операції композиції ця множина утворює напівгрупу, яка називається *симетричною інверсною напівгрупою* і позначається $IS(X)$. У випадку $X = \{1, 2, \dots, n\}$ напівгрупа $IS(\mathcal{N}_n)$ називається *симетричною інверсною напівгрупою рангу n* , позначається IS_n . Детальний опис властивостей цієї напівгрупи можна знайти в [1].

Вінцеві добутки напівгруп виникли як природне узагальнення аналогічної конструкції для груп. Ми будемо притримуватись термінології і позначень з [2].

Для напівгрупи S визначимо множину S^{PX} наступним чином

$$S^{PX} = \{f : \text{dom}(f) \subseteq X \rightarrow S\}.$$

Для відображень $f, g \in S^{PX}$ добуток fg за-

Е.А. Kochubinska, Ph.D., assistant

**Completely isolated subsemigroups of
partial wreath product of finite
symmetric inverse semigroups***The description of all completely isolated subsemigroups of partial wreath product of finite symmetric inverse semigroups is given**Key Words: transformation semigroup, symmetric inverse semigroup, wreath product, completely isolated subsemigroup.*

дається за правилом:

$$(fg)(x) = f(x)g(x),$$

$$x \in \text{dom}(fg) = \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g).$$

Якщо $a \in IS(X)$, $f \in S^{PX}$, то визначимо f^a як

$$(f^a)(x) = f(x^a),$$

$$x \in \text{dom}(f^a) = \text{dom}(a) \cap \{x : x^a \in \text{dom}(f)\}$$

Частковим вінцевим добутком напівгрупи S з напівгрупою (P, X) часткових перетворень множини X називається множина

$$\{(f, a) \in S^{PX} \times (P, X) \mid \text{dom}(f) = \text{dom}(a)\}$$

разом з операцією множення $(f, a) \cdot (g, b) = (fg^a, ab)$.

Частковий вінцевий добуток напівгрупи S з напівгрупою P позначатимемо $S \wr P$.

Частковий вінцевий добуток інверсних напівгруп є інверсною напівгрупою. Зауважимо, що конструкція вінцевого добутку дозволяє рекурентно визначити вінцевий добуток довільної скінченної кількості напівгруп.

Цілком ізольовані піднапівгрупи

Означення 1. Піднапівгрупа T напівгрупи S називається цілком ізольованою, якщо з того, що $ab \in T$ випливає $a \in T$ або $b \in T$ для всіх $a, b \in T$.

Теорема 1. [1, Твердження 5.3.23] Цілком ізольованими піднапівгрупами напівгрупи IS_n є лише IS_n , S_n , $IS_n \setminus S_n$.

Лема 1. [1, Твердження 5.3.1] Нехай S — напівгрупа. Піднапівгрупа $T \subsetneq S$ — цілком ізольована піднапівгрупа напівгрупи S тоді і лише тоді, коли $\bar{T} = S \setminus T$ — напівгрупа. Причому, якщо T — цілком ізольована, то \bar{T} — теж цілком ізольована.

Лема 2. Нехай S — скінченна напівгрупа, $T \subset S$ — цілком ізольована піднапівгрупа напівгрупи S . Нехай $h \in T$, σ — довільний оборотний елемент напівгрупи S . Тоді $h\sigma \in T$, $\sigma h \in T$.

Доведення. Якщо $\sigma \in T$, то очевидно, що добутки $h\sigma$ та σh належать напівгрупі T . Якщо ж $\sigma \notin T$, то $i \sigma^{-1} \notin T$. Подамо елемент $h \in T$ у вигляді $h = h\sigma\sigma^{-1}$. З цілком ізольованості напівгрупи T та того, що $\sigma^{-1} \notin T$, маємо, що $h\sigma \in T$. Подавши $h \in T$ у вигляді $h = \sigma^{-1}\sigma h$ одержимо, що $\sigma h \in T$. \square

Лема 3. Довільна цілком ізольована піднапівгрупа вінцевого добутку $IS_m \wr IS_n$ є інверсною.

Доведення. Нехай T — цілком ізольована піднапівгрупа напівгрупи $IS_m \wr IS_n$, нехай $\sigma^{-1} = (f_\sigma, a_\sigma) \in T$. Існує елемент $\tau = (f_\tau, a_\tau) \in S^*$, такий, що $a_\tau |_{\text{dom}(a_\sigma)} = a_\sigma$ і $f_\tau(x) = f_{\sigma^{-1}}^\sigma(x)$ для кожного $x \in \text{dom}(a_\sigma)$. Тоді $\sigma^{-1} = \tau\sigma\tau$, тобто згідно з лемою 2 $\sigma^{-1} \in T$. \square

Лема 4. Нехай T — цілком ізольована піднапівгрупа напівгрупи S , K — інверсна піднапівгрупа S , $E(K)$ — множина всіх ідемпотентів напівгрупи K . Тоді $K \subset T$ тоді і лише тоді, коли $E(K) \subset T$.

Доведення. Очевидно, що коли $K \subset T$, то $E(K) \subset T$. Покажемо, що з умови, що всі ідемпотенти піднапівгрупи K містяться в ізольованій піднапівгрупі T , то і вся піднапівгрупа K міститься в T . Нехай $\sigma \in K$. Тоді $e = \sigma\sigma^{-1} \in E(K)$. З цілком ізольованості піднапівгрупи T випливає, що $\sigma \in T$ або $\sigma^{-1} \in T$. За лемою 3 в обох випадках маємо, що $\sigma \in T$. \square

Надалі $S = IS_m \wr IS_n$, S^* — множина всіх оборотних елементів напівгрупи S . Нехай T — це цілком ізольована піднапівгрупа напівгрупи S . Позначимо

$$T_1 = \{a \in IS_n \mid (f, a) \in T\}.$$

Твердження 1. Множина T_1 є цілком ізольованою піднапівгрупою напівгрупи IS_n .

Доведення. Покажемо спочатку, що множина T_1 є піднапівгрупою. Якщо $a, b \in T_1$, то існують $(f, a) \in T$, $(g, b) \in T$. Отже, $(fg^a, ab) \in T$, а тому $ab \in T_1$. Таким чином, T_1 — піднапівгрупа.

Покажемо тепер, що піднапівгрупа T_1 — цілком ізольована. Розглянемо добуток $ab \in T_1$. З означення напівгрупи T_1 випливає, що існує така функція $h \in S^{PX}$, що $(h, a) \in T$. Позначимо через (id, a) елемент (f, a) , для якого $f(x) = id_{V_m}$ для всіх $x \in \text{dom}(a)$. Подамо $(h, a) \in T$ у вигляді добутку $(h, ab) = (id, a)(h, b) \in T$. Оскільки T — цілком ізольована, то $(id, a) \in T$, а тому $a \in T_1$, або $(h, b) \in T$, а тому $b \in T_1$. Таким чином, напівгрупа T_1 є цілком ізольованою. \square

З твердження 1 випливає, що для напівгрупи T_1 є лише три можливості, а саме: S_n , IS_n та $IS_n \setminus S_n$. Дамо тепер перелік всіх цілком ізольованих піднапівгруп напівгрупи $IS_m \wr IS_n$.

Теорема 2. Напівгрупи $IS_m \wr IS_n$, $S_m \wr S_n$, $(IS_n \setminus S_n) \wr S_n$, $IS_m \wr S_n$, $IS_m \wr (IS_n \setminus S_n)$, $(S_m \wr S_n) \cup (IS_m \wr (IS_n \setminus S_n))$ та $(IS_m \wr IS_n) \setminus (S_m \wr S_n)$ є цілком ізольованими піднапівгрупами напівгрупи $IS_m \wr IS_n$. Перелік всіх цілком ізольованих піднапівгруп напівгрупи $IS_m \wr IS_n$ вичерпується цим списком.

Доведення теорему 2 розбіємо на декілька тверджень.

Твердження 2. Напівгрупи $IS_m \wr IS_n$, $S_m \wr S_n$, $(IS_n \setminus S_n) \wr S_n$, $IS_m \wr S_n$, $IS_m \wr (IS_n \setminus S_n)$, $(S_m \wr S_n) \cup (IS_m \wr (IS_n \setminus S_n))$ та $(IS_m \wr IS_n) \setminus (S_m \wr S_n)$ є цілком ізольованими піднапівгрупами напівгрупи $IS_m \wr IS_n$.

Доведення. Добуток оборотних (необоротних) елементів напівгрупи IS_n є, очевидно, оборотним (необоротним) елементом. З правила множення для вінцевого добутку та цього факту випливає, що напівгрупи $IS_m \wr IS_n$, $S_m \wr S_n$, $(IS_n \setminus S_n) \wr S_n$ та $IS_m \wr S_n$ є цілком ізольованими піднапівгрупами напівгрупи $IS_m \wr IS_n$. З леми 1 та того, що $\overline{IS_m \wr S_n} = IS_m \wr (IS_n \setminus S_n)$, $(\overline{IS_m \wr S_n}) \wr S_n = (S_m \wr S_n) \cup (IS_m \wr (IS_n \setminus S_n))$ та $\overline{S_m \wr S_n} = (IS_m \wr IS_n) \setminus (S_m \wr S_n)$ випливає, що $IS_m \wr (IS_n \setminus S_n)$, $(S_m \wr S_n) \cup (IS_m \wr (IS_n \setminus S_n))$ та $(IS_m \wr IS_n) \setminus (S_m \wr S_n)$ теж є цілком ізольованими піднапівгрупами напівгрупи $IS_m \wr IS_n$. \square

Твердження 3. Якщо $T_1 = S_n$, то T — це одна з напівгруп $IS_m \wr_p S_n$, $(IS_m \setminus S_m) \wr_p S_n$, $S_m \wr_p S_n$.

Доведення. Зауважимо, що оскільки $T_1 = S_n$, то цілком ізольована піднапівгрупа $T \subset S$ є насправді піднапівгрупою напівгрупи $IS_m \wr_p S_n$.

Нехай $T \setminus S^* = \emptyset$, тобто напівгрупа T не містить оборотних елементів напівгрупи S . Отже, $T \subset (IS_m \setminus S_m) \wr_p S_n$. З леми 3 випливає, що напівгрупа T містить деякий вироджений ідемпотент e . Оскільки цей ідемпотент є елементом $IS_m \wr_p S_n$, то він має вигляд (f_e, id_{N_n}) .

Розглянемо добуток $P(e) = \prod_{\varphi \in S^*} \varphi e \varphi^{-1}$. З леми 2 випливає, що цей добуток належить напівгрупі T . Оскільки ідемпотент e — вироджений, а добуток береться по всіх $\varphi \in S^*$, то одержимо, що $P(e) = (f, \text{id}_{N_n})$, де $f(x) = \emptyset$ для всіх $x \in N_n$, і цей елемент належить напівгрупі T .

Візьмемо деякий інший вироджений ідемпотент $e' \in (IS_m \setminus S_m) \wr_p S_n$. Розглянемо добуток $P(e') = \prod_{\varphi \in S^*} \varphi e' \varphi^{-1}$. З тих самих міркувань, що і раніше, одержимо $P(e') = (f', \text{id}_{N_n})$, $f'(x) = \emptyset$ для всіх $x \in N_n$, а тому $P(e') = P(e) \in T$. З цілком ізольованості напівгрупи T випливає, що один зі співмножників добутку $P(e')$ належить T . Але всі добутки вигляду $\varphi e' \varphi^{-1}$ спряжені між собою і є ідемпотентами, а за лемою 2 всі вони належать T . Отже, якщо один зі співмножників належить T , то і всі належать T . Таким чином, довільний ідемпотент напівгрупи $(IS_m \setminus S_m) \wr_p S_n$ належить T . З леми 4 випливає, що $T = (IS_m \setminus S_m) \wr_p S_n$.

Якщо ж $T \cap S^* \neq \emptyset$, то $T \supset S^*$, бо з леми 2 випливає, що коли цілком ізольована піднапівгрупа містить хоча б один невірджений елемент, то вона містить всі невірджени елементи.

Таким чином, цілком ізольовані піднапівгрупи напівгрупи $IS_m \wr_p S_n$ — це лише напівгрупи $IS_m \wr_p S_n$, $(IS_m \setminus S_m) \wr_p S_n$ та $S_m \wr_p S_n$. \square

Позначимо через $0 = (f, a) \in IS_m \wr_p IS_n$ такий елемент, для якого $\text{dom}(a) = \emptyset$.

Твердження 4. Якщо $T_1 \neq S_n$, то T — це одна з напівгруп $IS_m \wr_p IS_n$, $IS_m \wr_p (IS_n \setminus S_n)$, $(S_m \wr_p S_n) \cup (IS_m \wr_p (IS_n \setminus S_n))$, $(IS_m \wr_p IS_n) \setminus (S_m \wr_p S_n)$.

Доведення. Оскільки $T_1 \neq S_n$, то це означає, що цілком ізольована піднапівгрупа T містить принаймні один необоротний елемент, а тому, враховуючи лему 2, містить необоротний ідемпотент e . Розглянемо добуток $P(e) = \prod_{\varphi \in S^*} \varphi e \varphi^{-1}$. Областю визначення ідемпотента $P(e)$ буде \emptyset , отже, $P(e) = 0$. За лемою 2 $P(e) = 0 \in T$. Візьмемо будь-який інший необоротний ідемпотент e' , для нього теж вірно, що $P(e') = 0 \in T$. Оскільки T — цілком ізольована піднапівгрупа, то один з добутків $\varphi e \varphi^{-1}$ належить T , але тоді всі добутки вигляду $\varphi e \varphi^{-1}$ належать T (лема 2). Отже, $e' \in T$. Таким чином, ідемпотенти вигляду (f, e) , де e — вироджений ідемпотент, належать T , а, отже, і все елементи напівгрупи $IS_m \wr_p IS_n$ з виродженою другою компонентою належать T .

За лемою 1, якщо T — цілком ізольована піднапівгрупа напівгрупи S , то \bar{T} — теж цілком ізольована піднапівгрупа S . Розглянемо доповнення \bar{T} до цілком ізольованої напівгрупи T .

Якщо $\bar{T} = \emptyset$, то $T = S$.

Нехай $\bar{T} \neq \emptyset$. Оскільки T належать всі елементи вигляду (f, a) , де $a \in IS_n \setminus S_n$, то до \bar{T} належать всі елементи вигляду (g, b) , де $b \in S_n$. Таким чином, для напівгрупи \bar{T} маємо $T_1 = \{a \in IS_n \mid (f, a) \in \bar{T}\} = S_n$.

Отже, можемо тепер застосувати твердження 3 для опису піднапівгрупи \bar{T} . Для неї можливі лише такі варіанти: $IS_m \wr_p S_n$, $(IS_m \setminus S_m) \wr_p S_n$ та $S_m \wr_p S_n$. Повертаючись до T , маємо наступні напівгрупи: $IS_m \wr_p (IS_n \setminus S_n)$, $(S_m \wr_p S_n) \cup (IS_m \wr_p (IS_n \setminus S_n))$ та $(IS_m \wr_p IS_n) \setminus (S_m \wr_p S_n)$. \square

Теорема 2 випливає з тверджень 2, 3 та 4.

Список використаних джерел

1. Ganyushkin O., Mazorchuk V. Classical Finitized Transformation Semigroup. An Introduction. Series: Algebra and Applications. Vol. 9. Springer, 2009.
2. J. P. D. Meldrum, Wreath products of groups and semigroups. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol. 74. Harlow, Essex: Longman Group Ltd., 1995.

Надійшла до редколегії 27.05.2011

УДК 517.5

Курченко О.О., д.ф.-м.н., професор

Аналог сталої Ойлера для монотонної, збіжної до нуля функції

Для спадної неперервної на проміжку $[1, +\infty)$ дійсної функції f , збіжної до нуля при $x \rightarrow +\infty$, методом зустрічних послідовностей встановлена збіжність послідовності $\left(f(1) + f(2) + \dots + f(n) - \int_1^n f(u) du\right)$ та оцінена швидкість збіжності.

Ключові слова: збіжність, стала Ойлера.

E-mail: olkurchenko@ukr.net

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Козаченко Ю.В.

Вступ

Стала Ойлера

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$$

зустрічається в багатьох формулах математичного аналізу та його застосувань і належить до визначених математичних сталих. У доведенні інтегральної ознаки Маклорена-Коші збіжності ряду [3, п. 373] відмічається збіжність неспадної послідовності

$$b_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) - \int_1^n f(u) du, \quad (1)$$

де $f(x)$, $x \geq 1$ – неперервна і незростаюча на проміжку $[1, +\infty)$ збіжна до нуля при $x \rightarrow +\infty$ дійсна функція.

Наведемо формулювання задачі II.2.25 збірника задач з математичного аналізу [2], в якій пропонується спосіб у межах теорії границь доведення збіжності послідовності

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right).$$

“Нехай для $n \geq 1$: $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$,

$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Доведіть, що: 1) $\forall n \geq 1: a_n < b_n$; 2) $\forall n \geq 1$:

O.O. Kurchenko, D.Sci. (Phys.-Math.), Full Professor

Analogy of Euler constant for a monotone convergent to zero function

The convergence of the sequence $\left(f(1) + f(2) + \dots + f(n) - \int_1^n f(u) du \right)$ for the decreasing continuous in the interval $[1, +\infty)$ real function f , convergent to zero as $x \rightarrow +\infty$, by means of the opposite sequences method is proved and the speed of convergence is evaluated.

Key Words: convergence, Euler constant.

$a_{n+1} > a_n$; 3) $\forall n \geq 1: b_{n+1} < b_n$; 4) послідовності (a_n) , (b_n) збігаються до одного числа γ – сталої Ойлера ($\gamma = 0,577215664\dots$); 5) $\forall n \geq 2: 0 < a_n < 1$ ”.

Такий прийом доведення збіжності слушно назвати методом зустрічних послідовностей. У підручнику з математичного аналізу [1] цей спосіб застосовується для доведення збіжності варіанти

анти $\left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)$ до числа Ойлера $e = 2,718281828459045\dots$

У цій статті доведена збіжність варіанти (1) способом зустрічних послідовностей до сталої, що залежить від функції f , та оцінена швидкість збіжності.

Основна частина

У наступній теоремі встановлюється збіжність послідовності (1).

Теорема 1. Нехай $f(x)$, $x \geq 1$ неперервна і незростаюча на промені $[1, +\infty)$ дійсна функція, що прямує до нуля при $x \rightarrow +\infty$. Тоді послідовність (1) збіжна.

Границю цієї послідовності позначимо через $\gamma(f)$.

Доведення. Нехай $F(x) = \int_1^x f(u) du$, $x \geq 1$ – первісна функції f на промені $[1, +\infty)$. Розглянемо дві послідовності:

$$a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) - F(n+1) \text{ і}$$

$$b_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) - F(n), n \geq 1.$$

Зазначимо, що для довільного натурального числа n справджується нерівність $a_n \leq b_n$. При цьому послідовність (a_n) неспадна, а послідовність (b_n) незростаюча. Дійсно, для довільного $n \geq 1$ маємо:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= f(n+1) + F(n+1) - F(n+2) = \\ &= \int_{n+1}^{n+2} (f(n+1) - f(u)) du \geq 0, \end{aligned} \text{ звідки випли-$$

ває, що послідовність (a_n) неспадна. Далі,

$$b_n - b_{n+1} = F(n+1) - F(n) - f(n+1) =$$

$$= \int_n^{n+1} (f(u) - f(n+1)) du \geq 0,$$

тобто послідовність (b_n) незростаюча. Таким чином, для довільного натурального числа n справджується ланцюжок нерівностей

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_2 \leq b_1.$$

Послідовність (a_n) неспадна і обмежена зверху числом b_1 . Внаслідок теореми про збіжність монотонної обмеженої послідовності, варіанта (a_n) збіжна. Границю цієї послідовності позначимо символом $\gamma(f)$. Оскільки

$$0 \leq b_n - a_n = F(n+1) - F(n) =$$

$$= \int_n^{n+1} f(u) du \leq f(n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

то $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \gamma(f)$. Теорему доведено.

Зауважимо, що з доведення теореми випливає така оцінка швидкості збіжності послідовностей (a_n) , (b_n) до сталої $\gamma(f)$:

$$0 \leq b_n - \gamma(f) \leq b_n - a_n = \int_n^{n+1} f(u) du \leq f(n) \text{ і,}$$

аналогічно,

$$0 \leq \gamma(f) - a_n \leq b_n - a_n \leq f(n), n \geq 1.$$

Приклад 1. Функція $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \geq 1$ задовольняє умови теореми, а стала $\gamma(f) = \gamma$ є сталою Ойлера.

Приклад 2. Нехай $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $x \geq 1$, де параметр $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$. Внаслідок теореми 1, послідовність

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} - \int_1^n u^{-\alpha} du = \\ &= 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} - \frac{n^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + \frac{1}{-\alpha+1}, \end{aligned}$$

$n \geq 1$ збіжна. Границю цієї послідовності позначимо через $c(\alpha)$.

Наприклад, для $\alpha = \frac{3}{2}$ при $n = 16000$ обчислення дають $c\left(\frac{3}{2}\right) = 0,612323$. При цьому абсолютна похибка не перевищує $5 \cdot 10^{-7}$.

Цікаво дослідити функцію $c(\alpha)$, $\alpha > 0$.

Для розкриття невизначеності нескінченності на нескінченність при знаходженні границь послідовностей у ряді випадків ефективно застосовується теорема Штольца. Виявляється, цей прийом можна також застосовувати для розкриття невизначеності нуль на нуль. Відповідне твердження сформульоване у задачі II.1.51 [2]. У наступна лема являє собою аналог теореми Штольца для розкриття невизначеності нуль на нуль.

Лема 1 (розкриття невизначеності 0/0).

Нехай послідовності (a_n) , (b_n) збіжні до нуля, причому послідовність (b_n) спадна та існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = p \in R \cup \{-\infty, +\infty\}. \quad (2)$$

Тоді існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = p$.

Доведення. Розглянемо випадок $p \in R$. Випадки $p = -\infty$ та $p = +\infty$ розглядаються аналогічно. Із умови (2) випливає, що для довільного додатного ε існує таке натуральне число n_0 , що

для всіх натуральних $k \geq n_0$ справджується ланцюжок нерівностей

$$p - \varepsilon < \frac{a_{k-1} - a_k}{b_{k-1} - b_k} < p + \varepsilon,$$

звідки, враховуючи, що $b_{k-1} > b_k$,

$$(p - \varepsilon)(b_{k-1} - b_k) < a_{k-1} - a_k < (p + \varepsilon)(b_{k-1} - b_k).$$

Підсумуємо ці нерівності по k від $n+1$ до m , де $n_0 < n$, $n+1 < m$. Отримаємо нерівності

$$(p - \varepsilon)(b_n - b_m) < a_n - a_m < (p + \varepsilon)(b_n - b_m).$$

В останніх нерівностях перейдемо до границі при $m \rightarrow \infty$ і внаслідок збіжності до нуля послідовностей (a_n) , (b_n) отримаємо

$$(p - \varepsilon)b_n \leq a_n \leq (p + \varepsilon)b_n,$$

що рівносильно нерівності

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - p \right| \leq \varepsilon.$$

Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = p$. Лему доведено.

Теорема 2. Нехай функція $f \in C^{(2)}([1, +\infty))$

задовольняє такі умови:

- 1) функції f, f'' спадають на $[1, +\infty)$;
- 2) $f(x) \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x+1)}{f''(x-1)} = 1$.

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma(f) - a_n}{b_n - \gamma(f)} = 1, \quad (3)$$

де послідовності (a_n) , (b_n) та стала $\gamma(f)$ визначені у теоремі 1.

Доведення. Послідовності $(\gamma(f) - a_n)$,

$(b_n - \gamma(f))$ спадні і збіжні до нуля. Далі,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\gamma(f) - a_n) - (\gamma(f) - a_{n-1})}{(b_n - \gamma(f)) - (b_{n-1} - \gamma(f))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n) - \int_n^{n+1} f(u) du}{\int_n^{n+1} f(u) du - f(n)}.$$

Маючи на меті для обчислення цієї границі застосувати перше правило Лопітала, розглянемо допоміжну функцію

$$g(x) = \frac{f(x) - \int_x^{x+1} f(u) du}{\int_x^{x+1} f(u) du - f(x)}, \quad x \geq 2.$$

Далі,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(f(x) - \int_x^{x+1} f(u) du \right)'}{\left(\int_x^{x+1} f(u) du - f(x) \right)'} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x) - f(x+1) + f(x)}{f(x) - f(x-1) - f'(x)}. \end{aligned}$$

За формулою Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа,

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2} f''(\theta_1(x)),$$

$$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2} f''(\theta_2(x)),$$

де $\theta_1(x) \in (x, x+1)$, $\theta_2(x) \in (x-1, x)$. Таким чином,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(\theta_1(x))}{f''(\theta_2(x))}.$$

Внаслідок монотонності другої похідної функції f , справджуються нерівності

$$\frac{f''(x+1)}{f''(x-1)} \leq \frac{f''(\theta_1(x))}{f''(\theta_2(x))} \leq 1.$$

Враховуючи третю умову теореми, отримаємо, що

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(\theta_1(x))}{f''(\theta_2(x))} = 1,$$

а, отже, і

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n) - \int_n^{n+1} f(u) du}{\int_{n-1}^n f(u) du - f(n)} = 1.$$

Із цієї рівності, внаслідок леми 1, випливає (3). Теорему доведено.

Приклад 3. Для довільного $\alpha > 0$ функція $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $x \geq 1$ задовольняє умови теореми 2.

У наступній теоремі наведені достатні умови, за яких послідовності $(b_n - \gamma(f))$, $(\gamma(f) - a_n)$ збігаються до нуля так само швидко, як послідовність $\left(\frac{1}{2} f(n)\right)$.

Теорема 3. Нехай функція $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє умови теореми 2 і $f(n) \sim f(n+1)$ при $n \rightarrow \infty$. Тоді

$$b_n - \gamma(f) \sim \gamma(f) - a_n \sim \frac{1}{2} f(n), \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Доведення. Внаслідок теореми 2,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - \gamma(f)}{b_n - a_n} = \frac{1}{2},$$

тобто $b_n - \gamma(f) \sim \frac{1}{2}(b_n - a_n)$, при $n \rightarrow \infty$. Далі,

$$f(n+1) \leq b_n - a_n = \int_n^{n+1} f(u) du \leq f(n),$$

Звідки $\frac{f(n+1)}{f(n)} \leq \frac{b_n - a_n}{f(n)} \leq 1$. Оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1, \text{ то й } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - a_n}{f(n)} = 1, \text{ тобто}$$

$b_n - a_n \sim f(n)$ при $n \rightarrow \infty$. Отже,

$$b_n - \gamma(f) \sim \frac{1}{2} f(n) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Відношення еквівалентності

$$b_n - \gamma(f) \sim \gamma(f) - a_n \text{ при } n \rightarrow \infty$$

справджується внаслідок (3). Теорему доведено.

Приклад 4. Функція $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \geq 1$ задовольняє умови теореми 3. Внаслідок цієї теореми, $b_n - \gamma = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n - \gamma \sim \frac{1}{2n}$ при $n \rightarrow \infty$, де γ – стала Ейлера.

Приклад 5. Для функції із прикладу 2,

$$b_n - \gamma = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} - \frac{n^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + \frac{1}{-\alpha+1} - c(\alpha) \sim$$

$$\sim \frac{1}{2n^\alpha} \text{ при } n \rightarrow \infty. \text{ Оскільки узагальнений гармо-}$$

нічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ при $\alpha > 1$ збігається, то із цього відношення еквівалентності випливає рівність

$$\zeta(\alpha) - \frac{1}{\alpha-1} = c(\alpha), \alpha > 1,$$

де ζ – дзета-функція Рімана.

Висновки

Спосіб доведення збіжності послідовностей $(a_n), (b_n)$ за допомогою ланцюжка нерівностей

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$$

називається методом зустрічних послідовностей. Застосування цього методу для доведення збіжності послідовності (1) дозволяє отримати сталу Ойлера та аналогічні сталі в рамках теорії границь без застосування числових рядів.

Список використаних джерел

1. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник: У двох частинах. Частина 1. – К.: Либідь, 1993. – 320 с.
2. Дороговцев А.Я. Математический анализ: Сборник задач. – К.: Вища школа, 1987. – 408 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том II. – М.: Наука, 1969. – 800 с.

Надійшло до редколегії 28.06.11.

УДК 512.54

Леонов Ю.Г., к.ф.-м.н., доц.

Про трикутне зображення самоподібних груп¹

У роботі описуються зображення самоподібних груп. Приводиться приклад зображення першої групи Григорчука.

Ключові слова: самоподібна група, зображення групи, автоматна послідовність.

leonov_yu@yahoo.com

Статтю представив д.ф.-м.н., професор В.В. Кириченко

Вступ

Теорія самоподібних груп є одною з найбільш цікавих, потужних і молодих теорій в сучасній математиці. Хоча клас самоподібних груп було введено та досліджено наприкінці дев'яностих років 20 століття (див. [1]), перші приклади самоподібних груп з'явилися ще на початку 80-х років ([2], [3]).

Нехай $p \in \mathbb{N}$. Розглянемо кореневе нескінченне дерево T_p , в якому від кожної вершини (вниз) спадає рівно p ребер. Кожна вершина цього дерева може бути індуктивно закодована елементом з множини X^* усіх (скінчених) послідовностей алфавіту $X = \{0, 1, \dots, p-1\}$. А саме, номером (або кодом) кореневої вершини є нульова послідовність \emptyset . Вершини дерева, які безпосередньо з'єднуються ребром з вершиною з кодом v , ми нумеруємо як $v0, v1, \dots, v(p-1)$. Якщо кодом вершини дерева є послідовність $v = v_1 v_2 \dots v_n$, то ми говоримо, що ця вершина розташовується на n -ому рівні дерева. Рівень кореня дерева вважаємо рівним 0. Для зручності часто отождолюють вершину дерева та її код. Відмітимо, що будь-яке кореневе піддерево $T_p(v)$ з коренем v дерева T_p можна отождолювати з самим деревом T_p після отождолення вершини v з коренем \emptyset .

Розглянемо групу автоморфізмів $\text{Aut } T_p$ дерева T_p . Кожен автоморфізм $g \in \text{Aut } T_p$ діє на дереві за допомогою перестановок піддерев між собою. При цьому зберігається відношення предок-нащадок між вершинами. Таким чином, якщо $\sigma \in S_p$ — такий елемент симетричної

Yu. Leonov, assoc. prof.

On triangular representation of self-similar groups

Representation of self-similar groups is regarded in this paper. As example, we describe the representation of the first Grigorchuk group.

Key Words: self-similar group, representation of group, automatic sequence.

групи степеня p , що автоморфізм g діє на піддерево $T_p(v)$ так, що піддерево з коренем vi переходить в піддерево з коренем $u\sigma(i)$, $i \in X$, то ми можемо позначити цей факт "розфарбовуванням" вершини дерева v як $g|_v = \sigma$. Повний малюнок автоморфізму g називається портретом цього автоморфізму. Звуженням $g|_v$ автоморфізму g уздовж вершини v називається автоморфізм піддерева $T_p(v)$, індукований автоморфізмом g . Зрозуміло, що після отождолення вершини v з коренем дерева можна вважати, що $g|_v \in \text{Aut } T_p$. При цьому портретом автоморфізму $g|_v$ є піддерево з коренем v портрета автоморфізму g .

Нехай $G \leq \text{Aut } T_p$. Група G називається самоподібною, якщо для кожної вершини $v \in X^*$ множина усіх звужень автоморфізмів з цієї групи уздовж v міститься в самій групі G .

Нехай p — просте число і \mathbb{Z}_p — кільце лишків за модулем p . Розглянемо силовську p -підгрупу $\text{Syl}_p \text{Aut } T_p$ групи $\text{Aut } T_p$. Кожен автоморфізм $g \in \text{Syl}_p \text{Aut } T_p$ характеризується тим, що для кожної вершини $v \in X^*$ елемент $g|_v$ є степенем циклу $(0, 1, \dots, p-1)$ з симетричної групи S_p . Ми будемо вважати, що $g|_v \in \mathbb{Z}_p$.

В роботі [4] було вперше отримано нескінченновимірне (унітрикутне) зображення f_p групи $\text{Syl}_p \text{Aut } T_p$ матрицями над кільцем \mathbb{Z}_p . Більш детально при $p = 2$ зображення $f = f_2$ було досліджено в роботі [5].

Далі ми вказуємо метод повного опису матричних образів при такому зображенні елементів самоподібних груп, які діють на бінарному дереві T_2 (зауважимо, що $\text{Syl}_2 \text{Aut } T_2 = \text{Aut } T_2$).

¹Робота виконана за підтримкою ДФФД, договір Ф40.1/009

Шаблони та діагоналі матриць групи
 $UT(2)$

Нехай $UT(2)$ — група нескінченновимірних унітрикутних (вниз) матриць. Для роботи з матрицями цієї групи ми будемо використовувати описану в [5] методику шаблонів матриць. При цьому найбільш важливу інформацію отримуємо з діагоналей матриць.

Нехай $T(2)$ — множина матриць над кільцем \mathbb{Z}_2 , рядки та стовпчики яких індексуються цілими невід'ємними числами, з нульовими елементами над головною діагоналлю. Зрозуміло, що $UT(2) \subset T(2)$. Розглянемо також підмножину $T^0(2)$ множини $T(2)$, яка складається з усіх матриць з нульовою головною діагоналлю. На множині $T(2)$ природним чином визначені операції множення та додавання матриць, а також (поелементного) добутку матриць на елемент кільця \mathbb{Z}_2 .

Для кожного натурального n розглянемо множину $SH_n(2)$ квадратних матриць розмірності n , елементи яких є, у свою чергу, матрицями. А саме, множина $SH_n(2)$ складається з усіх матриць $U = (U_{ij})_{i,j=1}^n$, елементи яких задовольняють умовам включення:

$$U_{i,j} \in \begin{cases} UT(2) & , i = j \\ T^0(2) & , i < j \\ T(2) & , i > j \end{cases} \quad (1)$$

Введемо на множині $SH_n(2)$ стандартну операцію множення матриць розмірності n . Для зручності будемо починати нумерацію рядків та стовпчиків матриць множини $SH_n(2)$ з 0. Головним для нас є наступне

Твердження 1 ([5]). Множина $SH_n(2)$ із стандартною операцією добутку матриць розмірності n є групою, яка ізоморфна групі $UT(2)$.

Ізоморфізм $sh_n : UT(2) \rightarrow SH_n(2)$ задається наступним чином. Для матриці $u = (u_{kj})_{0 \leq k,j < \infty} \in UT(p)$ матриця $U = sh_n(u)$ визначається такою рівністю:

$$(U_{i,s})_{k,j} = u_{i+kn,s+jn}, k, j \geq 0, 0 \leq i, s \leq n-1.$$

Матрицю $U = sh_n(u)$ будемо називати шаблоном матриці u розмірності n . Нехай E та 0 — відповідно одинична та нульова матриці з множини $T(2)$.

За допомогою шаблонів досить природно описується відображення f . А саме, в роботі [5] було доведено наступне твердження:

Теорема 1. Нехай $G \leq Aut T_2$, $g \in G$, f — наше трикутне зображення. Тоді,

$$sh_2(f(g)) = \begin{pmatrix} f(g|_0) & f(g|_0) + f(g|_1) \\ g\{0\} \cdot f(g|_0) & f(g|_{g\{0\}+1}) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Природною при вивченні матриць групи $UT(2)$ є також мова кільця рядів спеціального виду. А саме, нехай \mathbb{Z}_2^ω — множина усіх (не обмежених) послідовностей елементів кільця \mathbb{Z}_2 , індексованих елементами множини $\mathbb{N} \cup \{0\}$. На цій множині розглянемо стандартні операції поелементного додавання, поелементного множення та множення на елемент, які задаються для елементів

$$\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots), \zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \dots)$$

множини \mathbb{Z}_2^ω правилами:

$$\xi + \zeta = (\xi_0 + \zeta_0, \xi_1 + \zeta_1, \dots),$$

$$\xi \cdot \zeta = (\xi_0 \zeta_0, \xi_1 \zeta_1, \dots),$$

та

$$z \cdot (\xi_0, \xi_1, \dots) = (z \cdot \xi_0, z \cdot \xi_1, \dots), z \in \mathbb{Z}_2, \xi, \zeta \in \mathbb{Z}_2^\omega.$$

Розглянемо формальний ряд виду

$$l = \sum_{i=0}^{\infty} t^i l_i, \quad (3)$$

де $l_i \in \mathbb{Z}_2^\omega$, а t — формальна змінна. Покладемо $t^0 = 1 \in \mathbb{Z}_2$. Розглянемо дію формальної змінної t на множині \mathbb{Z}_2^ω , як зсув послідовності "вліво". Тобто, якщо

$$\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots) \in \mathbb{Z}_2^\omega,$$

то покладемо

$$\xi^t = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots).$$

Приймаючи до уваги співвідношення $t^i t^j = t^{i+j}$ для множення степенів формальної змінної, отримуємо, що ξ^t є зсувом послідовності ξ вліво на i елементів.

Позначимо $\bar{1} = (1, 1, \dots)$, $\bar{0} = (0, 0, \dots) \in \mathbb{Z}_2^\omega$. Нехай $R(2)$ — множина формальних рядів виду (3). Розглянемо в $R(2)$ природні операції

додавання та множення рядів, які на елементах задаються наступним чином:

$$\sum_{i=0}^{\infty} t^i l_i + \sum_{i=0}^{\infty} t^i r_i = \sum_{i=0}^{\infty} t^i (l_i + r_i),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} t^i l_i \cdot \sum_{i=0}^{\infty} t^i r_i = \sum_{i=0}^{\infty} t^i \left(\sum_{j=0}^i l_{i-j} r_j \right).$$

Множина $R(2)$ є кільцем відносно цих операцій.

Нехай $M \in T(2)$. Кожну діагональ матриці M можна розглядати як елемент множини Z_2^{ω} . Проіндексуємо усі діагоналі матриці від головної та нижче множиною $\mathbb{N} \cup \{0\}$ в порядку їх переліку, починаючи з нульового індексу для головної діагоналі. Таким чином, з кожною матрицею можна (бієктивно) зв'язати послідовність виду

$$R_M = (M_0, M_1, \dots),$$

її діагоналей від головної вниз.

Лема 1. Відображення $F(2) : T(2) \rightarrow R(2)$, задане правилом $M \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} t^i M_i$, де $M \in T(2)$ і $R_M = (M_0, M_1, \dots)$, є ізоморфізмом кілець.

Доведення. Операції додавання та множення в кільці $T(2)$ та в кільці $R(2)$ узгоджені між собою природним чином. Доведення проводиться за означенням цих операцій. \square

Нехай $R^{(1)}(2)$ — підкільце кільця $R(2)$, яке складається з рядів виду (3) з умовою $l_0 = \bar{1}$. Очевидно, $F(2)(UT(2)) = R^{(1)}(2)$.

Для матриці M її i -ту діагональ нижче головної будемо позначати як M_i , $i \geq 0$. Розглянемо операцію бінарного зливання послідовностей

$$(\langle \rangle) : Z_2^{\omega} \times Z_2^{\omega} \rightarrow Z_2^{\omega},$$

яка задається наступним чином. Якщо $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots)$, $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \dots) \in Z_2^{\omega}$, то покладемо:

$$(\langle \xi, \zeta \rangle) = (\xi_0, \zeta_0, \xi_1, \zeta_1, \xi_2, \dots) \in Z_2^{\omega},$$

Наступне твердження зв'яже дві мови вивчення унітрикутних матриць.

Теорема 2. Нехай $M \in UT(2)$,

$$sh_2(M) = \begin{pmatrix} M_{00} & M_{01} \\ M_{10} & M_{11} \end{pmatrix}.$$

Тоді для кожного $i \geq 0$

$$M_i = \begin{cases} \langle \langle (M_{00})_{i/2}, (M_{11})_{i/2} \rangle \rangle & , i - \text{парне} \\ \langle \langle (M_{10})_{(i+1)/2}, (M_{01})_{(i+1)/2} \rangle \rangle & , i - \text{непарне} \end{cases} \quad (4)$$

Доведення. Доведення випливає з означень шаблону матриці та бінарного зливання послідовностей. \square

Ця теорема дозволяє отримати діагоналі матриці за допомогою діагоналей матриць — елементів шаблону. Таким чином, в певних випадках можна використовувати індукцію при вивченні матриць.

Зображення самоподібних груп на прикладі групи Григорчука Gr

З теореми 2 можна отримати опис матричних образів самоподібних груп. Продемонструємо цю ідею на прикладі найбільш відомої самоподібної групи — першої групи Григорчука.

Нехай $X = \{0, 1\}$. Група Григорчука $Gr = \langle a, b, c, d \rangle$ є підгрупою групи автоморфізмів $Aut T_2$. Твірні цієї групи визначимо наступним чином. Елемент a може бути визначений своїм портретом за умови, що $a\{v\} = 1$ тоді і лише тоді, коли $v = \emptyset$, $v \in X^*$ (для інших вершин значення дорівнюють нулю). Інші твірні визначаються за допомогою свої звужень уздовж 0 та 1. А саме,

$$\begin{aligned} b\{\emptyset\} &= 0, b|_0 = a, b|_1 = c, \\ c\{\emptyset\} &= 0, c|_0 = a, c|_1 = d, \\ d\{\emptyset\} &= 0, d|_0 = e, d|_1 = b, \end{aligned}$$

де e — нейтральний елемент групи Григорчука. Коротко ці умови можна записати таким чином: $b = (a, c)$, $c = (a, d)$, $d = (e, b)$. Відмітимо, що $d = bc = cb$.

Розглянемо зображення f та образи цього зображення $A = f(a)$, $B = f(b)$, $C = f(c)$, $D = f(d)$. В роботі [5] ми використали теорему 1 та отримали наступні співвідношення:

$$sh_2(A) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ E & E \end{pmatrix}, sh_2(B) = \begin{pmatrix} A & A+C \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

$$sh_2(C) = \begin{pmatrix} A & A+D \\ 0 & D \end{pmatrix}, sh_2(D) = \begin{pmatrix} E & E+B \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Позначимо $\overline{v_0 v_1 \dots v_k}$ — періодичну послідовність з періодом $v_0 v_1 \dots v_k$, $v_i \in \mathbb{Z}_2$. Ясно, що $M_0 = \bar{1}$ для кожної матриці $M \in UT(2)$. З теореми 2 та означених вище співвідношень випливає

Лема 2. Для діагоналей образів твірних групи Григорчука виконуються наступні співвідношення:

$$A_1 = \bar{10}, \quad A_s = \bar{0}, \quad \text{при } s > 1,$$

$$B_1 = \langle \langle \bar{0}, \langle \bar{1}, \langle \bar{1}, B_1 \rangle \rangle \rangle \rangle,$$

$$D_1 = \langle \langle \bar{0}, B_1 \rangle \rangle,$$

$$C_1 = \langle \langle \bar{0}, \langle \bar{1}, B_1 \rangle \rangle \rangle,$$

$$B_2 = \langle \langle \langle \bar{1}, \bar{0} \rangle, \langle \langle \bar{0}, \langle \bar{1}, B_1 \rangle \rangle \rangle \rangle \rangle,$$

$$C_2 = \langle \langle \langle \bar{1}, \bar{0} \rangle, \langle \langle \bar{0}, B_1 \rangle \rangle \rangle \rangle,$$

$$B_{2s} = B_{2s-1} = \langle \langle \bar{0}, C_s \rangle \rangle, \quad \text{для усіх } s > 1,$$

$$C_{2s} = C_{2s-1} = \langle \langle \bar{0}, D_s \rangle \rangle, \quad \text{для усіх } s > 1,$$

$$D_{2s} = D_{2s-1} = \langle \langle \bar{0}, B_s \rangle \rangle, \quad \text{для усіх } s > 0.$$

Таким чином, ми отримали повну інформацію про образи твірних групи Григорчука. Зауважимо, що вищенаведені послідовності задаються рекурентно, але однозначно. Ці послідовності є 2-автоматними послідовностями (див. [6]). Більш того, не важко показати, що якщо ці властивості мають твірні елементи групи, то 2-автоматними послідовностями буде кожна діагональ образу кожного елемента групи Григорчука.

Матричні діагоналі можна надалі вивчати як послідовності із множини \mathbb{Z}_2^ω . Зокрема, розглянемо генератрису послідовності B_1 . Нехай $B_1 = \{B_{1,i}\}_{i=0}^\infty \in F_2(x)$ — кільце формальних рядів виду

$$\sum_{i=0}^\infty l_i x^i, \quad l = (l_0, l_1, \dots) \in \mathbb{Z}_2^\omega$$

від формальної змінної x над полем із двох елементів. Зауважимо, що в $F_2(x)$

$$\sum_{i=0}^\infty x^i = \frac{1}{1+x} \quad \text{та} \quad \left(\sum_{i=0}^\infty l_i x^i \right)^2 = \sum_{i=0}^\infty l_i x^{2i}.$$

Позначимо генератрису послідовності B_1 як $B_1(x)$. За рекурентним означенням послідовності B_1 , маємо

$$B_1(x) = \sum_{i=0}^\infty B_{1,i} x^i = \sum_{i=0}^\infty x^{4i+1} + \sum_{i=0}^\infty x^{8i+3} +$$

$$+ \sum_{i=0}^\infty B_{1,i} x^{8i+7} = x \cdot \left(\sum_{i=0}^\infty x^i \right)^4 + x^3 \cdot \left(\sum_{i=0}^\infty x^i \right)^8 + x^7 \cdot B_1^8(x) = \frac{x}{1+x^4} + \frac{x^3}{1+x^8} + x^7 \cdot B_1(x)^8.$$

Таким чином, отримано раціональне співвідношення для генератриси послідовності $B_1(x)$.

Висновки

В роботі вказується спосіб отримання матричних образів зображення самоподібних груп. Встановлюються певні властивості діагоналей цих образів. У зв'язку з цим, цікаво було б отримати більш точний клас послідовностей-діагоналей образів зображення. Можна поставити і обернене питання: при яких співвідношеннях між діагоналями матриці можливо існування зображення самоподібної групи з образом одного із елементів рівним цій матриці.

Список використаних джерел

1. Р. И. Григорчук Автоматы, динамические системы и группы / Р. И. Григорчук, В. В. Некрашевич, В. И. Суцанский // Тр. Матем. Ин-та им. В. А. Стеклова. – 2000. – 231. – С. 134–214.
2. Григорчук Р. И. К проблеме Бернсайда о периодических группах / Григорчук Р. И. // Функц. анализ и его прилож. – 1980. – т. 14. – вып. 1. – С. 53–54.
3. Гунта Н. Some infinite p -groups / Гунта Н., Сидки С. // Алгебра и логика. – 1983. – 22. – № 5. – С. 584–589.
4. Леонов Ю. Г. Зображення віцевих добутоків унітрикутними матрицями / Леонов Ю. Г., Некрашевич В. В., Суцанский В. И. // Допов. АН України. – 2005. – №4. – С. 29–33.
5. Леонов Ю. Г. Представление финитно-аппроксимруемых 2-групп бесконечномерными унитарными матрицами над полем из двух элементов / Леонов Ю. Г. // Матем. студії. – 2004. – Т. 22. – №2. – С. 134–140.
6. F. von Haeseler Automatic sequences // Walter de Gruyter. Exp. in math. 36. Berlin. New York. 2003. P. 191.

Надійшла до редколегії 19.07.2011

УДК 51(091)

Олена М. Рябухо, канд. ф.-м. н., доцент

Професор Євстахій Жилинський (до
120-річчя від дня народження)

Наводиться коротка характеристика
праць вихованця Київської алгебраїчної школи
Євстахія Жилинського (1889-1954), професора
Львівського університету Яна Казимира та
Сілезького технічного університету.

Ключові слова: Жилинський, теорема
Жилинського, алгебраїчна теорія чисел, p -
адична теорія чисел.

rom.olena@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., професор В.В. Кириченко

1. Вступ

Вихованець Київської алгебраїчної школи
професор Євстахій Жилинський мав помітний
вплив на вищу математичну освіту і розви-
ток математики у Львові в міжвоєнний період
(1920-1941 рр.). В післявоєнні роки його ім'я бу-
ло незаслужено забуто і нині мало хто знає про
цього відомого в свій час математика і педаго-
га. Метою нашої статті є ознайомлення читача
з фактами біографії і науково-педагогічною ді-
яльністю професора Жилинського, охарактери-
зувати основні його наукові здобутки в матема-
тиці. В роботі над статтею ми опиралися на дея-
кі дані з архіву Київського національного уні-
верситету імені Тараса Шевченка, статті поль-
ських науковців, зокрема [10], [11], [12], повні-
стю або частково присвячених Жилинському.

2. Біографічні відомості про Євстахія Жилинського

Євстахій Жилинський народився 19 вересня
1889 року в містечку Куна на Брацлавщині (ни-
ні Немирівський район Вінницької області) в
шляхетській родині. Навчався в Першій київ-
ській гімназії (яка, як всі державні навчальні
заклади в Росії була російськомовною). В
1907 році закінчив гімназію з золотою медаллю
і в тому ж році розпочав студії на математи-
чному відділенні університету св. Володимира
в Києві. Під час навчання в університеті по-
справжньому захопився математикою і почав
працювати в семінарі професора Дмитра Гра-
ве, який тільки розпочав свою діяльність. В 1911
році закінчив університет з дипломом першо-

Olena M. Ryabukho, PhD, Associate Professor

Professor Eustachy Żyliński (to the
120-year from the birthday)

Articles by Eustachy Żyliński (1889-1954),
member of Kyiv algebraic school, professor of Jan
Kazimierz University of L'viv and Silesian Tech-
nology University of Gliwice, are characterised.

Key words: Żyliński, theorem of Żyliński, al-
gebraic number theory, p adic number theory.

го степеня і срібною медаллю та був залипе-
ний при університеті "для підготовки до про-
фесорського звання". Д. Граве вважав Є. Жи-
линського здібним учнем і рекомендував відпра-
вити його до університетів Німеччини і Англії
для ознайомлення з новітніми досягненнями то-
гочасної алгебри і теорії чисел. З 1912 року по
1914 рік Жилинський студіював математику в
Гетингенському та Марбурзькому університе-
тах (Німеччина) і Кембриджському університеті
(Англія). Тут він ознайомився з новітніми дося-
гненнями з алгебраїчної теорії чисел і написав
свою першу працю, яка відразу стала відомою
та створила Є. Жилинському авторитет в нау-
кових колах.

В 1914 році Жилинський повернувся до
Києва. У Відомостях Київського університету
з'явилася друком його стаття, на основі якої
під керівництвом Д. Граве було написано ма-
гістерську дисертацію на тему "Про область p -
адичних чисел". Захист дисертації відбувся в
цьому ж році, але це не зашкодило військово-
му відомству царської Росії призвати Є. Жи-
линського на військову службу. Перебуваючи в
російській армії, закінчив військово-інженерну
школу в Києві і електротехнічну школу в Пе-
трограді. В 1918 році він знову повертається
до Києва, розпочинає свою науково-педагогічну
діяльність. Читає лекції як приват-доцент в Ки-
ївському Політехнічному Інституті і новотво-
реному Польському Університетському Колегі-
умі. Проте в 1919 році Є. Жилинський вирішив
переїхати до Львова, де від жовтня 1919 року

займав посаду надзвичайного професора в Університеті Яна Казимира. Через деякий час стає керівником відділу А математичного закладу на філософському факультеті університету. В 1929/30 навч. році виконував обов'язки декана факультету. Після зайняття Львова радянськими військами і приєднання Західної України до Української РСР продовжував працювати в університеті на посаді завідувача кафедри алгебри та теорії чисел. Під час німецької окупації (1941-1944) брав участь в підпільному навчанні студентів університету. Після визволення Львова радянською армією в 1944 році вирішив переїхати до Польщі. Львівські математики, які в цей час переїздили до Польщі, стали основою професорсько-викладацького складу двох вузів: Вроцлавського університету і Сілезького технічного університету (Politechniki Śląskiej). Професор Жилінський переїздить до м. Глівіце, де була основна садиба Сілезького технічного університету, засновує і очолює міжфакультетську кафедру математики. Працює на посаді керівника кафедри до самої смерті. Помер професор Є. Жилінський у 1954 році в Глівіце.

3. Науково-педагогічний доробок професора Жилінського

Науково-педагогічний доробок професора Жилінського порівняно незначний, але якісний. Він є автором і співавтором університетських підручників [1] і [2] та посібника з логіки [3]. Підручник [1] в міжвоєнний період був основним підручником з теорії чисел. Написаний майстерно, з багатьма прикладами, він користувався популярністю серед студентів і служив основою для курсів з теорії чисел, які читалися в навчальних закладах міжвоєнної Польщі. Згадується він в огляді проф. А. Шинця [14] про історію розвитку досліджень з теорії чисел в Польщі за період 1850-1950 роки. Підручник з аналітичної геометрії [2] складено на основі лекцій з аналітичної геометрії, які читав професор Жилінський у Львівському університеті. В ньому подано основні відомості з аналітичної геометрії на площині і в просторі. Виклад матеріалу традиційний, але продуманий і дуже старанно відібраний. Вважається, що певну допомогу в написанні цього підручника надавав тодішній асистент професора Жилінського М. Старк. В післявоєнні роки М. Старк випустив свій підручник з аналітичної геометрії [12]

(обсягом 610 сторінок), в підзаголовку до якого зазначив, що написано цей підручник з використанням (szczególnym uwzględnieniem) підручника Євстахія Жилінського. Невеликий за обсягом посібник з математичної логіки [3], в якому викладає основи формалізму Гільберта, був написаний в час, коли в Львівській математичній школі почала інтенсивно розвиватися проблематика математичної логіки. Він представляє інтерес рядом методологічних новацій і новими постановками задач. Зокрема в цьому посібнику було проаналізовано проблему повноти для логічних зв'язків від двох змінних. Професор Жилінський постійно читав курс лекцій з алгебри в університеті і, напевно, планував написати також підручник на цю тему (адже підручник [1] вважався лише першою частиною праці), але цим планам не судилося здійснитися.

4. Наукові праці професора Жилінського

Науковий доробок професора Жилінського представлений в публікаціях [4]-[9]. Найбільш вартісною з них є невелика праця [4], опублікована у відомому математичному журналі "Mathematische Annalen". В ній автор доводить таку теорему:

Нехай поле алгебраїчних чисел K є скінченним розширенням основного поля, причому степінь розширення дорівнює n . Якщо просте число p є дільником дискримінанта (індекса) кожного цілого елемента поля K , але не ділить дискримінант поля K , то $p < n$.

Важливу роль цієї теореми підкреслював в своїй роботі [15] професор Д.О. Граве. А саме, він використовує її в задачі розкладу простих чисел на ідеальні множники в кільцях цілих алгебраїчних чисел. (тобто розклад в таких кільцях ідеалу породженого простим числом на добуток простих ідеальних кільць). Граве пише: "Якщо ми розглянемо ідеал

$$\rho = [p, \varphi(\theta)],$$

де $\varphi(x)$ — незвідний за модулем p многочлен степеня f , то коли p не ділить індекс (дискримінант) числа θ , кожне число поля конгруентне за модулем p цілому (алгебраїчному) числу

$$x_0 + x_1\theta + x_2\theta^2 + \dots + x_{n-1}\theta^{n-1},$$

яке має координати x_i . А тому, викладки розкладу числа p на множники p_i , а також викладки над ідеалами ρ_i будуть здійснюватися за тим

же загальним методом Золотарьова і не з'являється необхідність розглядати число з дробовими координатами.

Якщо ж число p є числом, що входить до індексу числа θ , то пропонується замінити число θ іншим цілим алгебраїчним числом поля, до індексу якого число p вже не входить. При цьому помічено, що бувають не найпростіші поля, для яких певне просте число може входити до індексів всіх цілих алгебраїчних чисел поля. Для таких виключних простих чисел (ausserwesentliche gemein-schaftliche Diskriminantenteiler) вже не можна застосувати прийом заміни основного елемента θ поля.

За теоремою Жилінського такі особливі прості числа менші від степеня поля (як розширення над основним полем). Отже, для квадратних полів вони не існують, а для кубічних полів таким може бути тільки одне просте число — два."(переклад з російської)

Як бачимо, теорема Жилінського відіграє ключову роль в аналізі проблеми розкладу. Алгоритми розкладу простих чисел на добуток простих ідеалів в кільцях цілих алгебраїчних чисел також ґрунтуються на цій теоремі. Можна навести й інші приклади її застосування. Саме тому відомий польський математик, спеціаліст з теорії чисел А. Шінцель (A. Schinzel) аналізуючи в праці [13] історію теорії чисел в Польщі за 100 років (1851-1950) включив цю працю до (короткого) списку найбільших досягнень польських математиків в цій галузі:

"До досягнень з теорії чисел увійшли результати Мертенса (цитуються одна стаття), Серпінського (цитуються 2 статті) без його прізвища, Вольфіша (цитуються 3 статті) і Жилінського [4], а поза тим до історії теорії чисел висновки однієї праці Серпінського. Не є то довгий список."(переклад з польської)

Друга праця Є. Жилінського з теорії чисел присвячена "викладу основ теорії Гензельових p -адичних чисел, причому особливу увагу звернуто на зв'язок останніх зі звичайними раціональними числами"[5]. Її мета, за словами автора, дати на кількох сторінках по можливості повний і строгий образ основ цієї молодшої, але плідної теорії.

Методи доведення основних властивостей p -адичних чисел, які застосовував Жилінський в цій роботі істотно відрізняються від методів доведення, що їх застосовували інші автори (К.

Гензель, А. Френкель, Ж.Адамар). Статтю було написано Є. Жилінським під час стажування в Гетінгенському університеті, в 1913 році. В 1914 році, повернувшись до Києва, він розширив матеріал цієї праці до магістерської дисертації. Алгебраїчній теорії чисел було присвячено ще дві праці Жилінського [6], [7], але вони не містять нових результатів, хоча з точки зору методичної представляють безперечний інтерес.

Стаття Євстахія Жилінського [8] присвячена проблематиці числення висловлень. Отримані в ній результати ніби входять до стандартних курсів математичної логіки без жодних посилань на її автора. А саме, в ній розглядаються (в сучасних термінах) проблема повноти системи булевих функцій від двох змінних. Зокрема встановлено, що функції "штрих Шеффера" і "стрілка Пірса" які визначаються як заперечення диз'юнкції і кон'юнкції відповідно, є єдиними бінарними зв'язками, кожна з яких утворює повну систему логічних зв'язок. Наводяться також більш-менш зрозумілі застосування цих тверджень в теорії дедукції.

Ще одну роботу Є. Жилінського опубліковано в збірнику пам'яті його вчителя — академіка Д.О. Граве [9]. Вона присвячена проблемі елімінації — виключення параметрів з систем функціональних рівнянь. Основний результат цієї роботи можна сформулювати таким чином. Нехай D — область простору $\{(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) | x_i, y_i \in R\}$, в якій функціональний визначник

$$I(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) | x_i, y_i = \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} \right|_{i,k=1}^n$$

системи n функцій

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n); i = 1, 2, \dots, n$$

відмінний від нуля. Нехай $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ є функція від x_1, x_2, \dots, x_m , яку отримуємо, підставляючи в функцію

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

замість $y_k (1 \leq k \leq n)$ розв'язки системи рівнянь

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0; i = 1, 2, \dots, n$$

відносно невідомих y_1, y_2, \dots, y_n . Припустимо, що функція $f(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n)$ є нескінченно диференційованою за всіма $m+n$

змішними і нехай Δ — множина тих точок із D , для яких

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0; (i = 1, 2, \dots, n).$$

Тоді множину Δ можна охарактеризувати, використовуючи виключення n параметрів $\lambda_i (1 \leq i \leq n)$ з системи $m + 2n$ рівнянь

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0 (j = 1, 2, \dots, n),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} = 0 (k = 1, 2, \dots, n),$$

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) (i = 1, 2, \dots, n).$$

5. Висновки

Професор Євстахій Жилінський мав широкі наукові інтереси, повний список його праць, складений проф. Л. Маліграндою містить понад 20 наукових статей та 6 підручників [11]. Але вплив на розвиток математики у Львові не обмежувався науковою діяльністю Є. Жилінського і читанням лекцій в університеті. Він був активним учасником і керівником математичних семінарів, які в міжвоєнний період постійно функціонували в Львівському університеті. Був промотором двох докторських дисертацій (в нашому розумінні — кандидатських): у 1924 р. Ю. Шаудера (Juliusz Schauder) та у 1928 р. В. Орліча (Władysław Orlicz) — одного з найславетніших представників польської математичної школи.

Якщо слово "учень" вжити в широкому контексті, як той, на кого науково-педагогічна діяльність деякої особи мала істотний вплив, то багато молодих людей, які розпочали свої дослідження в математиці в часи міжвоєнної Польщі, безперечно серед своїх учителів називали вихованця Київської алгебраїчної школи професора Євстахія Жилінського.

Список використаних джерел

1. Ruzewicz Stanisław, Żyliński Eustachy. Wstęp do matematyki I. Elementy teorii liczb, Lwów, 1927, 243 str.
2. Żyliński Eustachy. Geometria analityczna. Warszawa, 1938, 380 str.
3. Żyliński Eustachy. Formalizm Hilberta: Część I. Lwów, 1935, 76 str.
4. Żyliński Eustachy. Zur Theorie der ausserwesentlichen Discriminantenteiler algebraischer Körper. Mathem. Annalen 73(1913), 273-274.
5. Жилинский Е. Об области рациональных p-адических чисел. Изв. университета св. Владимира, 54 (1914), №6, 49-57.
6. Żyliński Eustachy. Über einen Satz der Theorie der algebraischen Zahlen. Bulletin Akademii Umiejętności w Krakowie, ser. A. Sciencei Mathématiques, 1929, 89-91.
7. Żyliński Eustachy. Zur Begründung der Idealtheorie. Sprawozdanie z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Wydział III, 24(1932), 87-92.
8. Żyliński Eustachy. Some remark concerning the theory of deduction. Fundamenta Mathematicae, v. VII (1925), 203-209.
9. Żyliński E. Sur la methode des multiplificateurs de Lagrange. Сборник посвященный памяти академика Д.А.Граве. Под ред. О.Ю.Шмидта, Б.Н.Делоне, Н.Г.Чеботарева, Москва-Ленинград: Государственное из-во технико-теоретической литературы, 1940, с.68-71.
10. Maligranda Lech, Wnuk Witold. Władysław Orlicz (1903-1990). Wiadomości matematyczne, XXXVI, 2000, 85-147.
11. Maligranda, Lech. Eustachy Żyliński (1889-1954). Antiquitates Mathematicae. 2009, 3. 171-211.
12. Szalajko Kazimierz. Wspomnienia o Stefanie Banachu na tle Lwowa i Lwowskiej Szkoły Matematycznej // Opuscula Mathematica, 13(1993), 45-54.
13. Stark Marcell. Geometria analityczna (ze szczególnym uwzględnieniem podręcznika Eustachego Żylińskiego). Monografie Matematyczne, tom XXIV, Warszawa-Wrocław, 1951, 610 str.
14. Schinzel A. Historia teorii liczb w Polsce w latach 1851-1950 // Wiadomości matematyczne. Seria II. - T. XXXI (1993). - Str. 19-50.
15. Граве Д. О разложении простых чисел на идеальные множители. Матем. сб. т. XXXII (1925), 542-560.

Надійшла до редакції 01.05.2011

УДК 519.21

А.В. Семенчук, аспирант

Алгоритм обчислення раціональних вкорочень мішаного періодичного рекурентного дробу 3-го порядку

Розглядаються раціональні вкорочення періодичного рекурентного дробу 3-го порядку.

Ключові слова: періодичний рекурентний дріб 3-го порядку, раціональні вкорочення періодичного рекурентного дробу 3-го порядку, па-раперманент.

E-mails: romazz@rambler.ru

Статтю представив доктор фіз-мат. наук, професор Кириченко В.В.

1 Вступ

В [1] запропоновано алгоритм, який узагальнює алгоритм обчислення раціональних вкорочень ланцюгових дробів. Даний алгоритм можна описати за допомогою апарату паререманентів трикутних матриць. Алгебраїчну конструкцію, яка описує даний алгоритм, названо рекурентними дробами [2], а самий алгоритм — алгоритмом Фюрстенгау.

В [3] запропоновано модифікований алгоритм Фюрстену знаходження раціональних наближень кубічних ірраціональностей, які зображуються періодичними рекурентними дробами 3-го порядку. Однак є цілий ряд задач, які приводять до розгляду періодичних рекурентних дробів з деяким передперіодом.

Дана робота присвячена побудові ефективного алгоритму обчислення раціональних вкорочень періодичних рекурентних дробів 3-го порядку з передперіодом та узагальненню алгоритму запропонованого в [4].

2 Основні результати

Означення 2.1. Рекурентний дріб 3-го порядку

A.V. Semenchuk, *PhD student*

Algorithms of calculations of rational estimations of mixed of recurrence periodical fraction of 3-order

Examining of rational estimations of recurrence periodical fraction of 3-order.

Key Words: recurrence periodical fraction of 3-order, rational estimations of recurrence periodical fraction of 3-order, parapermanent.

$$\alpha = \begin{bmatrix} q_0^* & & & & & & & & & & \\ p_1^* & q_1^* & & & & & & & & & \\ q_1^* & p_1^* & q_2^* & & & & & & & & \\ r_1^* & q_2^* & p_2^* & q_3^* & & & & & & & \\ p_2^* & q_3^* & p_3^* & q_3^* & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_{l-2}^* & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{p_{l-1}^*}{q_{l-1}^*} q_{l-1}^* & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{r_l^*}{p_l^*} q_l^* & q_l^* & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{r_1}{p_1} \frac{e_1}{q_1} q_1 & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_{k-2} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} q_{k-1} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{r_k}{p_k} \frac{e_k}{q_k} q_k & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{r_1}{p_1} \frac{e_1}{q_1} q_1 & \\ \vdots & & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} \infty \\ (1) \end{matrix}$$

елементи якого задовольняють умови

$$p_{sk+m+l} = p_{m+l}, \quad q_{sk+m+l} = q_{m+l}, \quad r_{sk+m+l} = r_{m+l};$$

$$l=1,2,\dots, m=1,2,\dots,k, s=0,1,2,\dots \quad (2)$$

називають мішаним періодичним рекурентним дробом 3-го порядку [4] з розмірністю передперіоду l та з періодом k .

Побудуємо новий алгоритм обчислення раціональних вкорочень мішаних періодичних рекурентних дробів 3-го порядку.

Нехай n -порядок паракерманента його раціонального вкорочення, причому $n = sk + l$, $s = 1, 2, 3, \dots$

Тоді справедлива наступна теорема.

Теорема 2.1. *Раціональне вкорочення*

$$\delta_n^* = \frac{P_n^*}{Q_n^*}$$

мішаного періодичного рекурентного дробу третього порядку (1), з періодом $k \geq 2$, елементи якого задовольняють умови (2), дорівнює значенню виразу

$$q_0^* + p_1^* \cdot \frac{B}{A} + r_2^* \cdot \frac{C}{A},$$

в якому A , B і C визначаються із рекурентних рівностей

$$A = r_2 \alpha_{l-1} C_{k-s-2}^{s-1} + (r_1 \alpha_{l-2} + p_1 \alpha_{l-1}) B_{k-s-1}^{s-1} + \alpha_l A_{k-s}^s, \quad (3)$$

$$B = r_2 \beta_{l-2} C_{k-s-2}^{s-1} + (r_1 \beta_{l-3} + p_1 \beta_{l-2}) B_{k-s-1}^{s-1} + \beta_{l-1} A_{k-s}^s, \quad (4)$$

$$C = r_2 \gamma_{l-3} C_{k-s-2}^{s-1} + (r_1 \gamma_{l-4} + p_1 \gamma_{l-3}) B_{k-s-1}^{s-1} + \gamma_{l-2} A_{k-s}^s, \quad (5)$$

де

$$\alpha_l = \begin{bmatrix} q_1^* & & & & \\ p_2^* & q_2^* & & & \\ q_3^* & p_3^* & q_3^* & & \\ r_4^* & p_4^* & q_4^* & q_4^* & \\ 0 & & & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_{l-2}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{p_{l-1}^*}{q_{l-1}^*} & q_{l-1}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{r_l^*}{p_l^*} & \frac{p_l^*}{q_l^*} & q_l^* \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\beta_{l-1} = \begin{bmatrix} q_2^* & & & & \\ p_3^* & q_3^* & & & \\ q_4^* & p_4^* & q_4^* & & \\ r_5^* & p_5^* & q_5^* & q_5^* & \\ 0 & & & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_{l-2}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{p_{l-1}^*}{q_{l-1}^*} & q_{l-1}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{r_l^*}{p_l^*} & \frac{p_l^*}{q_l^*} & q_l^* \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\gamma_{l-2} = \begin{bmatrix} q_3^* & & & & \\ p_4^* & q_4^* & & & \\ q_5^* & p_5^* & q_5^* & & \\ r_6^* & p_6^* & q_6^* & q_6^* & \\ 0 & & & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_{l-2}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{p_{l-1}^*}{q_{l-1}^*} & q_{l-1}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{r_l^*}{p_l^*} & \frac{p_l^*}{q_l^*} & q_l^* \end{bmatrix}, \quad (8)$$

а $A_{sk}^s, B_{sk-1}^{s-1}, C_{sk-2}^{s-1}$ визначаються із рекурсії

$$A_{sk}^s = r_2 \varphi_{k-1} C_{k(s-1)-2}^{s-2} + (r_1 \varphi_{k-2} + p_1 \varphi_{k-1}) B_{k(s-1)-1}^{s-2} + \varphi_k A_{k(s-1)}^{s-1}, \quad (9)$$

$$B_{sk-1}^{s-1} = r_2 \psi_{k-2} C_{k(s-1)-2}^{s-2} + (r_1 \psi_{k-3} + p_1 \psi_{k-2}) B_{k(s-1)-1}^{s-2} + \psi_{k-1} A_{k(s-1)}^{s-1}, \quad (10)$$

$$C_{sk-2}^{s-1} = r_2 \tau_{k-3} C_{k(s-1)-2}^{s-2} + (r_1 \tau_{k-4} + p_1 \tau_{k-3}) B_{k(s-1)-1}^{s-2} + \tau_{k-2} A_{k(s-1)}^{s-1}, \quad (11)$$

де

$$\varphi_k = \begin{bmatrix} q_1 & & & & \\ p_2 & q_2 & & & \\ q_3 & p_3 & q_3 & & \\ r_4 & p_4 & q_4 & q_4 & \\ 0 & & & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} & q_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{r_k}{p_k} & \frac{p_k}{q_k} & q_k \end{bmatrix}_k, \quad (12)$$

$$\psi_{k-1} = \begin{bmatrix} q_2 & & & & \\ p_3 & q_3 & & & \\ q_4 & p_4 & q_4 & & \\ r_5 & p_5 & q_5 & q_5 & \\ 0 & & & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} & q_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{r_k}{p_k} & \frac{p_k}{q_k} & q_k \end{bmatrix}_{k-1}, \quad (13)$$

$$\tau_{k-2} = \begin{bmatrix} q_3 & & & & \\ p_4 & q_4 & & & \\ q_5 & p_5 & q_5 & & \\ r_6 & p_6 & q_6 & q_6 & \\ 0 & & & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} & q_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{r_k}{p_k} & \frac{p_k}{q_k} & q_k \end{bmatrix}_{k-2}, \quad (14)$$

$$\begin{array}{cccccccc}
 q_1^* & & & & & & & \\
 p_2^* & q_2^* & & & & & & \\
 q_1^* & p_2^* & q_3^* & & & & & \\
 p_3^* & q_1^* & p_4^* & q_4^* & & & & \\
 0 & \frac{1}{p_4^*} & \frac{1}{q_4^*} & & & & & \\
 : & & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_{l-2}^* & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{p_{l-1}^*}{q_{l-1}^*} q_{l-1}^* & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{p_l^*}{q_l^*} q_l^* & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{p_1}{q_1} & q_1 \\
 : & & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & q_{k-2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} q_{k-1} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{p_k}{q_k} q_k \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{p_1}{q_1} q_1
 \end{array}$$

$$q_5 = 1, \quad p_1 = 1, \quad r_2 = 1$$

41

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 4,$$

$$\tau_1 = 2, \quad \tau_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 4, \quad \tau_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 8,$$

$$\psi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 3, \quad \psi_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 6,$$

$$\psi_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 11, \quad \varphi_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 12,$$

$$\varphi_4 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 22, \quad \varphi_5 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 42.$$

Отже, рекурсії (3), (4), (5), (9), (10), (11) матимуть відповідно вигляд:

$$A = 2C_{5s-2}^{s-1} + 3B_{5s-1}^{s-1} + 4A_{5s}^s,$$

$$B = C_{5s-2}^{s-1} + B_{5s-1}^{s-1} + A_{5s}^s,$$

$$C = A_{5s}^s,$$

$$A_{5s}^s = 22C_{5s-7}^{s-2} + 34B_{5s-6}^{s-2} + 42A_{5s-5}^{s-1},$$

$$B_{5s-1}^{s-1} = 6C_{5s-7}^{s-2} + 9B_{5s-6}^{s-2} + 11A_{5s-5}^{s-1},$$

$$C_{5s-2}^{s-1} = 4C_{5s-7}^{s-2} + 6B_{5s-6}^{s-2} + 8A_{5s-5}^{s-1}.$$

s -те наближення до значення заданого рекурентного дробу, за алгоритмом теореми 2.1 має вигляд

$$\gamma_s = 1 + 4 \frac{B}{A} + 3 \frac{C}{A}.$$

Оскільки,

$$C_3^0 = \tau_3 = 8, \quad B_4^0 = \psi_4 = 11, \quad A_5^1 = \varphi_5 = 42,$$

то

$$\gamma_1 = \frac{587}{217} \approx 2.7051, \quad \gamma_2 = \frac{32321}{11951} \approx 2.704460,$$

$$\gamma_3 = \frac{1780047}{658189} \approx 2.70446179,$$

$$\gamma_4 = \frac{98034217}{36249057} \approx 2.70446180035,$$

$$\gamma_5 = \frac{5399131407}{1996379245} \approx 2.70446180029286,$$

$$\gamma_6 = \frac{297351484441}{109948487499} \approx 2.704461800292654.$$

Таким чином, з даного прикладу видно, що s -те наближення γ_s , знайдене при допомозі алгоритму теореми 2.1 співпадає з $(5s+1)$ им наближенням δ_{5s+1} , знайденим за алгоритмом, запропонованим у [2]. При цьому ми отримали значну економію в кількості операцій.

Список використаних джерел

1. Furshtenau E. *ber Kettenbrüche höherer Ordnung // Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.* — 1876. — S. 133-135.
2. Заторський Р.А. *Рекурентні дроби k -го порядку // Матеріали Українського математичного конгресу, присвяченого 100-річчю від дня народження Боголюбова М.М. м. Київ, Інститут математики НАН України, 27-29 серпня 2009 р.*
3. Семенчук А.В. *Алгоритм обчислення раціональних вкорочень періодичного рекурентного дробу 3-го порядку, Вісник КНУ, Серія: фіз.-мат. науки.* — 2010. — no.1. — С. 11-16.
4. Заторський Р.А. *Неперервні дроби, К-многочлени і параперманенти, Мат. методи та фіз.-мех. поля.* — 2002. — no.4. — С. 12-21.

Надійшла до редколегії 10.10.2010

УДК 519.21

О.В. Сугакова, к.ф.-м.н., доцент

Робастні оцінки параметрів суміші двох розподілів

За допомогою методу узагальнених оцінюючих рівнянь побудована оцінка евклідових параметрів суміші двох розподілів, коли одна компонента відома, а друга симетрична відносно своєї медіани. Доведена асимптотична нормальність і обернута робастність побудованої оцінки. Наведені результати моделювання, які підтверджують теоретичні висновки.

Ключові слова: метод узагальнених оцінюючих рівнянь, робастна оцінка, Донскер-клас.

sugak@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Козаченко Ю.В.

Вступ

У біостатистиці часто виникає задача оцінки впливу деякої мутації на фенотипні риси організму. Дослідники мають справу з вибіркою, яка містить особини-мутанти (основну компоненту) і деяку домішку — особини зі стандартним фенотипом, випадково визнані як мутанти. Для опису таких даних природно використовувати модель суміші двох розподілів.

Статистичний аналіз сумішей має довгу історію. При цьому більшість робіт цієї тематики присвячені параметричним моделям [1], оскільки непараметричні зазвичай неідентифіковні. У статтях [2-5] розглянуто двокомпонентні суміші, в яких розподіл домішки вважається відомим, а основна компонента має симетричний розподіл. Доведено, що така модель є ідентифіковною.

Постановка задачі

Нехай ми спостерігаємо характеристику ξ , розподіл якої є сумішшю двох компонент, її щільність розподілу має вигляд

$$\psi(x) = pf(x-a) + (1-p)f_0(x), \quad (1)$$

O.V. Sugakova, Ph.D., Associate Professor

Robust estimates for parameters of two-component mixture model

A Euclidean parameter's estimate in two-component mixture model is obtained by the generalized estimating equations approach. First component of the mixture is assumed to be known and the second component is symmetric around its median. Asymptotic normality and robustness of the estimate are proved. Results of simulation are presented.

Key Words: generalized estimating equations method, robust estimate, Donsker-class.

де $f_0(x)$ — відома щільність домішки; $f(x-a)$ — щільність основної компоненти, яка є невідомою і симетричною відносно своєї медіани ($f(-x) = -f(x)$); a, p — медіана і концентрація головної компоненти відповідно — теж невідомі параметри. Позначимо $F_0(x)$, $F(x)$ відповідні функції розподілу.

Вважаємо, що $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — незалежні однаково розподілені спостереження (н.о.р.в.в.), кожне з яких розподілено за законом (1). Ми хочемо побудувати оцінки евклідових параметрів a і p . Ця модель запропонована у роботі [2]. В роботі [3] розглянуто оцінки для a і p , побудовані за методом оцінюючих рівнянь. На жаль, ці оцінки не є робастними. В даній роботі побудовані оцінки методу оцінюючих рівнянь, які є робастними і доведена асимптотична нормальність побудованих оцінок.

Метод узагальнених оцінюючих рівнянь

В роботах [3],[4] був розвинений наступний підхід до оцінки невідомих параметрів. Нехай g_1, g_2 довільні непарні функції (тобто $g_i(-x) = -g_i(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$), такі, що для $\forall x \in$

$\mathbb{R}, i = 1, 2:$

$$G_i(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} g_i(x - \alpha) f_0(x) dx < \infty.$$

Позначимо

$$\hat{g}_i(\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g_i(\xi_j - \alpha).$$

Тоді рівняння системи

$$\begin{cases} \hat{g}_1(\alpha) - (1 - \pi)G_1(\alpha) = 0 \\ \hat{g}_2(\alpha) - (1 - \pi)G_2(\alpha) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

є незміщеними оцінюючими рівняннями для $\theta = (a, p)^T$. Довільну оцінку $\theta_n = (\hat{a}_n, \hat{p}_n)^T$, що є розв'язком (2), називають оцінкою методу узгальнених оцінюючих рівнянь.

Наприклад, в роботі [4] була побудована моментна оцінка параметру θ , для цього оцінюючі функції були вибрані у вигляді $g_1(x) = x$; $g_2(x) = x^3$.

На жаль, оцінки, побудовані в роботах [2]-[5], не є робастними. У випадку забрудненої вибірки вони можуть виявитись не найліпшими.

Основні результати

Для отримання робастної оцінки візьмемо оцінюючі функції у вигляді

$$g_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \leq 0; \\ -1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \leq -z; \\ 0, & \text{якщо } -z < x \leq z; \\ -1, & \text{якщо } x > z. \end{cases} \quad (3)$$

Тут $z > 0$ — деякий параметр. Підставляючи (3) в (2) і виключаючи з системи π , отримуємо рівняння відносно α :

$$\begin{aligned} & (\hat{\Psi}(\alpha - z) + \hat{\Psi}(\alpha + z) - 1) (2F_0(\alpha) - 1) - \\ & - (F_0(\alpha - z) + F_0(\alpha + z) - 1) (2\hat{\Psi}(\alpha) - 1) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$\hat{\Psi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\{\xi_i \leq x\};$$

$I\{A\}$ — індикатор події A . Розв'язуючи його, знаходимо \hat{a}_n , оцінку параметра a . Оцінка для p знаходиться через оцінку для a однозначно:

$$\hat{p}_n = 1 - \frac{2\hat{\Psi}(\hat{a}_n) - 1}{2F_0(\hat{a}_n) - 1}. \quad (5)$$

Зауважимо, що рівняння (4) може мати не єдиний корінь, а може не мати коренів, бо в нього входять розривні функції. Тому на роль оцінки для a ми будемо брати значення, в яких ліва частина (4) змінює знак.

У випадку, коли таких значень багато, потрібен додатковий алгоритм вибору "правильного" кореня. Такий алгоритм на основі емпіричної функції розподілу запропонований у [2]. Оскільки основна компонента є симетричною, то

$$F(-x, a, p) = 1 - F(x, a, p).$$

В роботі [2] пропонується така міра для перевірки симетричності основної компоненти - відстань Крамера фон Мізеса:

$$\begin{aligned} d_n(\alpha, \pi) = & \int_{-\infty}^{\infty} \left[\hat{F}_n(-x, \alpha, \pi) - \right. \\ & \left. - (1 - \hat{F}_n(x, \alpha, \pi)) \right]^2 \mu(dx), \end{aligned}$$

де $\hat{F}_n(x, \alpha, \pi)$ — оцінка функції розподілу основної компоненти, $\mu(A)$ — будь-яка ймовірнісна міра. Для нашої моделі за оцінку $F(x, a, p)$ можна взяти

$$\begin{aligned} \hat{F}_n(x, \hat{a}_n, \hat{p}_n) = & \frac{1}{\hat{p}_n} \left(\hat{\Psi}(x + \hat{a}_n) - \right. \\ & \left. - (1 - \hat{p}_n)F_0(x + \hat{a}_n) \right). \end{aligned}$$

Природньо обрати ту оцінку $\hat{\theta}_n$, для якої $d_n(\hat{a}_n, \hat{p}_n)$ мінімальне.

А можна до вибору кореня залучити простіший аналог відстані Крамера фон Мізеса: обирати ту оцінку, для якої

$$r_n(\alpha, \pi) = \sup_x \left| \hat{F}_n(-x, \alpha, \pi) - (1 - \hat{F}_n(x, \alpha, \pi)) \right|$$

є мінімальною. Якщо при цьому розглядати тільки моделі, де параметр p обмежений знизу і обирати тільки такі оцінки для нього, то дана процедура вибору кореня є робастною, бо сама відстань r_n буде обмеженою.

Теорема 1. Нехай $\theta_n = (\hat{a}_n, \hat{p}_n)^T$ – розв'язок системи (4), (5). Припустимо, що:

- 1) θ_n – консистентна оцінка $\theta = (a, p)^T$;
- 2) $p \neq 0$;
- 3) $f(0)(F_0(a-z) + F_0(a+z) - 1) - f(z)(2F_0(a) - 1) \neq 0$;
- 4) $F(x), F_0(x)$ – неперервні функції.

Тоді

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \Rightarrow \zeta,$$

де ζ розподілена $N(0, \Sigma)$, $\Sigma = V^{-1}S(V^{-1})^T$.

Тут

$$V = \begin{pmatrix} 2pf(0) & 2F_0(a) - 1 \\ 2pf(z) & F_0(z+a) + F_0(a-z) - 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$S = (s_{ij})_{i,j=1}^2; s_{11} = 1 - (1-p)^2(2F_0(a) - 1);$$

$$s_{12} = s_{21} = 2p(1 - F(z)) + (1-p)(1 - F_0(z+a) + F_0(a-z)) - (1-p)^2(2F_0(a) - 1) \times \\ \times (F_0(z+a) + F_0(a-z) - 1);$$

$$s_{22} = 2p(1 - F(z)) + (1-p)(1 - F_0(z+a) - F_0(a-z)) - (1-p)^2(F_0(z+a) + F_0(a-z) - 1)^2. \quad (7)$$

Донскер-класи

Доведення теореми 1 базується на твердженні про асимптотичну нормальність для оцінок параметрів методом оцінюючих рівнянь у випадку, коли оцінюючі функції утворюють Донскер-клас. Ознайомимось ближче з цим поняттям [6, с.81].

Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – послідовність н.о.р.в.в. \mathfrak{Z} – це деякий клас функцій $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для яких виконується ЦГТ в слабкому сенсі:

$$\zeta_n(g) \Rightarrow \zeta_\infty(g),$$

де

$$\zeta_n(g) = \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) - Eg(\xi_1) \right);$$

$$\zeta_\infty(g) \sim N \left(0, E(g(\xi_1) - Eg(\xi_1))^2 \right).$$

Означення 1. Кажуть, що $\zeta_n(g)$ збігається слабо за Скороходом до $\zeta_\infty(g)$ на \mathfrak{Z} (позначення $\zeta_n(g) \rightsquigarrow \zeta_\infty(g)$), якщо існують випадкові елементи простору $l^\infty(\mathfrak{Z})$ всіх рівномірно обмежених дійсних функцій на \mathfrak{Z} , такі, що

$\zeta'_n(g) \stackrel{d}{=} \zeta_n(g)$; $\zeta'_\infty(g) \stackrel{d}{=} \zeta_\infty(g)$ (рівність за розподілом), і для них

$$\sup_{g \in \mathfrak{Z}} |\zeta'_n(g) - \zeta'_\infty(g)| \rightarrow 0$$

майже напевно. При цьому \mathfrak{Z} називають Р-Донскер класом або просто Донскер-класом.

Лема 1. Клас функцій

$$G = \{g_i(x - \alpha), \alpha \in R, i = 1, 2\},$$

де функції g_i задаються формулами (3), є Донскер-класом.

Доведення. Розкладемо оцінюючі функції $g_i(x - \alpha)$ наступним чином:

$$g_1(x - \alpha) = -1 + 2I\{x \leq \alpha\};$$

$$g_2(x - \alpha) = I\{x \leq \alpha + z\} + I\{x \leq \alpha - z\} - 1.$$

В [6, с.82] вказано, що множина індикаторних функцій нижніх прямокутників $\mathfrak{Z} = \{I\{x \in (-\infty, t]\}: t \in R\}$ утворює Донскер-клас (Це є класичний результат Донскера). В [6, с.192] доведено, що якщо \mathfrak{Z} і \mathfrak{R} є Донскер-класами, то попарні суми $\mathfrak{Z} + \mathfrak{R}$ теж утворюють Донскер-клас, якщо $\sup_{g \in \mathfrak{Z} \cup \mathfrak{R}} |Eg(\xi)| < \infty$. Оскільки множина функцій, незалежних від x , тобто невинадкових, теж є Донскер-класом, то можемо стверджувати, що

$$G = \{g_i(x - \alpha), \alpha \in R, i = 1, 2\}$$

є Донскер-класом. \square

Доведення теореми 1

Для доведення теореми скористаємось наступним твердженням

Теорема 2. [6, с.310-311]. Нехай $\{\xi_i\}$ – послідовність н.о.р.в.в.,

$$\psi_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{\psi}_\theta(\xi_i); \quad \psi(\theta) = E\tilde{\psi}(\xi_1);$$

$\theta \in R^2$ – деякий параметр;

$$\tilde{\psi}_\theta(\xi_i) = \left(\tilde{\psi}_\theta^1(\xi_i), \tilde{\psi}_\theta^2(\xi_i) \right)^T;$$

тут $\tilde{\psi}_\theta^k(x), k = 1, 2$ – невинадкові функції. Припустимо, що $\hat{\theta}_n$ – розв'язок рівняння $\psi_n(\hat{\theta}_n) = 0$; θ_0 – розв'язок рівняння $\psi(\theta_0) = 0$ відповідно.

Нехай виконуються наступні умови

$$(i) \quad \sqrt{n}(\psi_n - \psi)(\theta_0) \Rightarrow Z,$$

де Z – деякий випадковий елемент;

(ii) $\psi(\theta)$ диференційовна в точці θ_0 з матрицею Якобі $\dot{\psi}(\theta_0)$, що має обернену.

(iii) Клас функцій $\mathfrak{Z} = \{\tilde{\psi}_{\theta}^i(x) - E\tilde{\psi}_{\theta}^i(x); i = 1, 2; \|\theta - \theta_0\| < \delta\}$ є P -Донскер-класом для деякого $\delta > 0$ ($\|\cdot\|$ – евклідова норма).

$$(iv) \quad E\left(\tilde{\psi}_{\theta}(\xi_i) - \tilde{\psi}_{\theta_0}(\xi_i)\right)^2 \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow \theta_0.$$

Тоді

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \rightsquigarrow -\dot{\psi}_{\theta_0}^{-1}Z.$$

Візьмемо за $\psi_n(\theta)$ ліву частину оцінюючих рівнянь (2), де оцінюючі функції задаються (3). Тоді

$$\tilde{\psi}_{\theta}(\xi_1) = (2I\{\xi_1 \leq \alpha\} - 1 - (1 - \pi)(2F_0(\alpha) - 1),$$

$$I\{\xi_1 \leq \alpha - z\} + I\{\xi_1 \leq \alpha + z\} - 1 - (1 - \pi)(F_0(\alpha - z) + F_0(\alpha + z) - 1))^T;$$

$$\theta = (\alpha, \pi)^T; \quad \theta_0 = (a, p)^T.$$

Умова (i) теореми виконується завдяки ЦГТ для н.о.р.в.векторів, при цьому випадковий вектор Z розподілений як $N(0, S)$, де S задається формулою (7).

Матриця Якобі для $\psi(\theta)$ в точці θ_0 дорівнює V (формула(6)), а завдяки умовам 2), 3) теореми 1 вона невідроджена. Завдяки лемі 1 виконується умова (iii), а через умову 4) теореми 1 виконується умова (iv). Отже, згідно теореми 2

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \Rightarrow \zeta,$$

де ζ розподілена $N(0, \Sigma)$, де $\Sigma = V^{-1}S(V^{-1})^T$.

Робастність оцінки

Дослідимо на робастність побудовану оцінку. Побудуємо функцію впливу

$$IF(x, T, F) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T[(1 - h)F + h\Delta_x] - T[F]}{h},$$

де T – функціонал, який відповідає нашій оцінці; F – функція розподілу спостережень; Δ_x – дельта-функція з зарядом в точці x .

Оскільки наші оцінки параметрів є розв'язками неявного рівняння

$$\sum_{i=1}^n \psi(\xi_i, T_n) = 0,$$

де

$$\begin{aligned} \psi(x, T(F)) &= \\ &= (2I\{x \leq \alpha\} - 1 - (1 - \pi)(2F_0(\alpha) - 1), \\ &I\{x \leq \alpha - z\} + I\{x \leq \alpha + z\} - 1 - \\ &-(1 - \pi)(F_0(\alpha - z) + F_0(\alpha + z) - 1))^T; \end{aligned}$$

(T_n – дискретний аналог функціонала T), вони відносяться до так званих М-оцінок. Функцію впливу для М-оцінок можна зобразити у вигляді [5, с.268]

$$IF(x, T, F) = M(\psi, F)^{-1}\psi(x, T(F)),$$

де М-матриця

$$M(\psi, F) = - \int \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \psi(x, \theta) \right]_{T(F)} dF(x).$$

(Індекс $T(F)$ означає, що після диференціювання у вираз треба підставити справжні значення параметрів, що оцінюються).

Для обґрунтування робастності достатньо довести обмеженість чутливості до великої похибки [7, с.265]

$$\gamma^*(T, F) = \sup_x \|IF(x, T, F)\|,$$

де $\|\cdot\|$ – евклідова норма. Оскільки

$$\begin{aligned} \sup_x \|IF(x, T, F)\| &\leq \\ &\leq \|M(\psi, F)^{-1}\| \sup_x \|\psi(x, T(F))\|, \end{aligned} \quad (8)$$

а

$$\sup_x \|\psi(x, T(F))\| \leq 2\sqrt{2},$$

то якщо $M(\psi, F)$ – невідроджена матриця, то права частина (8) обмежена. Оскільки

$$\begin{aligned} M &= - \begin{pmatrix} 2pf(0) & 2F_0(a) - 1 \\ 2pf(z) & F_0(z + a) + F_0(a - z) - 1 \end{pmatrix} = \\ &= -V, \end{aligned}$$

то вона невідроджена при виконанні умов 2), 3) теореми 1. Тому права частина (8) обмежена і оцінка є робастною в умовах теореми 1. Відмітимо, що алгоритм для вибору правильного кореня також є робастним.

Результати моделювання

Запропонований алгоритм пошуку оцінок параметрів моделі був випробуваний на вибірках фіксованого розміру за допомогою пакета Mathematica 5.

Серед усіх наближених розв'язків рівняння (4) обираємо той, що є найближчим до справжнього значення параметра a . Оцінка для p була "зрізана" відрізком $[0, 1]$.

Ми розглянули випадок, коли $a = 0, 5$; $p = 0, 5$; $z = 1$, основна компонента розподілена за законом $N(0, 1)$, домішка – $N(0, 0, 25^2)$. При моделюванні кількість вибірок ми завжди обирали $T = 1000$, об'єм вибірки n було взято 100, 250, 500 і 1000.

В таблиці наведені теоретичні граничні значення дисперсій оцінок, їх коваріації і зміщення, а також оцінки відповідних показників по змодельованих вибірках різних об'ємів.

	Теорет. зн.	$n = 100$	$n = 250$
$D\hat{a}_n$	0,345	1,029	0,336
$D\hat{p}_n$	2,964	2,457	2,68
$Cov(\hat{a}_n, \hat{p}_n)$	-0,285	-0,376	-0,238
$E\sqrt{n}(\hat{a}_n - a)$	0	-0,122	-0,25

	$n = 500$	$n = 1000$
$D\hat{a}_n$	1,029	0,336
$D\hat{p}_n$	2,457	2,575
$Cov(\hat{a}_n, \hat{p}_n)$	-0,274	-0,226
$E\sqrt{n}(\hat{a}_n - a)$	-0,323	-0,423

Очевидно, що при зростанні обсягу вибірки отримані значення стають близькими до передбачених теоретичних. На жаль, зміщення при цьому зростає.

Відмітимо, що в даному конкретному випадку моментні оцінки, одержані в роботі [3], мають більші граничні дисперсії: $D\hat{a}_n^{ME} \rightarrow 3,97$; $D\hat{p}_n^{ME} \rightarrow 6,52$. Таким чином, запропоновані у даній роботі оцінки є не лише робастними, а і (за деяких умов) більш ефективними, ніж моментні оцінки.

Список використаних джерел

1. McLachlan G.J., Peel D. Finite mixture model / G.J. McLachlan, D. Peel – Wiley, New York, 2000. – 419 p.
2. Bordes L., Delmas C., Vandekerckhove P. Semiparametric estimation of a two-component mixture model, where one component is known / L. Bordes, C. Delmas, P. Vandekerckhove // Scand. J. Statist. – 2006. – Vol. 33. – p. 733-752.
3. Maiboroda R., Sugakova O. Nonparametric density estimation for symmetric distributions by contaminated data. / R. Maiboroda, O. Sugakova // Metrica. – (2011, to appear).
4. Maiboroda R., Sugakova O. Generalized estimating equations for symmetric distributions observed with admixture / R. Maiboroda, O. Sugakova // Communications in Statistics - Theory and Methods. – 2011. – Vol. 40. – p. 96-116.
5. Bordes L., Vandekerckhove P. Semiparametric two-component mixture model with a known component: An asymptotically normal estimator / L. Bordes, P. Vandekerckhove // Mathematical Methods of Statistics. – 2010. – Vol. 19. N1 – p. 22-41.
6. Van der Vaart A.W., Wellner J.A. Weak convergence and empirical processes with applications to statistics / A.W. Van der Vaart, J.A. Wellner – Springer-Verlag New York, 1996. – 508 p.
7. Хампель Ф., Рончетти Э., Рауссеу П., Штаэль В. Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния. / Ф. Хампель, Э. Рончетти, П. Рауссеу, В. Штаэль – М.: Мир, 1989. – 512 с.

Надійшла до редколегії 16.09.2011

УДК 512.54

О.Н. Тузов, к.ф.-м.н., доц.

Про одне узагальнення сервантних підгруп.

В роботі вводиться поняття k -сервантної підгрупи і вивчаються k -сервантні підгрупи k -регулярних p -груп.

Ключові слова: k -регулярна p -група, k -сервантна підгрупа, доповнення.

E-mail: antuzov@yandex.ru

Статтю представив д.ф.-м.н. Кириченко В.В.

Важливе місце в теорії p -груп займають регулярні p -групи, введені Ф.Холлом [1]. Клас регулярних p -груп достатньо широкий і в той же час близький до класу примарних абелевих груп. В роботі [2] введено поняття k -регулярних p -груп, які є узагальненням регулярних p -груп.

Нехай G – скінчена p -група, k – натуральне число. Група G називається [2] k -регулярною, якщо для будь-яких $a, b \in G$ виконується рівність $(ab)^{p^k} = a^{p^k} b^{p^k} s_1^{p^k} \dots s_t^{p^k}$, де s_1, \dots, s_t належать комутанту групи $\langle a, b \rangle$. При $k = 1$ це співпадає з означенням регулярності, даним Ф.Холлом.

Очевидно, будь-яка підгрупа k -регулярної p -групи k -регулярна. Позначимо $G^{(k)} = \langle x^{p^k} | x \in G \rangle$, $G_{(k)} = \langle x \in G | x^{p^k} = 1 \rangle$. Якщо G – k -регулярна p -група, то всі елементи $G^{(k)}$ є k -ми степенями елементів групи G і $\exp G_{(k)} \leq p^k$ [2]. Таким чином, група G k -регулярна тоді і тільки тоді, коли для будь-яких $a, b \in G$ виконується рівність $(ab)^{p^k} = a^{p^k} b^{p^k} s^{p^k}$, де s належить комутанту групи $\langle a, b \rangle$. Зауважимо, що, якщо G k -регулярна, то вона і $(k+1)$ -регулярна [2].

Означення 1. Підгрупу A p -групи G будемо називати k -сервантною в G , якщо для довільного $a \in A$ із розв'язності рівняння $a = x^{p^k}$ в групі G випливає розв'язність цього рівняння і у підгрупі A .

Теорема 1. Підгрупа A k -регулярної p -групи G k -сервантна в G тоді і тільки тоді, коли $A^{(k)} = A \cap G^{(k)}$.

Доведення. Нехай підгрупа A k -регулярної p -групи G k -сервантна в G . Очевидно, $A^{(k)} \subseteq A \cap G^{(k)}$. Візьмемо довільний елемент $a \in A \cap G^{(k)}$. Тоді $a = g^{p^k}$ і $a \in A$. Підгрупа A k -сервантна

A.N. Tuzov, Ph.D., associate prof.

On one generalization of serving subgroups.

A notion of k -serving subgroups is introduced and k -serving subgroups of k -regular p -groups are studied in the paper.

Key Words: k -regular p -group, k -serving subgroup, complemented subgroup.

і тому в A знайдеться такий елемент a_1 що $a = a_1^{p^k}$. Таким чином, $a \in A^{(k)}$ і $A^{(k)} = A \cap G^{(k)}$. Нехай тепер $A^{(k)} = A \cap G^{(k)}$. Доведемо, що підгрупа A k -сервантна в G . Візьмемо довільний елемент $a \in A$. Якщо $a = g^{p^k}$, то $a \in A^{(k)}$ і, враховуючи k -регулярність групи G , $a = a_1^{p^k}$, де $a_1 \in A$. Доведено, що підгрупа A k -сервантна в G . \square

Твердження 1. (див.[2]). Якщо G – k -регулярна p -група і $a, b \in G$, то $a^{p^k} = b^{p^k}$ тоді і тільки тоді, коли $(ab^{-1})^{p^k} = 1$.

Теорема 2. Якщо A є k -сервантною підгрупою k -регулярної p -групи G і $G_{(k)} \subseteq A$, то $A = G$.

Доведення. Припустимо, $A \neq G$. Нехай p^n – найменший порядок елементів групи G , що не належать A , і g – один з таких елементів порядку p^n . За умовою теореми $G_{(k)} \subseteq A$, тому $n > k$. Порядок елемента g^{p^k} менше p^n , тому $g^{p^k} = a$, де $a \in A$. Зважаючи на k -сервантність підгрупи A , знайдеться такий елемент $a_1 \in A$, що $a_1^{p^k} = a$ і тому $g^{p^k} = a_1^{p^k}$. За твердженням 1, $(ga_1^{-1})^{p^k} = 1$ і $ga_1^{-1} \in G_{(k)} \subseteq A$. Таким чином, $ga_1^{-1} = a_2$, де $a_2 \in A$, і тому $g = a_2 a_1 \in A$, що неможливо. Теорему доведено. \square

Нехай g – відмінний від одиниці елемент p -групи G . Якщо рівняння $x_1^{p^n} x_2^{p^n} \dots x_t^{p^n} = g$ має розв'язок у групі G тільки при $n \leq k$, то висота елемента g у групі G дорівнює k . Наступні твердження одержуємо, враховуючи властивості k -регулярних p -груп.

Твердження 2. Нехай A – k -сервантна підгрупа k -регулярної p -групи G . Якщо висота

елемента $a \in A$ у групі G дорівнює k , то висота елемента a у підгрупі A також дорівнює k .

Твердження 3. Нехай A – k -сервантна підгрупа k -регулярної p -групи G . Якщо висота елемента $a \in A$ у групі G не менше k , то висота елемента a у підгрупі A також не менше k .

Твердження 4. Для k -сервантності підгрупи A в k -регулярній p -групі G достатньо, щоб кожен елемент підгрупи A , висота якого в G не менше k , мав і в A висоту не менше k .

Теорема 3. Для k -сервантності підгрупи A в k -регулярній p -групі G достатньо, щоб кожен елемент підгрупи $A_{(k)}$, висота якого у групі G не менше k , мав таку ж висоту і у підгрупі A .

Доведення. Враховуючи твердження 4, покажемо, що кожен елемент підгрупи A , висота якого в G не менше k , має і в A таку ж висоту. Проведемо індукцію по порядку елементів підгрупи A . Якщо елемент $a \in A$ має порядок p і його висота в групі G не менше k , то $a \in A_{(k)}$ і тому має в A таку ж висоту, як в G . Нехай твердження доведено для всіх елементів $a \in A$, порядок яких не більше p^n , і нехай елемент $a \in A$ порядку p^{n+1} має в G висоту l , де $l \geq k$. Якщо $a \in A_{(k)}$, то його висота в A , за умовою, також l . Якщо $a \notin A_{(k)}$, то, за властивостями k -регулярних p -груп, у групі G знайдеться такий елемент g , що $a = g^{p^l}$. Очевидно, $a^{p^k} = g^{p^{l+k}}$ і порядок елемента a^{p^k} не більше p^n . Висота елемента a^{p^k} в групі G не менше $l + k$, тому, за індуктивним припущенням, елемент a^{p^k} має і в A таку ж висоту. Таким чином, знайдеться такий елемент $a_1 \in A$, що $a^{p^k} = a_1^{p^{l+k}} = (a_1^{p^l})^{p^k}$. За твердженням 1, $(a_1^{p^l})^{p^k} = 1$, тобто $a^{-1}a_1^{p^l} \in A_{(k)}$. Але $a = g^{p^l}$, тому висота елемента $a^{-1}a_1^{p^l}$ в групі G не менше l , за умовою, $a^{-1}a_1^{p^l}$ має таку ж висоту в A , тобто $a^{-1}a_1^{p^l} = a_2^{p^l}$ для деякого $a_2 \in A$. Але тоді $a = a_1^{p^l}(a_2^{-1})^{p^l}$ і висота елемента a у підгрупі A дорівнює l . Теорему доведено. \square

Теорема 4. Якщо висота елемента g k -регулярної p -групи G не менше k , то g міститься у циклічній k -сервантній підгрупі групи G .

Доведення. Нехай висота елемента g у групі G дорівнює $l \geq k$. Тоді, враховуючи, що група G l -регулярна, $g = g_1^{p^l}$ для деякого $g_1 \in G$ і l – найбільше таке число. Покажемо, що циклічна підгрупа $\langle g_1 \rangle$ k -сервантна в G . Візьмемо довільний елемент $a \in \langle g_1 \rangle$. Тоді $a = g_1^{r p^m}$ для деякого m і $(p, r) = 1$. Якщо рівняння $a = x^{p^k}$ має розв'язок в G , тобто $g_1^{r p^m} = g_2^{p^k}$ для $g_2 \in G$, то $g_1^{r p^l} = g_2^{p^{k+l-m}}$ і $g^r = g_2^{p^{k+l-m}}$. Але тоді $g = (g_2^{p^{k+l-m}})^{p^{l-m}}$ для деякого n . Висота елемента g у групі G дорівнює l , тому $k+l-m \leq l$ і $k \leq m$. Але тоді $(g_1^{r p^m})^{p^k} = g_1^{r p^m} = a$, тобто рівняння $a = x^{p^k}$ має розв'язок в $\langle g_1 \rangle$. Таким чином, підгрупа $\langle g_1 \rangle$ k -сервантна в G . Теорему доведено. \square

Теорема 5. Нехай $\langle a \rangle$ – циклічна підгрупа k -регулярної p -групи G , $|a| = p^l$, $l \geq k$. Якщо підгрупа $\langle a \rangle$ k -сервантна в G , то $\langle a \rangle$ – максимальна циклічна підгрупа.

Теорема 6. Якщо $\langle a \rangle$ – максимальна циклічна підгрупа найбільшого можливого порядку k -регулярної p -групи G , то $\langle a \rangle$ – k -сервантна в G .

Теорема 7. Якщо інваріантна підгрупа A k -регулярної p -групи G має в G доповнення B , то підгрупи A і B k -сервантні в G .

Доведення. Нехай інваріантна підгрупа A k -регулярної p -групи G має в G доповнення B . Якщо для елемента $a \in A$ існує такий елемент $g \in G$, що $a = g^{p^k}$, то, очевидно, $g = a_1 b_1$, де $a_1 \in A$, $b_1 \in B$ і тому $(a_1 b_1)^{p^k} = a$. Враховуючи k -регулярність групи G , $a_1^{p^k} b_1^{p^k} s^{p^k} = a$, де s належить комутанту групи $\langle a_1, b_1 \rangle$ і тому $s \in A$. Але тоді $b_1^{p^k} = a_1^{-p^k} a s^{-p^k} \in A$, тобто $b_1^{p^k} = 1$ і $a_1^{p^k} s^{p^k} = a$. Підгрупа A k -регулярна, тому існує такий елемент $a_2 \in A$, що $a_2^{p^k} = a$. Таким чином, k -сервантність підгрупи A доведена. Аналогічно доводиться k -сервантність підгрупи B . \square

Теорема 8. Якщо G – k -регулярна p -група і комутант G' належить $G_{(k)}$, то будь-яка підгрупа, яка має в G доповнення, k -сервантна в G .

Доведення. Нехай $G = A \cdot B$ і $A \cap B = 1$. Якщо для $a \in A$ виконується рівність $a = g^{p^k}$, де $g \in G$, то, очевидно, $g = a_1 b_1$ ($a_1 \in A$, $b_1 \in B$) і тому $a = (a_1 b_1)^{p^k} = a_1^{p^k} b_1^{p^k} s^{p^k}$, де $s \in G'$. Але

$G' \subseteq G(k)$ і тому $s^{p^k} = 1$, тобто $a = a_1^{p^k} b_1^{p^k}$. Враховуючи, що $A \cap B = 1$, $b_1^{p^k} = 1$. Таким чином, $a = a_1^{p^k}$, де $a_1 \in A$. Теорему доведено. \square

Твердження 5. Нехай G – k -регулярна p -група і $a, b \in G$. Тоді, якщо $[a^{p^k}, b] = 1$, то $[a, b]^{p^k} = 1$.

Доведення. Для абелевих груп твердження виконується. Доведення проводимо по індукції – припустимо, що твердження вірне для всіх власних підгруп неабелевої k -регулярної p -групи G . Очевидно, $a^{-p^k} b^{-1} a^{p^k} b = (a^{-1})^{p^k} (b^{-1} a b)^{p^k} = (a^{-1} b^{-1} a b)^{p^k} s^{p^k}$, де s – елемент комутанта групи $\langle a, b^{-1} a b \rangle$. Таким чином, $[a^{p^k}, b] = [a, b]^{p^k} s^{p^k}$. Якщо $[a^{p^k}, b] = 1$, то a^{p^k} належить центру групи $\langle a, b \rangle$. Підгрупа $\langle a, b^{-1} a b \rangle$ – власна підгрупа групи $\langle a, b \rangle$. За індуктивним припущенням, $[a, b^{-1} a b]^{p^k} = 1$. Будь-який комутатор з $\langle a, b^{-1} a b \rangle$ є добутком елементів, спряжених комутатору $[a, b^{-1} a b]$ та їм обернених, тобто елементів, порядок яких не перевищує p^k . Таким чином, комутант групи $\langle a, b^{-1} a b \rangle$ належить $G_{(k)}$ і тому $s^{p^k} = 1$, тобто $[a, b]^{p^k} = [a^{p^k}, b] = 1$. Твердження доведено. \square

Теорема 9. Якщо підгрупа A k -регулярної p -групи G має в G доповнення B і при цьому $A^{(k)} \subseteq Z(G)$, то підгрупи A і B k -сервантні в G .

Доведення. Нехай a – довільний елемент підгрупи A і $a = g^{p^k}$ для деякого $g \in G$. Очевидно, $g = a_1 b_1$, де $a_1 \in A$, $b_1 \in B$. Враховуючи, що $a_1^{p^k} \in Z(G)$ і тому, за твердженням 5, $[a_1, b_1]^{p^k} = 1$, одержуємо рівність $g^{p^k} = (a_1 b_1)^{p^k} = a_1^{p^k} b_1^{p^k} = a$. Але $A \cap B = 1$, тому $b_1^{p^k} = 1$ і $a = a_1^{p^k}$, тобто підгрупа A k -сервантна в G . Аналогічно доводиться k -сервантність підгрупи B . \square

Твердження 6. Якщо G – k -регулярна p -група і $G^{(k)} \subseteq Z(G)$, то будь-яка підгрупа, яка має в G доповнення, k -сервантна в G .

Теорема 10. Якщо нетривіальна підгрупа A k -регулярної p -групи G має в G доповнення B , то A містить k -сервантну в G нетривіальну циклічну підгрупу.

Доведення. Нехай елемент $a \in A$ має найбільший можливий порядок p^n . Розглянемо циклічну підгрупу $\langle a \rangle$. Якщо $n \leq k$, то рівняння $a^r = x^{p^k}$ ($a^r \neq 1$) не має розв'язків в G . Дійсно, якщо знайдеться такий елемент $g \in G$, що $g^{p^k} = a^r$, то $g = a_1 b_1$, де $a_1 \in A$, $b_1 \in B$, і тому $(a_1 b_1)^{p^k} = a^r$. Враховуючи, що $a_1^{p^k} = 1$, за твердженням 5, $[a_1, b_1]^{p^k} = 1$ і тому $(a_1 b_1)^{p^k} = a_1^{p^k} b_1^{p^k}$. Таким чином, $a^r = a_1^{p^k} b_1^{p^k}$ і тому $b_1^{p^k} = 1$. Але тоді $a^r = 1$. Отже, при $n \leq k$ підгрупа $\langle a \rangle$ k -сервантна в G . Нехай тепер $n > k$. Відразу відмітимо, що група G n -регулярна. Якщо для деякого елемента $a^r \neq 1$ підгрупи $\langle a \rangle$ виконується рівність $a^r = g^{p^k}$, де $g \in G$, то $(a^r)^{p^{n-k}} = (g^{p^k})^{p^{n-k}} = g^{p^n}$. Але $g = a_1 b_1$ для деяких $a_1 \in A$, $b_1 \in B$, тому $a^{r p^{n-k}} = (a_1 b_1)^{p^n}$. Враховуючи, що $a_1^{p^n} = 1$, за твердженням 5, $[a_1, b_1]^{p^n} = 1$ і тому $(a_1 b_1)^{p^n} = a_1^{p^n} b_1^{p^n}$, тобто $a^{r p^{n-k}} = a_1^{p^n} b_1^{p^n}$. Але $A \cap B = 1$, тому $a^{r p^{n-k}} = 1$ і $r = t p^k$. Таким чином, $a^r = (a^m)^{p^k}$, тобто рівняння $a^r = x^{p^k}$ має розв'язок у підгрупі $\langle a \rangle$. Отже, підгрупа $\langle a \rangle$ k -сервантна в G . \square

Твердження 7. Кожна максимальна циклічна підгрупа найбільшого можливого порядку k -регулярної p -групи G k -сервантна в G .

Твердження 8. Якщо циклічна підгрупа k -регулярної p -групи G має доповнення в G , то вона k -сервантна в G .

Використовуючи властивості k -регулярних p -груп, можна довести наступне твердження.

Теорема 11. Якщо G – k -регулярна p -група і комутант $G' \subseteq Z(G)$, то будь-яка підгрупа, яка має в G доповнення, k -сервантна в G .

Список використаних джерел

1. Hall Ph. A contribution to the theory of groups of prime-power order. - Proc. London Math. Soc., 1933, 36, p. 29-95.
2. Bannuscher Wolfgang, Eine Verallgemeinerung des Regularitätsbegriffes bei p -Gruppen. I – „Wiss. Beitr. M. – Luther – Univ. Halle – Wittenberg“, 1981, М, №21, 51-63.

Надійшла до редколегії 17.03.2011

УДК 519.6: 514.7

Хомченко А.Н., д.ф.-м.н., проф.,
Мотайло А.П.**Геометричне конструювання базису
октаедра: модифікація метода Уачспреса**

Робота присвячена побудові дробово-раціонального шестивузлового базису октаедра геометричним методом Уачспреса та поліноміального базису октаедра з шістьма вузлами модифікованим методом Уачспреса. Отримані квадратичні функції є гармонічними за Лапласом.

Ключові слова: октаедр, дробово-раціональний базис, поліноміальний базис, метод Уачспреса.

A.N. Khomchenko, Dr of Phys and Math Sc,
A.P. Motailo**Geometric construction of basis octahedron:
modification of Wachspress method**

Work is devoted to building the fractional-rational basis of the octahedron with six nodes by Wachspress's geometric method and polynomial basis of the octahedron with six nodes by Wachspress method modification. Obtained quadratic functions are harmonic functions from Laplace.

Key Words: octahedron, fractional-rational basis, polynomial basis, Wachspress method.

*E-mail: mmkntu@gmail.com, akilehzna@ukr.net

Статтю представив д.ф.-м.н., професор Кириченко В.В.

Введення.

При розв'язанні задач математичної фізики наближеними методами просторову область довільної форми прийнято розбивати тетраедрами та гексаедрами. Зараз з'явилися нові конструкції, що складаються з тетраедрів та октаедрів, які заповнюють простір без пропусків і накладок. Тому октаедр стали розглядати як самостійний скінчений елемент. І, як наслідок, постало питання про наявність відповідного базису (базисів).

Аналіз попередніх публікацій, мета статті.

На сьогоднішній день про існування будь-яких базисів октаедра можна дізнатись з робіт [1,2]. В них розглядаються октаедри з вузлами у вершинах та барицентрі. Такі базиси представляють інтерес при розв'язанні задач про безвихрові течії ідеальних рідин в 3D, про що пише автор [2]. Якщо поставлена узагальнена задача Діріхле для рівняння Лапласа в октаедрі з дискретно-заданими граничними умовами, то для її розв'язання необхідно мати базис шестивузлової моделі октаедра.

Побудова поліноміального базису октаедра з 6-ма вузлами засобами матричного аналізу пов'язана з певними труднощами: доданки інтерполяційного полінома другого степеня доводиться обирати інтуїтивно. Як правило, для

елементів, наділених надмірною симетрією, як октаедр, прямий алгебраїчний метод не призводить до однозначних результатів або взагалі не може бути застосований. Так в 2D на правильному шестикутнику вдалося побудувати систему інтерполяційних функцій, лише вдавшись до наглядної геометрії. Слід відмітити, що для опуклих правильних n -кутників задачу про побудову системи базисних функцій розв'язано в загальному вигляді американським геометром Уачспрессом [3]. При цьому отримані "множення площин" інтерполяційні функції є дробово-раціональними, починаючи з $n=5$. (Основи геометричних підходів до побудови базисних функцій також можна знайти у Барнхіла та Грегорі (1976), Маклеода (1977) для плоских криволінійних елементів). У просторі системою базисних функцій оснащені тетраедр та гексаедр. Представляє інтерес можливість отримати функції форми шестивузлового октаедра.

Мета статті – користуючись ідеями Уачспреса, геометричним методом побудувати поліноміальний базис октаедра з 6-ма вузлами.

Основна частина.

Розглянемо октаедр, центр, якого розташований в початку системи координат $Oxuz$, а вершини (вузли) є точками дотику октаедра

описаної сфери одиничного радіуса. Координатні осі направлені так, як показано на рис.1.

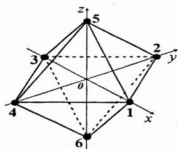


Рис. 1 Октаєдр з 6-ма вузлами

$$\begin{aligned} |x| &\leq 1, \\ |y| &\leq 1, \\ |z| &\leq 1, \\ 1 - |x| - |y| - |z| &\geq 0. \end{aligned}$$

Поставимо задачу: знайти систему з шести функцій $N_i(x, y, z)$, що мають наступні

$$N_i(x_k, y_k, z_k) = \delta_{ik}; \quad \sum_{i=1}^6 N_i(x, y, z) = 1, \quad (1)$$

де δ_{ik} - символ Кронекера; i - номер функції; k - номер вузла. В силу симетрії октаєдра для створення повного набору функцій $N_i(x, y, z)$, $i = \overline{1, 6}$, достатньо отримати одну з них, наприклад, $N_1(x, y, z)$. Для побудови функції форми N_1 у вузлі 1, дотримуючись методу Уачспреса, "перемножимо площини", які лежать навпроти цього вузла, а саме, площини, що містять грані октаєдра 235, 236, 345, 346. Отримаємо функцію N_1 у вигляді:

$$N_1 = \frac{1}{16} (1 + x - y - z)(1 + x - y + z)(1 + x + y - z)(1 + x + y + z) \quad (2)$$

Очевидно, що такий спосіб побудови забезпечує рівність нулю функції N_1 в усіх вузлах, окрім першого. При цьому нормуючий множник $\frac{1}{16}$ гарантує виконання рівності $N_1(1, 0, 0) = 1$.

Решта функцій $N_i, i = \overline{2, 6}$, можна отримати як "множенням площин", що лежать навпроти відповідного вузла, так і безпосередньо з функції N_1 , а саме:

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{1}{16} (1 + y - z - x)(1 + y - z + x)(1 + y + z - x)(1 + y + z + x), \\ N_3 &= \frac{1}{16} (1 - x - y - z)(1 - x - y + z)(1 - x + y - z)(1 - x + y + z), \\ N_4 &= \frac{1}{16} (1 - y - z - x)(1 - y - z + x)(1 - y + z - x)(1 - y + z + x), \\ N_5 &= \frac{1}{16} (1 + z - x - y)(1 + z - x + y)(1 + z + x - y)(1 + z + x + y), \\ N_6 &= \frac{1}{16} (1 - z - x - y)(1 - z - x + y)(1 - z + x - y)(1 - z + x + y). \end{aligned} \quad (3)$$

Знайдемо суму (2)-(3) та визначимо базисні функції $N_i, i = \overline{1, 6}$, як дробово-раціональні

функції вигляду $N_i = \frac{N_i^1}{\sum_{i=1}^6 N_i^1}, i = \overline{1, 6}$. Після

спрощень отримаємо:

$$\begin{aligned}
N_{1,3} &= \frac{1 \pm 4x + 6x^2 - 2y^2 - 2z^2 \pm 4x^3 \mp 4xy^2 \mp 4xz^2 + x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2x^2z^2}{6 + 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 6x^4 + 6y^4 + 6z^4 - 12x^2y^2 - 12y^2z^2 - 12x^2z^2}; \\
N_{2,4} &= \frac{1 \pm 4y + 6y^2 - 2x^2 - 2z^2 \pm 4y^3 \mp 4yz^2 \mp 4yx^2 + x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2x^2z^2}{6 + 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 6x^4 + 6y^4 + 6z^4 - 12x^2y^2 - 12y^2z^2 - 12x^2z^2}; \\
N_{5,6} &= \frac{1 \pm 4z + 6z^2 - 2x^2 - 2y^2 \pm 4z^3 \mp 4zx^2 \mp 4zy^2 + x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2x^2z^2}{6 + 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 6x^4 + 6y^4 + 6z^4 - 12x^2y^2 - 12y^2z^2 - 12x^2z^2}.
\end{aligned} \quad (4)$$

Зауважимо, що функції, визначені рівностями (4), задовольняють умови (1). При цьому кожна з функцій $N_i, i=1,6$, в центрі октаедра приймає значення, рівне $\frac{1}{6}$. Таким чином, отримано дробово-раціональний базис октаедра з шістьма вузлами інтерполяції. На думку Ішигуро, який удосконалив функції Уачспреса на шестикутнику шляхом введення функціонального множника в знаменнику, дробово-раціональний базис страждає на суттєвий недолік: обчислення інтегралів від таких функцій призводить до важко контрольованої похибки [4].

Модифікуємо метод Уачспреса з метою побудови поліноміального базису октаедра з 6-ма вузлами. Для цього вимагатимемо, щоб функції форми $N_i(x, y, z), i=1,6$, задовольняли не тільки критерію Лагранжа (1), але й додатковій умові:

$N_i(0,0,0) = \frac{1}{6}, i=1,6$. Оскільки для конструювання унітарного базису октаедра з 6-ма вузлами достатньо отримати будь-яку одну з функцій N_i , детально викладемо процес побудови $N_1(x, y, z)$. Решта функцій $N_i(x, y, z), i=2,6$ легко отримати з неї.

Процедура побудови $N_1(x, y, z)$ передбачає введення чотирьох допоміжних функцій $N_1^{(j)}(x, y, z), j=1,4$, кожна з яких, з точки зору геометрії, представляє собою поверхню (по Уачспресу – “добуток площин”). Питання про те, які площини перемножувати, ми вирішуємо не так, як сам Уачспрес. Природно, в першу чергу, розглядати площини, що лежать навпроти вузла 1 октаедра. Їх всього чотири (грані октаедра, які не проходять через вершину 1).

Якщо перемножити ліві частини загальних рівнянь цих площин для побудови функції $N_1(x, y, z)$, то степінь отриманого полінома буде дорівнювати 4, як видно з (2). При цьому з'являться кратні нулі у вузлах, що небажано. Тому будемо розглядати “добутки площин” без спільних вузлів. На рис.2а представлена композиція з двох площин: одна проходить через вузли 235 октаедра, друга – через ребро 46 та внутрішню точку $M_1(a, 0, 0)$, де $-1 < a < 0$, що лежить на від'ємній півосі OX між центром і вузлом 3 октаедра. Перемноживши ліві частини рівнянь указаних площин, будемо шукати функцію $N_1^{(1)}$ у вигляді:

$$N_1^{(1)}(x, y, z) = \frac{1}{\mu}(1 + x - y - z) \left(1 - \frac{x}{a} + y + z\right) \quad (5)$$

де $\frac{1}{\mu}$ – нормуючий множник, що забезпечує виконання умови $N_i(x_k, y_k, z_k) = \delta_{ik}, i, k=1,6$.

Неважко показати, що $a = -\frac{1}{2}$, $\mu = 6$, тобто точка $M_1\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ й функція $N_1^{(1)}$ визначаються однозначно, причому

$$N_1^{(1)}(x, y, z) = \frac{1}{6}(1 + x - y - z)(1 + 2x + y + z) \quad (6)$$

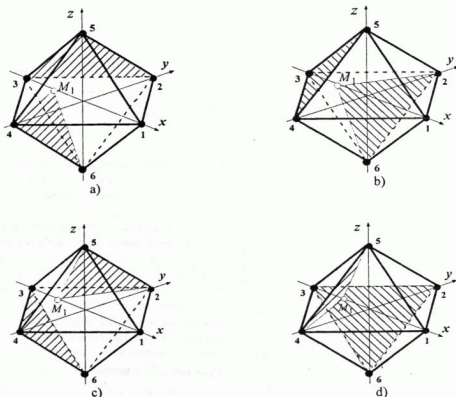


Рис.2. Композиції з двох площин до побудови допоміжних функцій:

а) $N_1^{(1)}$, б) $N_1^{(2)}$, в) $N_1^{(3)}$, г) $N_1^{(4)}$

На рис.2б,с,д зображено композиції пар площин до побудови допоміжних функцій $N_1^{(2)}$, $N_1^{(3)}$, $N_1^{(4)}$ відповідно. В кожному випадку одна з площин містить певну, всякий раз нову (одну з чотирьох) грань октаедра, що лежить навпроти вузла 1, друга – проходить через “вільне” (від вузла 1 і першої площини) ребро октаедра й внутрішню точку $M_1\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$.

Таким чином, довільна з чотирьох функцій $N_1^{(j)}(x, y, z)$ може бути отримана множенням двох поліномів, кожен з яких дорівнює одиниці у вузлі 1 октаедра, а у решта вузлах обертається в нуль, а саме:

$$\begin{aligned} N_1^{(2)} &= \frac{1}{6}(1+x+y-z)(1+2x-y+z); \\ N_1^{(3)} &= \frac{1}{6}(1+x+y+z)(1+2x-y-z); \\ N_1^{(4)} &= \frac{1}{6}(1+x-y-z)(1+2x+y-z). \end{aligned} \quad (7)$$

В центрі октаедра всі $N_1^{(j)}(x, y, z)$, $j = \overline{1, 4}$, приймають значення $\frac{1}{6}$.

Визначимо функцію N_1 як середнє арифметичне функцій $N_1^{(j)}$, $j = \overline{1, 4}$, тобто:

$$N_1(x, y, z) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 N_1^{(j)} = \frac{1}{6}(1+3x+2x^2-y^2-z^2). \quad (8)$$

Зауважимо, що при такому способі побудови функція N_1 збирає всі властивості допоміжних функцій $N_1^{(j)}$, $j=1,4$, тобто є інтерполяційним коефіцієнтом типу Лагранжа і в центрі октаедра приймає значення $\frac{1}{6}$.

Решта базисних функцій легко одержати з N_1 :

$$\begin{aligned} N_2(x, y, z) &= \frac{1}{6}(1 + 3y + 2y^2 - x^2 - z^2) \\ N_3(x, y, z) &= \frac{1}{6}(1 - 3x + 2x^2 - y^2 - z^2) \\ N_4(x, y, z) &= \frac{1}{6}(1 - 3y + 2y^2 - x^2 - z^2) \\ N_5(x, y, z) &= \frac{1}{6}(1 + 3z + 2z^2 - x^2 - y^2) \\ N_6(x, y, z) &= \frac{1}{6}(1 - 3z + 2z^2 - x^2 - y^2) \end{aligned} \quad (9)$$

Слід відмітити, що отримані функції (8), (9) є поліномами другого степеня на відміну від базисних функцій (4), побудованих стандартним методом Уачспреса, кожна з яких представлена відношенням многочленів четвертого степеня.

Інтерполяційний поліном в довільній внутрішній точці октаедра, визначений як зважене середнє вузлових значень Φ_i :

Список використаних джерел

1. Greiner G. Hierarchical tetrahedral-octahedral subdivision for volume visualization / G. Greiner, R. Grosso // The Visual Computer. - 2000. - I. 16 - P. 357-369 - Режим доступу: <http://www.springerlink.com/content/r3jrlrmj01dguu73/fulltext.pdf>
2. Bruijn H. Numerical Method for 3D Ideal Flow / Han de Bruijn // Режим доступу: <http://hdebruijn.soo.dto.tudelft.nl/jaar2010/octaeder.pdf>.

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{i=1}^6 N_i(x, y, z) \cdot \Phi_i, \quad (10)$$

також є многочленом другого степеня.

Відмітимо, що функції (8), (9) побудованого шестивузлового базису октаедра – гармонічні по Лапласу. Отже рівність (10) є розв'язком узагальненої задачі Діріхле для рівняння Лапласа в октаедрі з дискретно заданими граничними умовами.

Висновки, перспективи.

Модифікований метод Уачспреса побудови 6-вузлового базису октаедра – далеко не єдиний, що призводить до системи функцій вигляду (8), (9). Автори вивчають можливості інших підходів до побудови такого базису, наприклад, ймовірно-геометричного, алгебраїчного, а також метода виключення центральної функції з 7-вузлової моделі базису октаедра [1,2]. Детальніше кожен з вказаних методів буде описаний в окремих публікаціях. Цікаво протестувати отримані базиси октаедра узагальненою барицентричною задачею Мьобіуса, а також з їх допомогою схематизувати однокрокові блукання частинки всередині октаедра із випадковим стартом.

3. Wachspress E.L. A rational finite element basis. / E.L. Wachspress. - Academic Press, New York, 1975. - 344 p.
4. Ishiguro M. Construction of hexagonal basis functions applied' in Galerkin-type finite element method / J. Inf. Process. 1984. V. 7, №2. - P. 89 – 95.

Надійшла до редколегії 17.03.11

УДК 512.55

В'ячеслав В. Шви́ров, асистент

**Про кількість класів еквівалентності
напівланцюгових нерозкладних кілець.**

У роботі встановлюються зв'язки між кількістю класів еквівалентності напівланцюгових нерозкладних кілець та числами Каталана. Також отримані комбінаторні результати про кількість класів кілець, що мають скінченну розмірність Круля.

Ключові слова: напівланцюгове кільце, розмірність Круля кілець, первинний сагайдак, числа Каталана.

E-mail: slavik_asas@mail.ru

Стаття представлена доктором ф.-м. наук, професором Кириченко В. В.

1 Вступ. Основні визначення.

Метою роботи є вивчення деяких комбінаторних властивостей, що виникають при класифікації напівланцюгових кілець із скінченною розмірністю Круля, кусково нетерових напівланцюгових кілець, та напівланцюгових кілець з нетеровою діагоналлю нільпотентним первинним радикалом, первинний сагайдак яких є ланцюгом.

Розмірність Круля напівланцюгових кілець вивчалася багатьма авторами. Чаттерс у [6] доводить структурну теорему для первинних напівланцюгових кілець зі скінченною розмірністю Круля. М. Апхам [4] отримує структурну теорему для неінгулярних напівланцюгових кілець з розмірністю Круля одиниця. У випадку напівланцюгових кілець із скінченною розмірністю Круля виникають комбінаторні результати, пов'язані із класифікацією таких кілець. Зв'язки між кількістю допустимих послідовностей та числами Каталана вивчалися у [8]. В роботі істотно використовуються результати робіт, Н.М. Губарені, В.В. Кириченко [1],[2], а також Г. Пуни́нського [5].

Означення 1.1. Модуль M називається ланцюговим, якщо ґратка його підмодулів утворює ланцюг, тобто множина всіх підмодулів модулю M є лінійно впорядкована відносно включення. Модуль називається напівланцюговим, якщо він розкладається у скінченну пряму суму ланцюгових модулів.

Означення 1.2. Кільце R називається ланцю-

Vjacheslav V. Shvyrov, assistant

**On the number equivalence classes of
serial indecomposable rings.**

We learn connections with the number equivalence classes of serial indecomposable rings and Catalan numbers. Also are obtained some combinatorial results about serial rings with finite Krull dimension.

Key Words: serial ring, Krull dimension of the ring, prime quiver, Catalan numbers.

говим справа, якщо R_R є правим ланцюговим модулем, тобто ґратка правих ідеалів є лінійно впорядкована.

Означення 1.3. Кільце R називається напівланцюговим справа, якщо R_R є напівланцюговим модулем. Кільце яке є напівланцюгове справа та зліва називається напівланцюговим.

Означення 1.4. Нехай M – правий R -модуль. Розмірність Круля модуля M будемо позначати через $Kdim(M)$ і визначимо наступним чином: якщо $M = 0$, тоді $Kdim(M) = -1$; якщо α – ординал і $Kdim(M) \not\leq \alpha$, тоді $Kdim(M) = \alpha$, якщо не існує нескінченного убиваючого ланцюга

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$$

підмодулів M_i , таких, що для $i = 1, 2, \dots$ $Kdim(M_i/M_{i+1}) \not\leq \alpha$.

Якщо не існує ординалу α , такого, що $Kdim(M) = \alpha$, то будемо говорити, що M не має розмірності Круля.

Означення 1.5. Правою розмірністю Круля кільця R називається розмірність Круля правого регулярного модуля R_R і будемо позначати її через $Kdim(R)$.

Наступний факт ([3]) корисний при обчислюванні розмірності Круля. Якщо модуль M має розмірність Круля, тоді $Kdim(M) \leq \sup\{Kdim(M/E) + 1 \mid E - \text{істинний підмодуль } M\}$.

Твердження 1. ([5]) Для кожного напівланцюгового кільця R і натурального n , $Kdim(R) \geq n$ тоді і тільки тоді, коли $Kdim(R_i) \geq n$ для кожного i .

2 Класи еквівалентності напівланцюгових кілець з скінченною розмірністю Круля.

Означення 2.1. Кільце A називається кусково нетеровим справа, якщо воно задовільняє наступним умовам

i) A має скінченну множину попарно ортогональних примітивних ідемпотентів e_1, \dots, e_n , таких, що $1 = e_1 + \dots + e_n$.

ii) $e_i A e_i$ – нетерова справа для кожного примітивного ідемпотента e_i , $i = 1, \dots, n$ (див. [2]).

Аналогічно визначаються кусково нетерові зліва кільця. Кусково нетерове зліва й справа кільце називається кусково нетеровим.

У зв'язку з твердженням 1 для напівланцюгових кусково нетерових кілець введемо наступну класифікацію таких кілець. Нехай A і B напівланцюгові кусково нетерові кільця, що мають розмірність Круля 1. $1_A = e_1 + e_2 + \dots + e_n$, $1_B = f_1 + f_2 + \dots + f_m$. Позначимо $A_i = e_i A e_i$, $B_j = f_j B f_j$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Покладемо

$$A \sim B \Leftrightarrow \{n = m, \sum_{i=1}^n Kdim(A_i) = \sum_{j=1}^m Kdim(B_j), i, j = 1, \dots, n\}.$$

Позначимо через $\mathcal{A}_{1,n}$ клас всіх напівланцюгових кусково нетерових кілець, таких, що мають розмірність Круля одиниця і для кожного кільця $A \in \mathcal{A}_{1,n}$ одиниця є сумою n ортогональних ідемпотентів $1 = e_1 + \dots + e_n$, $n \in \mathbb{N}$. Якщо $\sum_{i=1}^n Kdim(A_i) = s$ для деякого i . Відповідний клас еквівалентності будемо позначати через $\mathcal{A}_{1,n,s}$.

Справедлива наступна теорема

Теорема 1. Нехай $n \in \mathbb{N}$, тоді кількість класів еквівалентності за відношенням \sim на множині $\mathcal{A}_{1,n}$ напівланцюгових кусково нетерових кілець дорівнює $n + 1$.

Доведення. Нехай A – довільне напівланцюгове кусково нетерове кільце. Тоді для будь-

якого локального ідемпотенту e , eAe – ланцюгове нетерове кільце. Одже $eAe \in$ або дискретно нормоване кільце, або артинове ланцюгове кільце. У першому випадку розмірність Круля $Kdim(eAe) = 1$ оскільки eAe двобічно нетерове і ланцюгове. У другому випадку розмірність Круля дорівнює 0, оскільки eAe артинове.

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $Kdim(A_i) \leq 1$, $i = 1, \dots, n$ для будь-якого кусково нетерового кільця. Звідси

$$\sum_{i=1}^n Kdim(A_i) \leq n, \quad i = 1, \dots, n.$$

Кількість всіх різних послідовностей довжини n з нулів та одиниць і впорядкованих за зростанням є $n + 1$, одже кількість класів еквівалентності дорівнює $n + 1$.

Позначимо через $\mathcal{A}_{k,n}$ клас всіх нерозкладних напівланцюгових кілець, таких, що мають скінченну розмірність Круля, яка дорівнює k , $k \in \mathbb{N}$ і для кожного кільця

$$A \in \mathcal{A}_{k,n} \Leftrightarrow Kdim(A) = k, \quad 1_A = e_1 + e_2 + \dots + e_n.$$

Нехай $A, B \in \mathcal{A}_{k,n}$. Покладемо

$$\begin{aligned} A \sim_k B &\Leftrightarrow \{\exists \pi_n \in S_n \mid \pi_n(f_1, \dots, f_n) = \\ &= (f'_1, \dots, f'_n) \Rightarrow Kdim(e_i A e_i) = \\ &= Kdim(f'_i B f'_i), \quad i = 1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

де S_n симетрична група перестановок на множині з n елементів. Тобто два кільця належать до одного класу тоді і тільки тоді, коли можливо так розташувати їх ідемпотенти, що відповідні діагональні елементи у декомпозиціях Пірса цих кілець мають однакові розмірності Круля.

Позначимо через $\mathcal{A}_{k,n}/\sim_k$ множину класів еквівалентності за відношенням \sim_k . Нехай C_n^k позначає кількість сполучень.

Теорема 2. Кількість класів еквівалентності на множині $\mathcal{A}_{k,n}$ за відношенням \sim_k дорівнює

$$|\mathcal{A}_{k,n}/\sim_k| = \sum_{i=1}^{n-1} C_{k+i-1}^k = C_{n+2k-2}^k - 1.$$

Доведення. За твердженням 1

$$Kdim(A) \geq Kdim(A_i), \quad Kdim(A) = k,$$

для будь-якого кільця $A \in A_{k,n}$. Одже $Kdim(A_i)$ може набувати значень з множини $\{0, 1, \dots, k\}$. Нехай $A \in A_{k,n}$ довільне кільце, $1 = e_1 + e_2 + \dots + e_n$. Через те, що кільце A має скінченну розмірність Крулля k отримуємо послідовність натуральних чисел $\{Kdim(A_1), Kdim(A_2), \dots, Kdim(A_n)\}$, знову з твердження 1 випливає, що $Kdim(A) = \max A_i$, $i = 1, \dots, n$ та обов'язково існує деякий номер i , такий, що $Kdim(A_i) = k$. Одже кількість класів збігається з кількістю різних послідовностей натуральних чисел від 0 до k довжини n впорядкованих за зростанням. Кількість таких послідовностей будемо шукати у вигляді суми $S = s_1 + s_2 + \dots + s_n$, де s_i – кількість послідовностей довжини n , що містять рівно i разів число k . Будемо вважати різні числа від 0 до $k-1$ об'єктами. Виникає наступна комбінаторна задача. Маємо об'єкти $k-1$ типів, потрібно обчислити скільки комбінацій можливо зробити так, щоби у кожному комбінацію входило $n-i$ об'єктів. Кожну комбінацію закодуємо за допомогою 0 та 1, 1 буде відповідати об'єктам, 0 виконувати функцію роздільника. Тоді, наприклад, записав $n-i$ одиниць та $k-1$ нуль отримуємо комбінацію, за якою обирається $n-i$ об'єктів першого типу та жодного інших типів. Виконуючи переставки всіма способами $n-i$ одиниць та $k-1$ нулів, кожен раз будемо отримувати деяке розташування з $n-i$ чисел.

$$P(n-i, k-1) = \frac{(n-i+k-1)!}{(n-i)!(k-1)!} = C_{n+k-i-1}^{n-i}.$$

Звідси

$$S = C_{n+k-2}^{n-1} + C_{n+k-3}^{n-2} + \dots + C_k^1 = \sum_{i=1}^{n-1} C_{i+k-1}^i.$$

Через те, що $C_k^n = C_n^{n-k}$

$$\sum_{i=1}^{n-1} C_{i+k-1}^i = \sum_{i=1}^{n-1} C_{i+k-1}^{k-1-i} = A$$

За одним з визначень біноміальних коефіцієнтів маємо

$$(x+1)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i x^i.$$

Одже, C_k^n – коефіцієнт біля x^i у розкладі $(x+1)^n$. Звідси, S є сумою коефіцієнтів біля x^{k-1} у виразі

$$(x+1)^k + \dots + (x+1)^{n+k-2}.$$

Спрощуючи як суму геометричної прогресії, отримуємо

$$\begin{aligned} (x+1)^k + \dots + (x+1)^{n+k-2} &= \\ &= \frac{(x+1)^k(1 - (x+1)^{n+k-2})}{1 - (x+1)} = \\ &= \frac{(x+1)^k((x+1)^{n+k-2} - 1)}{x} = \\ &= \frac{(x+1)^{n+2k-2} - (x+1)^k}{x} \end{aligned}$$

Звідси, S – коефіцієнт біля x^k у виразі

$$(x+1)^{n+2k-2} - (x+1)^k$$

Таким чином, $S = C_{n+2k-2}^k - 1$.

3 Про кількість класів еквівалентності напівланцюгових нерозкладних кілець з нетеровою діагоналлю та нільпотентним первинним радикалом.

Означення 3.1. Послідовність p_1, p_2, \dots, p_t називається допустимою, якщо вона задовольняє наступним нерівностям

$$2 \leq p_i \leq p_{i+1} + 1, \quad i = 1, \dots, t-1, \quad p_t = 1,$$

або нерівностям

$$2 \leq p_i \leq p_{i+1} + 1, \quad i = 1, \dots, t-1, \quad 2 \leq p_t \leq p_1 + 1.$$

Означення 3.2. Сагайдак Q називається праворядним, якщо із кожної його вершини виходить не більше однієї стрілки.

Означення 3.3. Контуром сагайдака Q називається послідовність попарно різних вершин $\{i_1, \dots, i_t\}$ та стрілок $\{\sigma_1, \dots, \sigma_t\}$, таких, що кожна стрілка σ_k з'єднує i_k з i_{k+1} або i_{k+1} з i_k , крім того стрілка σ_t з'єднує i_t з i_1 або i_1 з i_t . Зв'язний сагайдак без контурів називається деревом. Коренем дерева називається вершина із якої не виходить стрілка.

Теорема 3. Кількість допустимих послідовностей довжини t дорівнює $(t-1)$ -му числу Каталана C_{t-1} .

Доведення. Для доведення теореми встановимо бієкцію між множиною всіх допустимих послідовностей довжини t та множиною всіх однокорених дерев з t вершинами. За [7] кількість всіх однокорених дерев з $t + 1$ вершиною є t -те число Каталана. Далі, будь-яке однокореневе дерево будемо називати просто деревом.

У випадку $t = 1$ маємо одну допустиму послідовність 1, якщо $t = 2$ маємо послідовність 21, продовжуючи подібним чином побудуємо всі допустимі послідовності довжини 3, це є 221, 321, легко бачити, що на i -му місці у послідовності може бути розташоване тільки одне з чисел $\{2, \dots, t - i + 1\}$, $i = 1, \dots, t - 1$. Допустимі послідовності довжини 4 є:

4321, 3321, 2321, 3221, 2221

Нехай $p_1, p_2, \dots, p_{t-1}, p_t$ – довільна допустима послідовність. Будемо з'являти кожний допустимий послідовності довжини t дерево з t вершинами наступним чином: проведемо на площині t паралельних прямих, які позначимо L_1, L_2, \dots, L_t , далі, читаючи послідовність зліва направо, з'явимо кожному p_j , $1 \leq j \leq t$ точку на L_{p_j} -й прямій. Позначимо точки через P_1, P_2, \dots, P_t . Будемо сполучувати точки P_i та P_j ребром тоді і тільки тоді, коли $p_j \leq p_i + 1$ і $i < j$, $1 \leq i, j \leq t$. За побудовою, отримана фігура є деревом, що містить t -точок. Відповідність у випадку $t = 4$ див. Рис 1.

Припустимо за індукцією, що допустимі послідовності довжини t відповідають всім деревам з t вершинами. Покажемо, що це справедливо і для випадку $t + 1$. Допустимі послідовності довжини $t + 1$ можна отримати додаючи одне з чисел $\{2, \dots, t + 1\}$ зліва до допустимої послідовності довжини t . Нехай p_1, \dots, p_t довільна допустима послідовність довжини t , T_t – дерево, що відповідає цій послідовності. Нехай c, p_1, \dots, p_t допустима послідовність довжини $t + 1$. Додамо точку C_i на деяку з прямих L_i , $i = 2, \dots, t + 1$. З'єднаймо ребром точку C_j з деякою точкою, що міститься на прямій L_{j-1} таким чином, щоб $c \leq p_1 + 1$. За побудовою ми знову отримаємо дерево, одже отримані фігури є всіма можливими деревами з $t + 1$ вершинами.

Навпаки можна показати, що будь-якому дереву з t вершинами можливо поставити у відповідність допустиму послідовність, якщо провести t паралельних прямих L_1, \dots, L_t , та побудувати всі можливі дерева з t вершинами, таким чином, щоб кожна вершина дерева належала деякій прямій L_i , $i = 1, \dots, t$. Якщо $P_i \in L_i$ будемо вважати $p_i = i$, $i = 1, \dots, t$. Обходячи всі вершини дерева по гілках, двигаячись з корня дерева, та починаючи з самої короткої лівої гілки будемо виписувати відповідні точки дерева справа наліво p_1, p_2, \dots, p_t , після проходження кожної гілки, пройдені ребра зтираються. За [7] кількість таких дерев є C_{t-1} .

У випадку $t = 4$ маємо

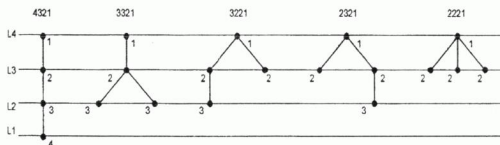


Рис 1.

Означення 3.4. Первинним рядом A -модуля M називається ряд

$$M \supset ML \supset \dots \supset ML^{k-1} \supset ML^k = 0.$$

Мінімальне число k , таке, що $ML^k = 0$ назива-

ється довжиною первинного ряду. Будемо позначати її через $k = pl(M)$.

Означення 3.5. Напівланцюгове нерозкладне кільце A з нетривіальною діагоналлю і нільпотентним первинним радикалом \mathcal{L} та первинним са-

гайдаком $PQ(A)$ будемо називати кільцем першого типу, якщо $PQ(A)$ є ланцюг.

Означення 3.6. Нехай A_1 та A_2 нерозкладні напівланцюгові кільця з нетеровою діагоналлю і нільпотентним первинним радикалом. Будемо говорити, що A_1 та A_2 належать до одного класу еквівалентності тоді і лише тоді, коли їх первинні сагайдаки збігаються і кільця A_1 , A_2 є першого типу.

Зв'язок між кількістю класів еквівалентності напівланцюгових нерозкладних кілець з нетеровою діагоналлю першого типу та числами Каталана виникає завдяки наступній теоремі

Теорема 4. [2] Нехай A є нерозкладне напівланцюгове кільце з нетеровою діагоналлю і нільпотентним первинним радикалом L

а) якщо первинний сагайдак кільця A є ланцюг, тоді

$$2 \leq p_i \leq p_{i+1} + 1, i = 1, \dots, t-1, p_t = 1,$$

б) якщо первинний сагайдак кільця A є цикл, тоді

$$2 \leq p_i \leq p_{i+1} + 1, i = 1, \dots, t-1, 2 \leq p_t \leq p_1 + 1,$$

Наслідок. Кількість класів еквівалентності нерозкладних напівланцюгових кілець з нетеровою діагоналлю нільпотентним первинним радикалом, первинний сагайдак яких є ланцюг довжини n є $n-1$ -ше число Каталана.

Доведення. За попередньою теоремою, якщо первинний сагайдак кільця є ланцюг довжини n , тоді довжини всіх первинних рядів задовольняють нерівностям.

$$2 \leq p_i \leq p_{i+1} + 1, i = 1, \dots, n-1, p_n = 1,$$

За визначенням послідовності p_1, \dots, p_n є допустимою, одже, за теоремою 2, кількість

допустимих послідовностей довжини n є $(n-1)$ -ше число Каталана, звідси, кількість класів еквівалентності дорівнює $n-1$ -му числу Каталана.

Література

1. N.M. Gubareni, V.V. Kirichenko, *Rings and Modules.*// Czestochowa. - 2001. - 306 p.
2. N.M. Gubareni, V.V. Kirichenko, *Serial Rings with T-nilpotent Prime Radical.*// Algebras and Representations Theory (2006) 9, pp. 147-160.
3. J. C. McConnell, J. C. Robson, *Noncommutative Noetherian rings*// Graduate Studies in Mathematics v. 30, -2001.
4. M. H. Upham, *Serial rings with right Krull dimension one*// J. Algebra 109 (1987), 319-333.
5. G. Puninski, *Serial Rings*// Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001
6. A.W. Chatters, *Serial rings with Krull dimension*, Glasgow Math. J. 32 (1990). 71-78.
7. Stanley, R.P. (1999): *Enumerative Combinatorics, Vol. 2.* Cambridge University Press (pp. 212-229)
8. J. O. Hanes, D.D. Wick, *The number of admissible sequences for indecomposable serial rings with simple projective module.* Proceedings of the Louisiana-Mississippi Section of Mathematical Association of America, Spring 2000.

Надійшла до редколегії 19.09.11

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

УДК 519.9

Григоренко О.Я., д.ф.-м.н., проф.,
Бергульов А.С., аспірант**Розрахунок напружено – деформованого
стану прямокутних анізотропних
пластин в просторовій постановці**

В статті розглядається задача про напружено-деформований стан прямокутних анізотропних пластин в просторовій постановці для однієї площини пружної симетрії. Вихідна задача описується системою трьох диференціальних рівнянь другого порядку в частинних похідних. Після використання методу сплайн-колокації у двох координатних напрямках і відокремлення змінних задача зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь високого порядку з граничними умовами на краях. Отримана красива задача розв'язується стійким методом дискретної ортогоналізації. Наведено результати розрахунків для випадку жорсткого закріплення і шарнірного опору сторін пластини та різної геометрії пластин.

Ключові слова: теорія пружності, прямокутна пластинка, анізотропний матеріал, метод дискретної ортогоналізації, метод сплайн-колокації.

A.Ya. Grigorenko, DSc, prof., A.S. Bergulyov,
postgraduate student**Calculation of the stress – strain state of
rectangular anisotropic plates in spatial
statement**

In the article the stress-strain state the problem of the rectangular anisotropic plates in spatial statement for one plane of elastic symmetry is considered. The initial problem is described by system of three differential equations of the second order in the partial derivatives. The problem is reduced to the system of the ordinary differential equations of the high order by the method of a spline-collocation in two coordinate directions and the division of variables with boundary conditions at edges. The received boundary-value problem has been solved by the stable numerical method of the discrete orthogonalization. The examples of calculations for a case of clamped and hinged of all edges of the plate and the different plates geometry are presented.

Key words: theory of elasticity, rectangular plate, anisotropic material, method of discrete orthogonalization, method of a spline-collocation.

*E-mail: ayagrigorenko@yandex.ru, bergulyov@yandex.ru

Статтю представив докт. фіз.-мат., проф. Мелешко В.В.

В роботі запропоновано ефективний чисельно-аналітичний підхід до дослідження напружено-деформованого стану прямокутних товстостінних анізотропних пластин з однією площиною пружної симетрії на основі теорії пружності. Підхід базується на використанні методу сплайн-апроксимації в двох напрямках і методу колокації, за допомогою яких вихідна тривимірна крайова задача для системи диференціальних рівнянь в частинних похідних зводиться до відповідної задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь високого порядку [7]. Отримана система розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації.

У випадку анізотропного тіла з однією площиною пружної симетрії закон Гука прийме вигляд [4]:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \alpha_{11}\sigma_{xx} + \alpha_{12}\sigma_{yy} + \alpha_{13}\sigma_{zz} + \alpha_{14}\sigma_{xy} \\ \varepsilon_y = \alpha_{12}\sigma_{xx} + \alpha_{22}\sigma_{yy} + \alpha_{23}\sigma_{zz} + \alpha_{24}\sigma_{xy} \\ \varepsilon_z = \alpha_{13}\sigma_{xx} + \alpha_{23}\sigma_{yy} + \alpha_{33}\sigma_{zz} + \alpha_{34}\sigma_{xy} \\ \varepsilon_{xy} = \alpha_{14}\sigma_{xx} + \alpha_{24}\sigma_{yy} + \alpha_{34}\sigma_{zz} + \alpha_{44}\sigma_{xy} \\ \varepsilon_{yz} = \alpha_{55}\sigma_{yz} + \alpha_{56}\sigma_{xz} \\ \varepsilon_{xz} = \alpha_{56}\sigma_{yz} + \alpha_{66}\sigma_{xz} \end{cases} \quad (1)$$

Коефіцієнти α_{ij} цієї системи визначаються із співвідношень:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{E_x}, \quad \alpha_{12} = -\frac{\nu_{yx}}{E_x} = -\frac{\nu_{xy}}{E_y},$$

$$\alpha_{13} = -\frac{\nu_{xz}}{E_z} = -\frac{\nu_{zx}}{E_x},$$

$$\alpha_{14} = -\frac{\eta_{xy,x}}{E_x} = -\frac{\eta_{x,xy}}{G_{xy}}, \quad \alpha_{22} = \frac{1}{E_y}, \quad (2)$$

$$\alpha_{23} = -\frac{\nu_{zy}}{E_y} = -\frac{\nu_{yz}}{E_z}, \quad \alpha_{24} = -\frac{\eta_{xy,y}}{E_y} = -\frac{\eta_{y,xy}}{G_{xy}},$$

$$\alpha_{33} = \frac{1}{E_z}, \quad \alpha_{34} = -\frac{\eta_{yz,z}}{E_z} = -\frac{\eta_{z,zy}}{G_{yz}},$$

$$\alpha_{44} = \frac{1}{G_{xy}}, \quad \alpha_{55} = \frac{1}{G_{yz}},$$

$$\alpha_{56} = -\frac{\mu_{xz,yz}}{G_{yz}} = -\frac{\mu_{yz,zx}}{G_{xz}}, \quad \alpha_{66} = \frac{1}{G_{xz}}.$$

В цих позначеннях:

E_x, E_y, E_z – модулі пружності по напрямках x, y, z відповідно; G_{yz}, G_{xz}, G_{xy} – модулі зсува для площин, паралельних координатним площинам $x = \text{const}, y = \text{const}, z = \text{const}$ відповідно; $\nu_{yx}, \nu_{yx}, \nu_{yx}, \nu_{yx}, \nu_{yx}, \nu_{yx}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} a_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} a_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} a_3 + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} a_4 + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} a_5 + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} a_6 + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} a_7 + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} a_8 + a_9 X + a_{10} Y$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} b_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} b_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} b_3 + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} b_4 + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} b_5 + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} b_6 + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} b_7 + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} b_8 + b_9 X + b_{10} Y \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + c_3 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + c_4 \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + c_5 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_6 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + c_7 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + c_8 Z$$

Коефіцієнти a_i, b_i, c_i в системі (3) визначаються механічними характеристиками матеріалу з врахуванням співвідношень (2).

Значення пружних характеристик анізотропного тіла з однією площиною

– коефіцієнти Пуассона, що характеризують поперечний стиск під час розтягу уздовж осей координат; $\mu_{xz,yz}, \mu_{yz,zx}$ – коефіцієнти, що характеризують зсуви в площинах, паралельних координатним площинам, обумовлені дотичними напруженнями, котрі діють в площинах, дотичних до інших координатних площин; $\eta_{xy,x}, \eta_{xy,y}, \eta_{yz,z}$ – коефіцієнти впливу, які характеризують зсуви в координатних площинах, обумовлені нормальними напруженнями; $\eta_{x,xy}, \eta_{y,xy}, \eta_{z,zy}$ – коефіцієнти впливу, які характеризують подовження, обумовлені дотичними напруженнями.

Після тотожних перетворень статичних і геометричних співвідношень та співвідношень закону Гука отримаємо розв'язувальну систему трьох диференціальних рівнянь другого порядку в частинних похідних відносно переміщень, що описує напружено-деформований стан пластини:

пружної симетрії отримуємо шляхом повороту системи координат на кут α докола вісі OZ та врахуванням пружних характеристик відповідного ортотропного тіла[4]:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= \cos^4 \alpha a_{11} + 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha a_{12} + \sin^4 \alpha a_{22} + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha a_{66}, \\ a'_{22} &= \sin^4 \alpha a_{11} + \cos^4 \alpha a_{22} + a_{66} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2 a_{12} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha, \\ a'_{33} &= a_{33}, \quad a'_{44} = a_{44} \cos^2 \alpha + a_{55} \sin^2 \alpha, \quad a'_{55} = a_{44} \sin^2 \alpha + a_{55} \cos^2 \alpha, \\ a'_{66} &= (a_{11} + a_{22} - 2 a_{12}) 4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + a_{66} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2, \\ a'_{12} &= (a_{11} + a_{22} - a_{66}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + a_{12} (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha), \\ a'_{13} &= a_{13} \cos^2 \alpha + a_{23} \sin^2 \alpha, \quad a'_{14} = 0, \quad a'_{15} = 0, \\ a'_{16} &= [2(a_{22} \sin^2 \alpha - a_{11} \cos^2 \alpha) + (a_{66} + 2 a_{12})(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)] \sin \alpha \cos \alpha, \\ a'_{23} &= a_{13} \sin^2 \alpha + a_{23} \cos^2 \alpha, \quad a'_{24} = 0, \quad a'_{25} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}a'_{26} &= [2(a_{22} \cos^2 \alpha - a_{11} \sin^2 \alpha) - (a_{66} + 2a_{12})(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)] \sin \alpha \cos \alpha, \\a'_{34} &= 0, \quad a'_{35} = 0, \quad a'_{36} = 2(a_{23} - a_{13}) \sin \alpha \cos \alpha, \quad a'_{45} = (a_{44} - a_{55}) \sin \alpha \cos \alpha, \\a'_{46} &= 0, \quad a'_{56} = 0\end{aligned}$$

Розв'язок системи (3) будемо шукати у вигляді:

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N u_{ij}(z) \varphi_i^u(x) \psi_j^u(y) \\v(x, y, z) &= \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N v_{ij}(z) \varphi_i^v(x) \psi_j^v(y) \\w(x, y, z) &= \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N w_{ij}(z) \varphi_i^w(x) \psi_j^w(y)\end{aligned}$$

де функції $u_{ij}(z), v_{ij}(z), w_{ij}(z)$ підлягають визначенню, а функції φ_i^a, ψ_j^a , $a = u, v, w$ визначаються через лінійні комбінації B_3 сплайнів на рівномірних сітках

$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = a$ та

$0 = y_0 < y_1 < \dots < y_M = b$ відповідно з

урахуванням граничних умов при $x = 0, x = a, y = 0, y = b$.

Надалі будемо представляти результати для нормованої функції переміщення $\frac{wE}{q}$. Були

отримані результати для випадку шарнірного опирання і жорсткого закріплення сторін пластини з наступними геометричними параметрами: $h = 0.1, X = 0, Y = 0, Z = 0$. Матеріал пластини вибирався склопластик, пружні характеристики якого наведені в безрозмірному вигляді:

$$E_x = 0.359 \cdot 10^6, E_y = 0.293 \cdot 10^6, E_z = 0.183 \cdot 10^6$$

$$G_{xy} = 0.076 \cdot 10^6, G_{xz} = 0.066 \cdot 10^6, G_{yz} = 0.063 \cdot 10^6$$

$$\nu_{xy} = 0.177, \nu_{yz} = 0.371, \nu_{xz} = 0.157$$

На поверхнях пластини $z = 0, z = h$ граничні умови мають вигляд:

$$\sigma_{z0} = 1, \quad \sigma_{z0} = \sigma_{z0} = \sigma_{z0} = \sigma_{z0} = \sigma_{z0} = 0$$

На краях пластини $x = 0, y = 0, x = 1, y = 1$ задаються умови жорсткого закріплення та шарнірного опору.

Порівняння результатів розрахунків в точках серединної площини:

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right),$$

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{3a}{10}, \frac{3b}{10}, \frac{h}{2}\right),$$

$$P_2 = (x_2, y_2, z_2) = \left(\frac{3a}{10}, \frac{7b}{10}, \frac{h}{2}\right),$$

$$P_3 = (x_3, y_3, z_3) = \left(\frac{7a}{10}, \frac{3b}{10}, \frac{h}{2}\right),$$

$$P_4 = (x_4, y_4, z_4) = \left(\frac{7a}{10}, \frac{7b}{10}, \frac{h}{2}\right).$$

при заданих таким чином параметрах і різних значеннях кутів повороту представлені в Табл. 1.

Кількість точок колокації в цих випадках вибиралось рівним 10, кількість точок ортогоналізації – 100. Ми бачимо, що при α , близькому до нуля і дев'яноста градусів, коли тіло має пружні властивості, близькі до ортотропних, спостерігається суттєва збіжність результатів, що іще раз підтверджує ефективність методу.

При шарнірному опиранні країв пластини маємо більший прогин, ніж при жорсткому закріпленні.

Таким чином, запропонований чисельно-аналітичний підхід є ефективним методом для дослідження напружено-деформованого стану анізотропних товстостінних пластин з однією площиною пружної симетрії в просторовій постановці.

Таблиця 1

α	$\frac{wE}{q}$, Жорстке закріплення					$\frac{wE}{q}$, Шарнірне опирання				
	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
0	120.7342	76.1745	76.1745	76.1745	76.1745	385.621	274.634	274.634	274.634	274.634
1	120.7446	76.0982	76.2695	76.2695	76.0982	389.750	278.399	277.449	277.449	278.399
15	136.4112	84.5261	87.1505	87.1505	84.5731	399.498	278.526	284.0384	284.0384	278.526
30	132.1389	81.3722	84.7720	84.7720	81.3722	402.520	278.025	286.541	286.541	278.025
45	140.2892	86.7794	89.0386	89.0386	86.7794	409.116	282.891	290.563	290.563	282.891
60	143.5547	89.6179	89.7173	89.7173	89.6179	418.873	291.983	293.023	293.023	291.983
75	141.8865	88.7771	87.9911	87.9911	88.7771	424.521	299.694	301.465	301.465	299.694
89	140.2566	87.3011	87.2250	87.2250	87.3011	422.748	297.487	299.588	299.588	297.487
90	140.2470	87.2562	87.2562	87.2562	87.2562	421.986	296.965	298.899	298.899	296.965

Список використаних джерел

1. Grigorenko Ya.M., Vlaiikov G.G., Grigorenko A. Ya. Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on the basis of different models//Kiev: Akadempriodika. – 2009. – 550p.
2. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.:Наука. – 1975. – 576стр.
3. Grigorenko Ya. M., Avramenko O.A. Stress-Strain Analysis of Closed Nonthin Orthotropic Conical Shells of Varying Thickness // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44, №6. – P. 635-643.
4. Теория упругости анизотропного тела. Лехницький С.Г. Изд. 2-е, Главная редакция

фізико-математической литературы
издательства «Наука», М., 1977, 416 стр.

5. R. Douglas Gregory A Partially Built-in Plate under Uniform Load // Journal of Elasticity – 2001. – №63. – P. 113-135.
6. Победра Б.Е., Шешенин С.В. Некоторые задачи об равновесии упругого параллелепипеда // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1981. – №1. – С. 133-138.
7. О.Я. Григоренко, А.С. Бергульов, С.М.Яремченко Розв'язання тривимірних крайових задач про згин прямокутних пластин // Доповіді НАН України. Механіка. – 2010. - №10. – С.44-51

Надійшла до редколегії 5.09.11

УДК 517.98

Ю. В. Ільченко, аспірантка
А. В. Чайковський, к. ф.-м. н., доцент

Про функцію Гріна для диференціально-го рівняння з запізненням аргументу та необмеженими операторними коефіцієнтами

Знайдено обмежений на осі розв'язок абстрактного лінійного диференціального рівняння першого порядку зі зсувом аргументу та необмеженими операторними коефіцієнтами спеціального вигляду. Побудовано функцію Гріна для зображення розв'язку.

Ключові слова: лінійне диференціальне рівняння, зсуви аргументу, банахів простір, операторні коефіцієнти.

Y. V. Ilchenko, PhD student
A. V. Chaikovskiy, candidate of physics and mathematics sciences

On Green's function for the differential equation with argument's delay and unbounded operator coefficients

The bounded on the axis solution of differential equations with argument's delay was found. Green's function was constructed for representation of this solution.

Key words: linear differential equation, argument's shifts, Banach space, operator coefficients.

Ilchenko.yulia@gmail.com, ChaikovskiyAV@ukr.net

Статтю представив доктор ф.-м.н., професор, академік НАН України М.О.Перестюк

Вступ.

Останні десятиріччя значного розвитку набули дослідження диференціальних рівнянь зі зсувами аргументу. Одним з важливих напрямків є дослідження існування обмежених на всій осі розв'язків для абстрактних функціонально-диференціальних рівнянь. Це питання вивчалось в роботах В.Ю. Слюсарчука[1, 2], В.Г. Курбатова[3], А.В. Чайковського[4, 5] та інших вчених. Зокрема, в роботі А.В. Чайковського [4] досліджене питання існування та єдиності обмежених розв'язків абстрактного лінійного рівняння зі зсувами аргументу у випадку обмежених операторних коефіцієнтів та знайдено зображення такого розв'язку за допомогою деякого аналога функції Гріна. Наведемо частинний випадок цього результату, який буде узагальнено в цій роботі.

Нехай $(B, \|\cdot\|)$ – комплексний банахів простір з нульовим елементом $\vec{0}$, $L(B)$ – простір усіх лінійних неперервних операторів в B , I – одиничний оператор.

Теорема (А. В. Чайковський). Нехай $A_0, A_1 \in L(B)$. Тоді для довільної обмеженої функції $y \in C(\mathbf{R}, B)$ існує єдиний обмежений

розв'язок рівняння

$$x'(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-1) + y(t), \quad t \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

тоді і лише тоді, коли

$$\forall \varphi \in \mathbf{R} \exists (i\varphi I + A_0 + A_1 e^{i\varphi})^{-1}. \quad (2)$$

При цьому справджується зображення

$$x(t) = \int_{t-1}^t (e^{(A_0+A_1 M)(t-s)} (I - M e^{A_0+A_1 M})^{-1} y)(s) ds, \\ t \in \mathbf{R}.$$

У випадку необмежених операторних коефіцієнтів A_0, A_1 це зображення перестає справджуватися через неможливість визначити відповідні експоненти. В цій роботі буде запропоноване інше зображення розв'язку, яке справджується і для випадку деяких класів необмежених операторних коефіцієнтів.

Допоміжні результати.

Лема 1. Нехай $A_0 : D(A_0) \subset B \rightarrow B$, $A_1 : D(A_1) \subset B \rightarrow B$ – замкнені оператори, $C \in L(B)$, справджується умова (2). Позначимо

$$F(\varphi) := (i\varphi I + A_0 + A_1 e^{i\varphi})^{-1} C, \quad \varphi \in \mathbf{R}.$$

Нехай $F \in C^2(\mathbf{R})$,

$$a_k := \sup_{\varphi \in [2\pi(k-1), 2\pi k]} (\|F(\varphi) - ((2\pi k + \pi)i)^{-1}\| + \|F'(\varphi)\| + \|F''(\varphi)\|) < +\infty, \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$b_k := \sup_{\varphi \in [2\pi(k-1), 2\pi k]} (\|((A_0 + A_1 e^{i\varphi})F(\varphi))''\| + \|((A_0 + A_1 e^{i\varphi})F(\varphi))'\| + \| (A_0 + A_1 e^{i\varphi})(F(\varphi) - ((2\pi k + \pi)i)^{-1}) \|) < +\infty, \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k < +\infty, \quad \sum_{k \in \mathbf{Z}} b_k < +\infty. \quad (3)$$

Розглянемо функцію $G: [0, 1] \times \mathbf{R} \rightarrow L(B)$, де

$$G(t, \varphi) := - \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N e^{(2\pi k - \varphi)it} \times \\ \times (A_1 e^{i\varphi} + A_0 + i(\varphi - 2\pi k)I)^{-1} C, \\ t \in (0, 1), \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

а в точках $t = 0$ та $t = 1$ функція довшачається за неперервність. Ця функція коректно визначена, 2π -періодична, двічі неперервно диференційовна по φ , причому функції G, G', G'' неперервно диференційовні по t ,

$$G'_t(t, \varphi) = (A_1 e^{i\varphi} + A_0)G(t, \varphi), \quad t \in [0, 1].$$

Доведення. Коректність цього означення забезпечується зображенням

$$G(t, \varphi) = - \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N e^{(2\pi k - \varphi)it} ((2\pi k - \pi)i)^{-1} \times \\ \times (A_1 e^{i\varphi} + A_0 + i(\varphi - \pi)I) \times \\ \times (A_1 e^{i\varphi} + A_0 + i(\varphi - 2\pi k)I)^{-1} C + \\ + \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N e^{(2\pi k - \varphi)it} ((2\pi k - \pi)i)^{-1} C = \\ =: G_1(t, \varphi) + G_2(t, \varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

де

$$G_1(t, \varphi) = - \sum_{k \in \mathbf{Z}} e^{(2\pi k - \varphi)it} ((2\pi k - \pi)i)^{-1} \times$$

$$\times (A_1 e^{i\varphi} + A_0 + i(\varphi - \pi)I) \times \\ \times (A_1 e^{i\varphi} + A_0 + i(\varphi - 2\pi k)I)^{-1} C$$

— абсолютно та рівномірно по $t \in [0, 1]$ та $\varphi \in [0, 2\pi]$ збіжний ряд (внаслідок умови (3)),

$$G_2(t, \varphi) = \frac{1}{2} e^{i(\pi - \varphi)} C, \quad t \in (0, 1), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Також функція G є двічі неперервно диференційовною по φ , причому

$$G'_\varphi(t, \varphi) = -itG(t, \varphi) + \\ + \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N e^{(2\pi k - \varphi)it} F'(\varphi - 2\pi k) \\ G''_\varphi(t, \varphi) = -2itG'_\varphi(t, \varphi) + t^2 G(t, \varphi) + \\ + \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N e^{(2\pi k - \varphi)it} F''(\varphi - 2\pi k).$$

Збіжність рядів випливає з умови (3).

Крім того, функції $G, G'_\varphi, G''_\varphi$ 2π -періодичні по φ . Дійсно,

$$G(t, \varphi + 2\pi) = - \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N-1}^{N-1} e^{(2\pi k - \varphi)it} \times$$

$$\times (A_1 e^{i\varphi} + A_0 + i(\varphi - 2\pi k)I)^{-1} C = G(t, \varphi) + \\ + \lim_{N \rightarrow +\infty} (e^{(2\pi N - \varphi)it} (A_1 e^{i\varphi} + A_0 + i(\varphi - 2\pi N)I)^{-1} - \\ - e^{(2\pi(-N-1) - \varphi)it} \times \\ \times (A_1 e^{i\varphi} + A_0 + i(\varphi - 2\pi(-N-1))I)^{-1}) C = \\ = G(t, \varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Періодичність похідних перевіряється аналогічно. Також маємо

$$(A_1 e^{i\varphi} + A_0)G(t, \varphi) = i(\pi - \varphi)G_2(t, \varphi) + \\ + (A_1 e^{i\varphi} + A_0 + i(\varphi - \pi)I) \times \\ \times \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N e^{(2\pi k - \varphi)it} ((2\pi k - \pi)i)^{-1} C - \\ - \sum_{k \in \mathbf{Z}} e^{(2\pi k - \varphi)it} (A_1 e^{i\varphi} + A_0) ((2\pi k - \pi)i)^{-1} \times \\ \times (A_1 e^{i\varphi} + A_0 + i(\varphi - \pi)I) \times \\ \times (A_1 e^{i\varphi} + A_0 + i(\varphi - 2\pi k)I)^{-1} C = \\ = (A_1 e^{i\varphi} + A_0 + i(\varphi - \pi)I) \times$$

$$\times \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N e^{(2\pi k - \varphi)it} ((2\pi k - \pi)i)^{-1} i(\varphi - 2\pi k) \times \\ \times (A_1 e^{i\varphi} + A_0 + i(\varphi - 2\pi k)I)^{-1} C + \\ + (G_2)'_t(t, \varphi) = G'_t(t, \varphi).$$

Тому з умов (3) випливає неперервність цієї похідної. Аналогічно розглядаються відповідні похідні по φ . \square

Основні результати.

Означення 1. Функцією Гріна, що відповідає оператору C , назвемо функцію

$$G_C : [0, 1] \rightarrow L(C_b(\mathbf{R}, B)),$$

яка визначається рівністю

$$G_C(t) = G_0(t, M),$$

де

$$G_0(t, e^{i\varphi}) := G(t, \varphi), \quad t \in [0, 1], \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Теорема 1. Нехай $A_0 : D(A_0) \subset B \rightarrow B$, $A_1 : D(A_1) \subset B \rightarrow B$ – замкнені оператори, $C \in L(B)$, справджується умова (2). Функція Гріна, що відповідає оператору C , є неперервно диференційовною на відрізку $[0, 1]$, та задовольняє рівності

$$G'_C(t) = (A_1 M + A_0) G_C(t), \quad t \in [0, 1], \\ G_C(0) - M G_C(1) = C.$$

Доведення. Твердження теореми випливають з леми 1 та рівності

$$G(0, \varphi) - e^{i\varphi} G(1, \varphi) = \\ = G(0, \varphi) - e^{i\varphi} (-e^{-i\varphi} + e^{-i\varphi} G_1(0, \varphi)) = C.$$

\square

Теорема 2. Нехай $A_0 : D(A_0) \subset B \rightarrow B$, $A_1 : D(A_1) \subset B \rightarrow B$ – замкнені оператори, $C \in L(B)$, справджується умова (2). Для довільної функції

$$y(t) = C y_0(t), \quad t \in \mathbf{R},$$

де функція $y_0 \in C(\mathbf{R}, B)$ обмежена на всій осі, функція

$$x(t) = \int_{t-1}^t [G_C(t-s) y_0](s) ds, \quad t \in \mathbf{R},$$

є обмеженим неперервно диференційовним розв'язком диференціального рівняння (1).

Доведення. Диференціюючи інтеграл за параметром та враховуючи теорему 1, отримаємо:

$$x'(t) = \int_{t-1}^t [G'_C(t-s) y_0](s) ds + \\ + [G_C(0) y_0](t) - [G_C(1) y_0](t-1) = \\ = \int_{t-1}^t [(A_1 M + A_0) G_C(t-s) y_0](s) ds + \\ + [(G_C(0) - M G_C(1)) y_0](t) = \\ = A_1 x(t-1) + A_0 x(t) + C y_0(t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

\square

Зауваження. У випадку обмежених операторних коефіцієнтів A_0, A_1 досить взяти $C = I$. У випадку, коли A_0 обмежений, а оператор A_1 має неперервний обернений, можна взяти $C = A_1^{-1}$, і вимагати виконання умови

$$\sup_{k \in \mathbf{N}} \sup_{|t| \in [2\pi(k-1), 2\pi k]} k \| (itI - A_0 - A_1 e^{-it})^{-1} \| < +\infty.$$

Приклад. Розглянемо рівняння вигляду

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t, s) = a \frac{\partial^4 z}{\partial s^4}(t, s) + b z(t, s) + \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}(t-1, s) + v(t, s), \\ t \in \mathbf{R}, s \in [0, 1],$$

$a > 1$, $b > 0$ – фіксовані числа. Його можна записати в абстрактній формі (1), при цьому припустимо, що

$$B = L_2([0, 1]), \quad A_0 = a \frac{d^4}{ds^4} + bI, \quad A_1 = \frac{d^2}{ds^2},$$

при цьому області визначення $D(A_0)$ і $D(A_1)$ можуть бути обрані так, що

$$\sigma(A_1) = \{-n^2 : n \in \mathbf{Z}\},$$

$$\sigma(A_0) = \{an^4 + b : n \in \mathbf{Z}\},$$

причому всі точки спектру є власними значеннями, які відповідають власним функціям

$$\{f_n := e^{ins}, s \in [0, 1] : n \in \mathbf{Z}\},$$

[7, с. 24]. При цьому така сім'я функцій є ортонормованим базисом в гільбертовому просторі

В. Звідси випливає, що якщо встановити відповідний ізометричний ізоморфізм простору B і простору l_2 , то оператори A_0, A_1 стануть діагональними операторами. При цьому

$$\forall \varphi \in \mathbb{R}$$

$$\sigma(i\varphi I + A_0 + A_1 e^{i\varphi}) = \{i\varphi + an^4 + b - e^{i\varphi} n^2 : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Оскільки для довільного $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(i\varphi + an^4 + b - e^{i\varphi} n^2) &= \\ &= an^4 + b - n^2 \cos \varphi = \\ &= (an^4 - n^2) + n^2(1 - \cos \varphi) + b > 0, \end{aligned}$$

то умова (2) справджується. Покладемо

$$C = (A_0 + I)^{-2}.$$

Тоді, враховуючи, що

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} |i\varphi + an^4 + b - e^{i\varphi} n^2|^{-1} = O(\varphi^{-1}), \quad |\varphi| \rightarrow +\infty,$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \|(A_0 + A_1 e^{i\varphi})^2 (i\varphi I + A_0 + A_1 e^{i\varphi})^{-2} C\| &= \\ &= O(\varphi^{-2}), \quad |\varphi| \rightarrow +\infty, \\ \|(A_0 + A_1 e^{i\varphi})((i\varphi I + A_0 + A_1 e^{i\varphi})^{-1} - (i\varphi I)^{-1}) C\| &= \\ &= O(\varphi^{-2}), \quad |\varphi| \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Тому $F \in C^2(\mathbb{R})$ і справджується умова (3), отже теорема 2 може бути застосована.

Висновки.

В роботі було знайдено обмежень на осі розв'язок абстрактного лінійного диференціального рівняння першого порядку зі зсувом аргументу для довільної обмеженої функції, якщо коефіцієнти рівняння не обов'язково обмежені оператори. Для зображення розв'язку побудований і досліджений аналог функції Гріна, записаний у вигляді ряду.

Література

1. Слюсарчук В. Е. Оценки спектров и обратимость функциональных операторов // Матем. сборник. – 1978. – 105(147), №2. – С. 268–285.
2. Слюсарчук В. Е. О разрешимости функциональных и функционально-дифференциальных уравнений в пространстве ограниченных на оси функций // В кн.: Приближенные и качественные методы теории дифференциально-функциональных уравнений. – К.: Институт математики АН УССР, 1983. – С. 83–88.
3. Курбатов В. Г. Об оценке спектральных радиусов запаздывающих операторов в пространстве непрерывных и ограниченных на оси функций // Функци. анализ и его приложения. – 1975. – Т. 9, Вып. 3. – С. 56–60.
4. Чайковский А. В. Про існування та єдиність обмежених розв'язків диференціальних рівнянь зі зсувами аргументу в банаховому просторі // Доповіді НАН України. – 2010. – №8. – С. 33–37.
5. Чайковский А. В. Дослідження одного лінійного диференціального рівняння за допомогою узагальнених функцій зі значеннями у банаховому просторі // Укр. матем. журн. – 2001. – 53, №5. – С. 688–693.
6. Чайковский А. В. Функції від оператора зсуву та їх застосування до різницьових рівнянь // Укр. Мат. Журн. – 2010. – №10. – С. 1408–1419.
7. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений – М.: Мир. – 1985. – 376 с.

Надійшла до редколегії 24.11.2011

УДК 539.3

Каліон В.А., к.ф.-м.н., доцент, Семенович К.О.,
бакалавр, Сорокін М.В., магістр**Метод гідродинаміки згладжених
частинок в задачах про рух в'язкої рідини**

У статті розглянуто використання методу гідродинаміки згладжених частинок (SPH) для розв'язання тестових модельних задач про розвиток течій Пуазейля та Куєта, а також для розв'язання задачі про набігання хвилі на платформу.

Ключові слова: метод гідродинаміки згладжених частинок, підйомна сила хвиль, підхід Лагранжа

Kalion V.A., Ph.D., Semenovich E.A., B.S.,
Sorokin M.V., M.D.**Smoothed particles hydrodynamics method
in viscous flow problems**

In the paper the smoothed particles hydrodynamics (SPH) method was implied to the test modeling of a propagation of Poiseuille and Kuett flows and modeling of the wave propagation on a deck too.

Key words: smoothed particle hydrodynamics method, uplift force, Lagrange approach

*E-mail: vitaliy.kalion@gmail.com, kalion@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф., академік НАН України М.О.Перестюк

1. Вступ

Руйнівна дія штормової хвилі пов'язана, в основному, з її підйомною силою (uplift force). Результатом дії підйомної сили хвиль на берегові споруди, такі як прибережні дороги й мости (Рис.1), термінали LNG, тимчасові будівельні риштування в гавані й біля пірсів, бурові платформи й т.і., є великі економічні збитки. Для розрахунків дії підйомної сили хвиль на прибережні структури найчастіше використовувалися емпіричні й експериментальні методи [1]. Серед небагатьох числових методів, які тільки в останній час почали використовуватися для оцінки впливу хвиль на структури типу пірса можна згадати напіваналітичний метод Каплана [2], VOF- [1] та SPH-алгоритми [3].

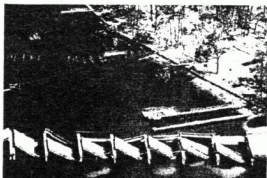


Рис. 1. Результат дії хвиль під час урагану Катерина в дельті Міссісіпі (2005).

Метод гідродинаміки згладжених частинок (Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH) був розроблений для моделювання невісесиметричних задач в астрофізиці. З кінця 80-х років минулого століття цей метод успішно використовується й в інших галузях, зокрема при моделюванні руху рідини з вільною поверхнею, плавання тіл тощо. Метод SPH виявився ідеальним для опису руху різноманітних багатозфазних потоків та потоків із вільною поверхнею, зокрема для моделювання набігання поодинокій хвилі на похилий берег, перекидання поодинокій хвилі [4] й оцінки сил, що руйнують берегові споруди [1,3].

1.1. Загальна постановка задачі

Рух ньютонівської в'язкої рідини в деякій області течії описується рівнянням Нав'є-Стокса, рівнянням нерозривності й деяким рівнянням стану:

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv^a}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x^a} + \frac{\partial}{\partial x^b} (\mu T^{ab}) + \rho F^a, \\ \frac{dp}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \\ p &= p(\rho). \end{aligned} \quad (1)$$

Головна ідея методу SPH полягає в тому, що досліджувана рідина замінюється сукупністю лагранжевих частинок. Кожна частинка має характеристики, такі як густина, просторові координати, швидкість, температура та ін.

Взаємодія частинок моделюється таким чином, що на кожну частинку впливають тільки частинки із певного околу даної частинки.

Отже, нехай $A(r)$ – деяка скалярна характеристика. Згідно методу згладжених частинок всі характеристики течії апроксимуються інтегралами:

$$A(r) = \int_{\Omega} A(r') W(r-r', h) dr'$$

Представляємо інтеграл у вигляді інтегральної суми по сусіднім до даної частинкам:

$$A_i(r) = \sum_{j=1}^n A_j \frac{m_j}{\rho_j} W(r-r_j, h_i) \quad (2)$$

Похідні функції $A(r)$ по просторовим змінним записуються наступним чином:

$$\nabla A_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} A_j \nabla W_{ij} \quad (3)$$

Отже, всі члени рівнянь руху, нерозривності та стану можна записати у вигляді (2) або (3). Таким чином, отримуємо систему рівнянь руху в дискретній формі (див. [4]).

В класичному методі SPH найбільш поширеним способом постановки умов на твердій межі є або використання «віртуальних» частинок, або деяких особливих «граничних» частинок:

а) Вводяться «жорсткі» граничні частинки Монахана, які розташовуються уздовж твердої межі в один ряд, не змінюють своїх координат з часом, і діють на частинки рухомого середовища за допомогою деякого потенціалу взаємодії.

б) «Псевдо-рідкі» частинки Моріса розташовуються уздовж твердої поверхні в декілька шарів. Звичайно використовують подвійний шар частинок, але інколи для забезпечення необхідної непроникуваності границь застосовують до п'яти шарів частинок. Такі частинки границі взаємодіють із частинками потоку за звичайними законами, але мають фіксоване просторове положення.

Особливістю реалізації граничних умов на вільній поверхні для методу SPH є та обставина, що граничні умови на вільній поверхні як такі задавати не потрібно. Потрібно лише визначити положення цієї поверхні в кожний момент часу.

Найчастіше частинки, що належать вільній поверхні, ідентифікуються за їх густиною. Даний підхід заснований на тому, що густина частинок, що належать вільній поверхні, менше густини внутрішніх частинок середовища через відсутність сусідів з одного боку границі.

Отже, положення вільної поверхні, виходячи з викладених вище міркувань, можна визначати за формулою:

$$\rho(x) > \frac{1}{2} \rho_0, \quad (4)$$

ρ_0 – густина рідини.

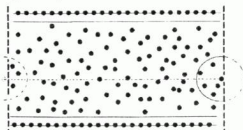


Рис.2. Приклад постановки горизонтальних періодичних граничних умов.

Приклад постановки періодичних граничних умов наведений на рис. 2. Нехай маємо область Ω , обмежену двома поверхнями, на яких задані періодичні крайові умови. Розглянемо частинки потоку, які перебувають на відстані, що не перевищує радіусу згладжування (тобто двох довжин згладжування), ліворуч від правої періодичної межі. Таким чином, коло впливу таких частинок не повністю потрапляє в область Ω . Частину кола впливу, що вийшла за межі області справа, періодично переносимо на ліву межу області обчислень. Це можна зробити, якщо побудувати зліва віртуальну частинку, яка має такі ж самі фізичні властивості (густина, швидкість), як і розглядувана частинка. Положення частинки по горизонталі переносимо на величину періоду.

Аналогічним чином будуються віртуальні частинки біля правої межі для тих частинок, які знаходяться на відстані не більше радіусу згладжування від лівої межі обчислень.

1.2 Обчислення підйомної сили хвиль

Як відомо, хвилі можуть мати значну підйомну силу, яка пошкоджує прибережні споруди (мости, пірси, портові споруди й т.і.).

В процесі розв'язання задач руху рідини виникає необхідність обчислення місцевого тиску на тверду границю. Один з можливих підходів запропоновано в роботі [5]:

$$\langle P(\bar{r}) \rangle_i = \sum_j P(\bar{r}_j) W(\bar{r}_j - \bar{r}_i, h_i) \omega_j \quad (5)$$

При оцінці локального тиску в даній т. М, його значення отримуємо шляхом осереднення значень тиску від частинок SPH в приграничній зоні навколо точки М. Отже, локальний тиск в т. М визначається за наступною формулою:

$$P_M = \int_{S_{\text{sector}}} P ds / \int_{S_{\text{sector}}} ds \quad (6)$$

Вираз (6) апроксимується із використанням формули трапецій, маємо:

$$P_M = \sum_i P_i dS_i / \sum_i dS_i \quad (7)$$

Оскільки поле тиску розглядається не точно на границі, а поблизу її, виникають похибки, зокрема, у значенні гідростатичної компоненти тиску. Тому вираз для P_i має вигляд [5]:

$$P_i = P_0 - \rho_i g (y_i - y_0) \quad (8)$$

Підйомна сила хвиль визначається за наступною формулою:

$$F = \sum_i P_i dS_i \quad (9)$$

1.3. Розв'язання задач

1.3.1. Течія Пуазейля та Куетта

В якості тестових задач розглядалися розвиток течії між двома паралельними площинами, $y=0$ та $y=l$, під дією сталої повздовжньої сили (течія Пуазейля) або за рахунок миттєвого руху площини $y=l$ (течія Куетта) зі сталою швидкістю U_0 . Початковий профіль швидкості – нульовий. Профіль швидкості в довільний момент часу може бути знайдений з рівнянь Нав'є-Стокса. Точний розв'язок в рядах для обох задач в довільний момент часу можна знайти в монографії Лі [6].

Нескінченість границі у напрямку потоку задаються за допомогою періодичних граничних умов. Параметри задач та кількість частинок:

$$20 \cdot 41 = 820 \text{ частинок, } \Delta r = 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

$$\text{Довжина згладжування } h = 3.5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

$$\text{Уявна в'язкість } \alpha = 1.95; \text{ течія ламінарна;}$$

$$\text{Початкові умови: } u_x = 0, u_y = 0$$

Після 12000 кроків ($t = 0.6 \text{ s}$) в обох випадках досягається стаціонарний стан. На Рис.3 а,б показані швидкості рідких частинок в моменти часу $t = 0.01 \text{ s}$ (ромби); 0.1 s (квадрати); 0.6 s (трикутники). Точні розв'язки нанесені неперервними лініями. Відхилення чисельних розв'язків від точних не більше $0.25 \pm 0.3 \%$.

З цих тестових задач можна зробити висновок, що, хоча при завданні уявної в'язкості не використовуються другі похідні швидкості,

SPH модель дає потрібний профіль швидкості з достатньою точністю.

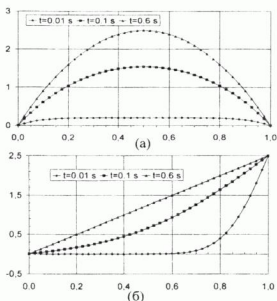


Рис. 3. Профілі швидкості для течії Пуазейля (а) й течії Куетта (б) в моменти часу $t = 0.01; 0.1; 0.6 \text{ s}$.

1.3.2. Набігання хвиль на платформу

Моделюється набігання регулярних (або нерегулярних) хвиль на платформу. Обчислення проводяться в прямокутній області $[17 \times 1.2 \text{ м}]$. Генерує хвилі на лівій границі вертикальний хвилепродуктор. Для гасіння хвиль праворуч знаходиться похила ділянка (берег). Між крайнім лівим положенням хвилепродуктора та початком похилої ділянки відстань 6 м. Глибина потоку 0,8 м. Положення платформи згідно рис. 4.

Параметри задачі та кількість частинок:
84800 рідких частинок, 1901 граничних

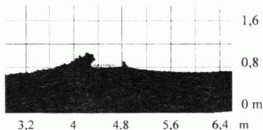


Рис. 4. Набігання хвилі на платформу.

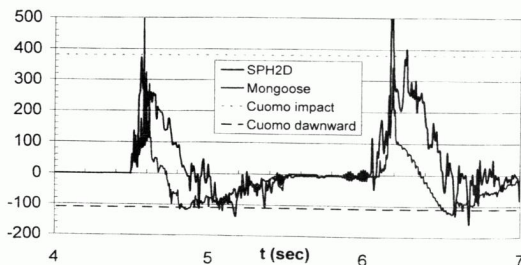


Рис. 5. Результати розрахунків дії підйомної сили хвиль на горизонтальну платформу.

частинок; 1781 частинок з фіксованим просторовим положенням, 40 частинок перешкоди;
Ліва границя: хвильпродуктор;
Права границя: похилий берег з кутом нахилу $\alpha = 4,2364^\circ$;
Течія турбулентна;
Початкові умови: $u_x = 0$, $u_y = 0$.

На рис. 4 зображено кадр мультимедійного фільму моменту набігання хвилі на платформу. На Рис. 5 зображено розраховані значення дії підйомної сили хвиль на платформу для різних моментів часу (SPH2D). На цьому ж малюнку наведено дані експериментів Куомо (Cuomo impact & downward) й дані розрахунків Тіринделлі за VOF алгоритмом (Mongoose) [1,3].

Висновки

В статті розглянуто основні особливості методу гідродинаміки згладжених частинок. Розв'язано дві тестові задачі, проведено порівняння із точними розв'язками. Отримані результати свідчать про достатню точність застосованої моделі, вдалося досягти точності 0,3 %. Також розглянуто задачу про набігання хвиль на платформу. Для останньої задачі, крім кадрів мультиплікації набігання хвиль на платформу, отримано значення підйомної сили хвиль, які добре співпадають з відомими даними експериментів та результатами інших авторів за VOF-алгоритмом.

Список використаних джерел

1. Tirindelli M. Evaluation of empirical and numerical methods for wave uplift force calculation / M. Tirindelli, S. Fenical, G. Cuomo // *Coastal Structures*.— 2007.— P. 1683–1693.
2. Kaplan P. Theoretical analysis of wave impact forces on platform deck structures / P. Kaplan, J.J. Murray, W.C. Yu // 1—A Offshore Technology, OMAE Copenhagen, June 1995.— Copenhagen, Denmark: proceedings.— 1995.— 2.— P.22–43.
3. Cuomo G. A compressible two-phase SPH-LES model for interfacial flows with fragmentation / G. Cuomo, R.T. Dalrymple // *Coastal Engineering*.— 2007.— 1.— P.121–133.
4. Каліон В.А. Використання методу гідродинаміки згладжених частинок для розв'язання задач гідродинаміки доквілля / В.А. Каліон, І.О. Бровченко, А.О. Кушан // *Вісник Київського університету*.— 2007.— №4.— С. 63–70.
5. Oger G. Two-dimensional SPH simulations of wedge water entries / G. Oger, M. Doring, B. Alessandrini, P. Ferrant // *Journal of Computational Physics*.— 2006.— 213.— P.803–822.
6. Liu, G.R. Smoothed particle Hydro-dynamics: a meshfree particle method / G.R. Liu, M.B. Liu.— Singapore: World Scientific, 2003.— 473 p.

Надійшла до редколегії 29.11.11.

УДК 539.3

Олександр Л. Кіпніс*, студент
Володимир І. Острик**, д. ф.-м. н., доцент**Контакт з відривом на півнескінченному проміжку пружної смуги та жорсткої основи**

В роботі із застосуванням методу Вінера – Гопфа побудовано точний розв'язок плоскої задачі теорії пружності про контакт з відривом пружної смуги та жорсткої основи при дії на смугу розподіленого на півнескінченному проміжку навантаження сталої інтенсивності. Визначено контактні напруження та відстань від проекції точки кінця прикладання навантаження на протилежну межу смуги до точки початку відриву цієї межі від основи.

Ключові слова: контакт з відривом, контактні напруження, метод Вінера – Гопфа, пружна смуга.

* E-mail: a.l.kipnis@gmail.com** E-mail: ostrik_v@rambler.ru

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Мелешко В. В.

Вступ. В деяких контактних задачах лінійної теорії пружності під дією навантаження область контакту зменшується. Такий контакт пружних тіл називають контактом з відривом [1].

Вперше контакт з відривом пружної смуги і пружної півплощини досліджено в роботах [2,3]. В [2] розглянуто випадок дії на одну із меж смуги нормальної зосередженої сили, а в [3] – штампа. На іншій межі смуги утворюється скінченна область контакту з півплощиною, а поза областю контакту межі смуги і півплощини відходять одна від одної. У статті [2] також розглянуто осесиметричну задачу про контакт з відривом пружного шару та півпростору і круговою областю контакту між ними. Інтегральні рівняння задач розв'язані чисельно методом механічних квадратів.

В роботі [4] вивчено відрив пружної смуги від жорсткого диска, який разом із двома нормальними зосередженими силами згинають смугу. При певному навантаженні відбувається відрив межі смуги від поверхні диска всередині області контакту, яка розпадається на дві підобласті. Задача узагальненням методом Вінера – Гопфа

Alexander L. Kipnis, student
Volodymyr I. Ostrik, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor**The tearing off contact on the semi-infinite interval of an elastic strip and a rigid base**

In the research with the use of Wiener-Hopf method the exact solution of plane elasticity theory problem on the tearing off contact of an elastic strip and rigid base under the distributed on semi infinite interval constant loading on the strip was constructed. Contact stress and the distance from the projection of end point of application of loading on the opposite strip border to the beginning of the border tearing off from the basis were defined.

Key words: tearing off contact, contact stress, Wiener – Hoph method, elastic strip.

зведена до нескінченної системи алгебричних рівнянь.

Якщо контактні задачі, у яких виникає частковий відрив контактуючих поверхонь, розв'язувати без урахування відриву, то в місці відриву нормальні контактні напруження, які завжди в області контакту від'ємні (є напруженнями стиску), змінюють знак на протилежний. Розв'язок задачі у такій спрощеній постановці втрачає фізичний зміст, але вказує на наявність відриву і дозволяє наближено оцінити зону відриву. Так при стисканні пружної смуги нормальними зосередженими силами, прикладеними у точках протилежних граней, нормальні напруження на лінії симетрії смуги від'ємні тільки на скінченному інтервалі, довжина якого складає 1.34 ширини смуги [5]. Поза вказаним інтервалом нормальні напруження на лінії симетрії смуги додатні. Ця задача еквівалентна задачі про дію нормальної зосередженої сили на пружну смугу, одна грань якої знаходиться в умовах гладкого контакту з жорсткою основою. Розв'язання задачі в уточненій постановці при наявності відриву [2] показує,

що розмір області контакту приблизно у півтора рази менший від його оціночного значення, отриманого в [5] як розмір зони від'ємних значень нормальних напружень.

Постановка задачі. Розглядається плоска статична задача теорії пружності про гладкий контакт з відривом нескінченної пружної смуги $-\infty < x < \infty$, $-h \leq y \leq h$ з жорсткою основою, до верхньої межі $y = h$ якої прикладене розподілене на півнескінченному проміжку $-\infty < x \leq -l$ навантаження сталої інтенсивності p . Припускається, що на проміжку $0 < x < \infty$ нижньої межі $y = -h$ смуги, віддаленому на відстань l від проєкції $x = -l$ точки кінця прикладення навантаження відбивається відрив смуги від основи (рис. 1). Розмір l наперед невідомий і підлягає визначенню.

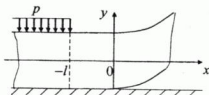


Рис. 1

Крайові умови задачі є такими:

$$\begin{aligned} \sigma_y|_{y=h} &= \begin{cases} -p, & x \leq -l, \\ 0, & x > -l, \end{cases} \\ u_y|_{y=h} &= 0, & x \leq 0, \\ \sigma_y|_{y=h} &= 0, & x > 0, \\ \tau_{xy}|_{y=h} &= 0, & -\infty < x < \infty. \end{aligned} \quad (1)$$

Інтегральне рівняння задачі. Для побудови інтегрального рівняння розглянемо основну змішану задачу для смуги з такими крайовими умовами:

$$\begin{aligned} \sigma_y|_{y=h} &= \sigma(x), & -\infty < x < \infty, \\ u_y|_{y=h} &= s(x), & -\infty < x < \infty, \\ \tau_{xy}|_{y=h} &= 0, & -\infty < x < \infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут $\sigma(x)$, $s(x)$ – деякі задані функції. Розв'язавши задачу методом інтегрального перетворення Фур'є, отримуємо вираз для нормальних напружень на нижній межі смуги:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y}{2G} \Big|_{y=-h} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{1-\nu} \frac{\mu \lambda(2\mu h)}{\Delta(2\mu h)} \bar{s}(\mu) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\lambda_1(2\mu h)}{\Delta(2\mu h)} \frac{\bar{\sigma}(\mu)}{2G} \right) e^{-\mu h} d\mu, \\ \lambda(\tau) &= \text{sh}^2 \tau - \tau^2, \quad \lambda_1(\tau) = \text{sh} \tau + \tau \text{ch} \tau, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\Delta(\tau) = \text{sh} 2\tau + 2\tau, \quad \bar{\sigma}(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x) e^{i\mu x} dx,$$

$$\bar{s}(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{i\mu x} dx, \quad \sigma(x) = \begin{cases} -p, & x \leq -l, \\ 0, & x > -l, \end{cases}$$

де G – модуль зсуву, ν – коефіцієнт Пуассона.

Якщо припустити відсутність відриву смуги від основи, то напруження $\sigma_y|_{y=-h}$, обчислені за формулою (3) (при $\bar{s}(\mu) \equiv 0$), виявляються напруженнями стиску тільки на інтервалі $-\infty < x < -l + l_0$ ($l_0/(2h) = 0.903$). Поза цим інтервалом нижньої межі смуги нормальні напруження змінюють знак і стають розтягуючими. Ця обставина вказує на те, що останнє припущення несправедливе і відрив смуги від основи повинен мати місце. При цьому характерний розмір l_0 задачі безвідривного контакту можна вважати оціночним значенням невідомого розміру l розглядуваної задачі про контакт з відривом.

Введемо невідому функцію $s(x)$, $x > 0$, нормальних переміщень точок вільної від контакту частини нижньої межі смуги; в області контакту $x \leq 0$ будемо вважати, що $s(x) = 0$.

Подання розв'язку (3) забезпечує виконання усіх крайових умов (1), окрім третьої. Задовольнивши цю умову і перейшовши до безрозмірних змінних

$$\tau = 2h\mu, \quad \xi = \frac{x}{2h}, \quad a = \frac{l}{2h}, \quad (4)$$

відносно нової невідомої функції

$$\varphi(\eta) = s^*(2h\eta), \quad \eta > 0, \quad (5)$$

отримаємо інтегральне рівняння:

$$\int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta = f(\xi), \quad \xi > 0,$$

$$k(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-\tau(\xi - \eta)} d\tau, \quad K(\tau) = \frac{\lambda(\tau)}{\tau \Delta(\tau)}, \quad (6)$$

$$f(\xi) = -\frac{(1-\nu)P}{8Gh} \left(1 + \frac{2}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_1(\tau)}{\tau \Delta(\tau)} e^{-\tau(\xi + a)} d\tau \right).$$

Після застосування теореми про лишки, права частина інтегрального рівняння набуває вигляду

$$f(\xi) = \frac{(1-\nu)p}{2Gh} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k(s_k)}{s_k \Delta'(s_k)} e^{-i s_k (\xi + a)}, \quad (7)$$

де $s_k, k=1,2,\dots$, – корені рівняння $\Delta(s)=0$ із півплощини $\text{Im } s < 0$.

Розв'язання інтегрального рівняння. Знайдемо точний розв'язок інтегрального рівняння (6) методом Вінера – Гопфа [6]. Покладаючи $\varphi(\eta)=0$, $\eta < 0$, продовжимо рівняння (6) на всю числову вісь:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta - \begin{cases} 0, & \xi > 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta, & \xi \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} f(\xi), & \xi > 0, \\ 0, & \xi \leq 0. \end{cases} \quad (8)$$

Застосувавши до останнього співвідношення інтегральне перетворення Фур'є, отримаємо функціональне рівняння Вінера – Гопфа

$$K(z) \Phi^+(z) - \Phi^-(z) = F^+(z), \quad (9)$$

де невідомі функції

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(\eta) e^{i z \eta} d\eta, \\ \Phi^-(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{i z \xi} d\xi \int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (10)$$

аналітичні у півплощинах $\text{Im } z > c^+$ і $\text{Im } z < c^-$, $c^+ < 0$, $c^- > 0$ відповідно.

Права частина рівняння (9)

$$F^+(z) = \frac{(1-\nu)p}{2Gh} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k(s_k)}{s_k \Delta'(s_k)} \frac{e^{-i s_k a}}{z - s_k}, \quad (11)$$

аналітична у півплощині $\text{Im } z > c^+$.

Коефіцієнт рівняння $K(z)$ факторизується у нескінченних добутках

$$\begin{aligned} K(z) &= \frac{z^2}{12} K^+(z) K^-(z), \\ K^+(z) &= K^-(-z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\zeta_n} \right) \left(1 - \frac{z}{s_n} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (12)$$

де $K^{\pm}(z)$ – функції, аналітичні відповідно у півплощинах $\text{Im } z > c^+$ і $\text{Im } z < c^-$; $\zeta_n, n=1,2,\dots$, – корені рівняння $\lambda(s)=0$ із півплощини $\text{Im } s < 0$.

Виходячи із представлення (12), рівняння (9) переписується у вигляді

$$\frac{z^2}{12} K^+(z) \Phi^+(z) - \frac{\Phi^-(z)}{K^-(z)} = \frac{F^+(z)}{K^-(z)}. \quad (13)$$

Права частина рівняння (13), яка не є функцією, аналітичною у нижній ($\text{Im } z > c^+$) або верхній ($\text{Im } z < c^-$) півплощині представляється через різницю двох аналітичних функцій:

$$\begin{aligned} \frac{F^+(z)}{K^-(z)} &= f^+(z) - f^-(z), \\ f^+(z) &= \frac{(1-\nu)p}{2Gh} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k(s_k)}{s_k \Delta'(s_k)} \frac{e^{-i s_k a}}{z - s_k}. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким чином, рівняння (13) подається у вигляді

$$\frac{z^2}{12} K^+(z) \Phi^+(z) - f^+(z) = \frac{\Phi^-(z)}{K^-(z)} - f^-(z). \quad (15)$$

Функції, що являють собою праву і ліву частину останнього рівняння аналітично продовжують одна одну на всю комплексну площину і є однією цілою функцією. Із умов на нескінченності

$$\begin{aligned} K^{\pm}(z) &= O(z^{-3/2}), \quad \Phi^{\pm}(z) = o(1), \\ f^{\pm}(z) &= O(z^{-1}), \quad |z| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (16)$$

за теоремою Ліувіля випливає, що ця ціла функція є константою C . Звідки

$$\Phi^+(z) = \frac{12(f^+(z) + C)}{z^2 K^+(z)}. \quad (17)$$

Для того, щоб функція $\Phi^+(z)$ була аналітичною в точці $z=0$ необхідне виконання двох наступних умов:

$$\begin{aligned} (f^+(z) + C) \Big|_{z=0} &= 0, \\ \frac{df^+(z)}{dz} \Big|_{z=0} &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Перша із умов (18) служить для визначення константи C :

$$C = -f^+(0), \quad (19)$$

а друга, яка подається у вигляді

$$\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k(s_k) e^{-i s_k a}}{s_k^3 \Delta'(s_k) K^-(s_k)} = 0, \quad (20)$$

дозволяє встановити значення невідомого розміру $l = 2ha$. Чисельні підрахунки показують, що відстань l від проекції точки кінця прикладення навантаження на нижню межу смуги до точки початку відриву смуги від основи, віднесена до ширини смуги $2h$, складає $a = 0.3912$. Ця величина виявляється у 2.3 разів меншою від її

оціночного значення $l_0/(2h)$, отриманого при розв'язанні задачі у спрощеній постановці.

Контактні напруження. Враховуючи попередні викладки, вираз із (3) для нормальних напружень на нижній межі смуги подається у вигляді

$$\frac{\sigma_y}{2G} \Big|_{y=-h} = \frac{2h}{1-\nu} \left(f(\xi) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^*(\tau) K(\tau) e^{-n\xi} d\tau \right). \quad (21)$$

Застосовуючи теорію лишків, із (21) отримуємо нормальні напруження в області контакту $x < 0$:

$$\sigma_y \Big|_{y=-h} = \begin{cases} 2p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{s_k \Delta'(s_k)} \left[\lambda(s_k) e^{-n s_k (\xi+a)} - \frac{2Gh}{p(1-\nu)} \Phi^*(-s_k) \lambda(s_k) e^{n s_k \xi} \right], & -a \leq \xi < 0, \\ 2p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{s_k \Delta'(s_k)} \left[-\lambda(s_k) e^{n s_k (\xi+a)} - \frac{2Gh}{p(1-\nu)} \Phi^*(-s_k) \lambda(s_k) e^{n s_k \xi} \right], & \xi < -a. \end{cases} \quad (22)$$

Застосовуючи до рівності (21) зворотне перетворення Фур'є, за допомогою леми Ватсона [7] пересвідчуємося, що нормальні напруження на краї області гладкого контакту мають характерну кореневу поведінку: $\sigma_y \Big|_{y=-h} = O(\sqrt{-x})$, $x \rightarrow -0$.

На графіку (рис. 2) наведено залежність безрозмірних контактних напружень $\bar{\sigma} = \sigma_y \Big|_{y=-h} / p$ від безрозмірної координати $\xi = x / 2h$. На відстані 1.65 ширини смуги від краю області контакту контактні напруження $\sigma_y \Big|_{y=-h}$ досягають свого найменшого значення $-1.031p$ і при подальшому віддаленні від точки $x=0$ асимптотично наближаються до значення $-p$, такого самого, як і задані значення нормальних напружень на верхній межі смуги при $x \leq -l$. Взагалі, на проміжку $x \leq -l$ нижньої межі смуги, який знаходиться під зоною навантаження, прикладеного до верхньої межі смуги, нормальні напруження відхиляються від значення $-p$ не більше, ніж на 46% і прямують до нуля при виході на край області контакту.

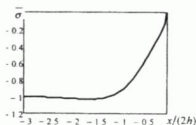


Рис. 2

Висновки. Із застосуванням методу Вінера – Гопфа отримано точний аналітичний розв'язок задачі плоскої теорії пружності про контакт з відривом пружної смуги та жорсткої основи при дії на смугу розподіленого на півнескінченному проміжку навантаження сталої інтенсивності. Встановлено, що відстань між абсцисами точки кінця прикладення навантаження і точки початку відриву смуги від основи складає 0.39 від ширини смуги. Визначено розподіл нормальних напружень в області контакту і показано, що їх найбільше за модулем значення перевищує інтенсивність навантаження на 3%.

Список використаних джерел

1. Джонсон К. Механика контактного взаємодія / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
2. Кир Л. М. Контактная задача для слоя, лежащего на полупространстве / Л. М. Кир, Дж. Дандерс, К. Ц. Цай // Прикл. Механика. Тр. Америк. об-ва инженеров-механиков. – М.: Мир, 1972. – Т. 39, №4. – С. 260-266.
3. Ratwani M. On the plane contact problem for frictionless elastic layer / M. Ratwani, F. Erdogan // Int. J. Solid and Struct. – 1973. – Vol. 43. – P. 921-936.
4. Моргунов М. О. Контакт з відривом при згині пружної смуги жорстким диском / М. О. Моргунов, В. І. Острик, А. Ф. Улітко // Мат. методи і фіз.-мат. поля. – 2009. – Т. 52, №3. – С. 182-191.
5. Filon L. N. G. On an approximate solution for the bending of a beam of rectangular cross-section under any system of load / L. N. G. Filon // Trans. Roy. Soc. (London). Ser. A. – 1903. – Vol. 201, № 67.
6. Нобль Б. Метод Винера – Хопфа / Б. Нобль – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
7. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды / М. В. Федорюк – М.: Наука, 1987. – 544 с.

Надійшла до редколегії 03.11.2011

УДК 621.81:672.1:[620.173.26]

Кондель В.М., к.т.н, доц., Павліченко А.І., студ.

**Дослідження стійкості сталених
стиснутих елементів сталого та змінного
поперечних перерізів**

Досліджена стійкість сталених стиснутих елементів конструкцій та деталей машин. Проведено аналіз експериментальних даних про роботу стиснутих елементів та теоретичних розробок щодо їх розрахунків. Побудовані графіки коефіцієнтів поздовжнього згинання та запропоновані формули для визначення цих коефіцієнтів у залежності від міцності сталі та гнучкості стержнів сталого та змінного поперечних перерізів.

Ключові слова: стійкість, стиснуті елементи, поперечні перерізи.

*E-mail: vkondel@ya.ru.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Мелешко В.В.

Загальновідомо, що гарантією надійності елементів конструкцій та деталей машин є задоволення умов їх міцності, жорсткості та стійкості, інженерні методи розрахунків яких розглядає опір матеріалів. Слід зазначити, що міцність – це не тільки гарантія проти руйнування, але й проти великих залишкових деформацій, через які матеріал стає непридатним для подальшої експлуатації. Під жорсткістю розуміють гарантію проти появи в конструкції великих пружних деформацій, через які порушуються умови її нормальної експлуатації. Але особливу увагу слід звернути на явище втрати стійкості, яке є дуже небезпечним і може призвести до трагічних наслідків, оскільки в цьому випадку відбувається некерований ріст деформацій і конструкція руйнується практично миттєво, що виключає будь-яку можливість вжити дієвих заходів щодо запобігання аваріям та іншим небажаним наслідкам.

На стискання працюють багато елементів конструкцій та деталей машин сучасного підприємства: колони, стійки, верхні пояси ферм, штоки парових машин та поршневих насосів [1-3], гвинти в передачах гвинт-гайка, циліндричні та конічні гвинтові пружини, різальні інструменти для обробки отворів на свердлильних верстатах, голки у швейних машинах та інші [4, 5]. Саме тому дана робота присвячена дослідженням стійкості стиснутих

V.M. Kondel', Ph.D., doc., A.I. Pavlichenko, stud.

**The stability investigation of compressed
steel members of constant and variable cross
sections**

The authors research the stability of compressed steel structures and parts of machines. The analysis of experimental and theoretical data of the behaviour of compressed structures and their members is provided. The new approaches to the stress reduction factors tests for constant and variable bars cross-sections are described.

Key Words: stability, compressed members, cross sections.

елементів конструкцій та деталей машин сталого та змінного поперечних перерізів.

Вагомий внесок для вирішення цієї проблеми внесли видатні вчені XVIII-XX століть Л.Ейлер, Ф.Енгессер, Ф.Ясинський, Л.Тетмайер, Т.Карман, Ф.Шенлі та інші [1-3]. Вони запропонували формули для визначення критичної сили і напруження, які є небезпечними для стиснутого стержня, в залежності від його гнучкості, матеріалу, способів закріплення кінців, схеми та виду навантаження, а також умову стійкості з коефіцієнтом поздовжнього згинання φ :

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]_w = \varphi[\sigma], \quad (1)$$

де σ та $[\sigma]$ – робоче та основне допустиме напруження; $[\sigma]_w$ – допустиме напруження на стійкість, F – робоча поздовжня сила; A – площа поперечного перерізу стиснутого стержня.

Досліди показали, що коефіцієнт φ залежить від гнучкості стержня λ , тобто $\varphi = f(\lambda)$. За результатами досліджень вчені одержали значення коефіцієнтів φ для стійок, виготовлених з різних матеріалів [1-3, 6]. За дослідними даними [6] будемо для сталі графіки залежностей $\varphi = f(\lambda)$ та $\varphi = f(R_y)$, де R_y – розрахунковий опір сталі (рис. 1-2).

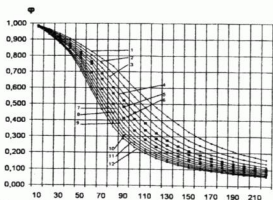


Рис. 1. Залежності $\phi = f(\lambda)$ для стиснутих елементів з різним розрахунковим опором сталі:

1 – 200 МПа; 2 – 240 МПа; 3 – 280 МПа;
4 – 320 МПа; 5 – 360 МПа; 6 – 400 МПа;
7 – 440 МПа; 8 – 480 МПа; 9 – 520 МПа;
10 – 560 МПа; 11 – 600 МПа; 12 – 640 МПа

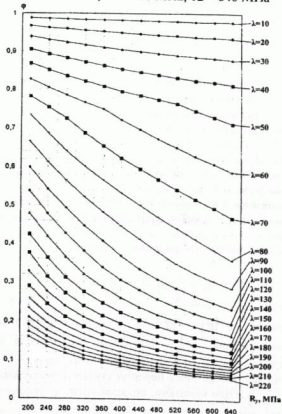


Рис. 2. Залежності $\phi = f(R_p)$ для стиснутих елементів з різними гнучкостями λ

Очевидно, що коефіцієнт поздовжнього згинання ϕ залежить не тільки від гнучкості стержня λ , але й від міцності матеріалу, з якого він виготовлений. Зокрема, для сталі з

підвищенням її міцності (рис. 2) та зростанням гнучкості (рис. 1) коефіцієнт ϕ зменшується, тому для практичних розрахунків виведемо формулу для визначення коефіцієнта поздовжнього згинання з урахуванням його залежності від цих факторів.

В свій час вчені запропонували рівняння $\phi = f(\lambda)$ для деревини [1]. Одержані за цими формулами значення коефіцієнтів ϕ мало чим відрізняються від дослідних даних, але ці залежності стосуються тільки одного матеріалу і складаються з двох різних рівнянь в залежності від гнучкості λ . Тому в подальших дослідженнях слід вивести одне рівняння $\phi = f(\lambda)$ для різних матеріалів. Оскільки переважна більшість конструкцій та елементів виготовляється із сталі, виведемо формулу для визначення коефіцієнтів ϕ саме для сталевих зразків.

Існують залежності коефіцієнта ϕ від розрахункового опору сталі R_p і умовної гнучкості стержня $\bar{\lambda}$ [7], які складаються з трьох різних рівнянь, які досить громіздкі і малопридатні для практичних розрахунків, тому використаємо інший підхід до вирішення поставленого завдання.

Аналіз діаграм (рис. 1) для стиснутих стійок показав, що графіки функції $\phi = f(\lambda)$ подібні до кривої

$$x^2 y = 4a^2(2a - y), \quad (2)$$

яка називається локоном Аньєзі [8]. Досліджуючи цю криву, маємо, що при $x=0$ $y=2a$. Аналогічно, при $\lambda=0$ $\phi=1$ (рис. 1). Замінивши x на λ , а y – на ϕ , визначимо $a=0.5$. Таким чином, рівняння (2) матиме вигляд

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}. \quad (3)$$

Якщо замінити y на ϕ , а x – на 0.01λ отримаємо наступне рівняння

$$\phi = \frac{1}{(0.01\lambda)^2 + 1}. \quad (4)$$

Дослідні дані $\phi = f(\lambda)$ (рис. 1) і теоретичні значення ϕ , одержані за формулою (4) для сталей низької міцності мало чим відрізняються, тому рівняння (4) можна використати для

визначення коефіцієнтів φ у випадках застосування сталей з $R_y = 200 \dots 280$ МПа.

Але, як зазначалось раніше, стійкість сталого елемента залежить не тільки від його гнучкості λ , але й від міцності сталі, з якої він виготовлений, тому формулу (4) не можна використовувати для високоміцних сталей. Криві $\varphi = f(R_y)$ мають вигляд гіперболи (рис. 2) виду

$$y = c - \frac{d}{x}, \quad (5)$$

тому функція (4) перетворюється в рівняння

$$\varphi = \frac{1}{\left[\frac{\lambda}{100} \left(c - \frac{d}{R_y} \right) \right]^2 + 1}, \quad (6)$$

де коефіцієнти c і d визначасмо методом найменших квадратів: при $\lambda \leq 50$ $c = 1,51$, $d = 142$; а при $\lambda \geq 50$ $c = 2,21$, $d = 306$.

Завдяки дослідженням Л.Ейлера та Ф.Ясинського [1-3] була запропонована формула для визначення критичної (тобто небезпечної) сили у випадку стиснення довгих з великою гнучкістю стержнів, в яких напруження в момент втрати стійкості не перевищували границі пропорційності:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (7)$$

де I_{\min} – мінімальний момент інерції; l – довжина стержня, μ – коефіцієнт зведення довжини стержня, який залежить від способів закріплення його кінців (рис. 3). Так стержень, жорстко закріплений з обох кінців ($\mu = 0,5$), витримає у 16 разів більше навантаження, ніж такий же стержень, зашпечений з одного кінця і вільний з іншого ($\mu = 2$).

Вищенаведені розробки стосувалися стиснутих стержнів сталого поперечного перерізу, але на практиці часто зустрічаються конструкції та елементи із змінним поперечним, які потребують додаткових досліджень на стійкість.

Досліди вчених показали, що критична сила для стиснутих стійок із змінним поперечним перерізом залежить не тільки від чинників, включених у формулу (7), але й від схеми навантаження (декількох стискаючих зосереджених сил, розподільного навантаження)

та геометрії стержня (закону зміни моментів інерції перерізу вздовж осі стійки) [3].

Визначимо критичну силу для стержня змінного перерізу, наприклад, для випадку зашпечення стійки з одного кінця (момент інерції I_1) і вільного з іншого (I) в залежності від співвідношення довжин a/l і моментів інерції перерізів $\frac{I_1 - I}{I}$ (рис. 4).

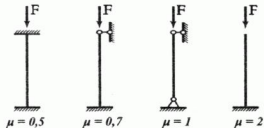


Рис. 3. Залежність коефіцієнтів зведення довжини від способу закріплення кінців стержня

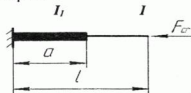


Рис. 4. Схема навантаження стержня змінного поперечного перерізу

Для спрощення розрахунків введемо таку величину як коефіцієнт стійкості $\eta = \pi^2 / \mu^2$ [3], тоді рівняння (7) при $I_{\min} = I$ має вигляд

$$F_{cr} = \eta \frac{EI}{l^2}. \quad (8)$$

Для основних схем закріплення кінців стержня сталого перерізу:

$$\begin{aligned} \text{при } \mu = 0,5 & \quad \eta_1 = \pi^2 / 0,5^2 = 39,4784; \\ \mu = 0,7 & \quad \eta_2 = \pi^2 / 0,7^2 = 20,142; \\ \mu = 1 & \quad \eta_3 = \pi^2 = 9,8696; \\ \mu = 2 & \quad \eta_4 = \pi^2 / 2^2 = 2,4674. \end{aligned}$$

Відношення $\eta_1/\eta_4 = 16$ показує, що стержень, закріплений за першою схемою (рис. 3), витримає у 16 разів більше навантаження, ніж за четвертою, яку ми розглядаємо, досліджуючи стійкість елемента із змінним поперечним перерізом (рис. 4). За дослідними даними складемо таблицю значень коефіцієнта стійкості η в залежності від співвідношень a/l та моментів інерції перерізів I та I_1 .

Значення коефіцієнта стійкості η в залежності від співвідношень a/l та моментів інерції перерізів

a/l	$\frac{I_1 - I}{I}$										
	0	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0	10	20	50	100
0	2,467	2,243	2,056	1,645	1,234	0,823	0,411	0,224	0,118	0,048	0,025
0,1	2,467	2,285	2,126	1,761	1,367	0,944	0,489	0,271	0,144	0,060	0,030
0,2	2,467	2,325	2,197	1,881	1,520	1,093	0,592	0,335	0,179	0,075	0,038
0,3	2,467	2,363	2,262	2,013	1,692	1,277	0,729	0,424	0,230	0,097	0,049
0,4	2,467	2,396	2,327	2,141	1,879	1,499	0,917	0,550	0,306	0,131	0,067
0,5	2,467	2,423	2,379	2,256	2,068	1,756	1,178	0,746	0,427	0,186	0,096
0,6	2,467	2,444	2,420	2,350	2,235	2,025	1,531	1,052	0,633	0,285	0,148
0,7	2,467	2,457	2,446	2,415	2,356	2,256	1,950	1,530	1,018	0,488	0,259
0,8	2,467	2,464	2,461	2,453	2,440	2,402	2,297	2,106	1,730	0,999	0,559
0,9	2,467	2,467	2,466	2,465	2,465	2,459	2,446	2,424	2,374	2,189	1,746
1,0	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467

Досліди показали, що коефіцієнт стійкості η зростає із збільшенням відношення a/l і зменшенням $\frac{I_1 - I}{I}$.

Висновки

1. Знаючи гнучкість стержня та розрахунковий опір сталі, з якої він виготовлений, можна з достатньою для практичних розрахунків точністю визначити коефіцієнт поздовжнього згинання φ за формулами (4) і (6).

2. Знаючи коефіцієнт стійкості η (табл.), можна за рівнянням (8) визначити критичну силу для стержня змінного поперечного перерізу, защемленого з одного кінця і вільного з іншого

(рис. 4). Аналогічні розрахунки можна провести для трьох перших способів закріплення кінців стійок (рис. 3).

Перспективи подальших досліджень

Вищерозглянуті розробки слід використати в подальших дослідженнях та проектуванні раціональних форм суцільних та складених перерізів стиснутих конструкцій та елементів при різних способах закріплення їх кінців з урахуванням жорсткості опор. Ці розробки дозволять отримати значний економічний ефект, підвищити надійність та довговічність елементів конструкцій та деталей машин і запобігти багатьом аваріям і катастрофам в майбутньому.

Список використаних джерел

1. Беляев Н.М. Сопротивление материалов: [15-е изд., перераб.] / Н.М. Беляев. Москва: Наука, 1976. – 608 с.
2. Писаренко Г.С. Опір матеріалів: підручник [для студ. машинобуд. спец. вищ. навч. закл.] / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський; за ред. Г.С. Писаренка. – Київ: Вища школа, 1993. – 655 с.
3. Писаренко Г.С. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев; отв. ред. Г.С. Писаренко. – Киев: Наукова думка, 1988. – 736 с.
4. Павлице В.Т. Основы конструирования та розрахунку деталей машин: підруч. / В.Т. Павлице. – Київ: Вища школа, 1993. – 556 с.
5. Устюгов И.И. Детали машин / И.И. Устюгов. – Київ: Вища школа, 1993. – 556 с.
6. Лихтарников Я.М. Расчет стальных конструкций: справочное пособие [2-е изд., перераб. и доп.] / Я.М. Лихтарников, Д.В. Ладьяженский, В.М. Клыков. – Киев: Будівельник, 1984. – 368 с.
7. Справочник по расчету строительных конструкций на программируемых микрокалькуляторах / А.Я. Барашников, М.Г. Гольдберг, Ю.Н. Кушнарв и др.; под ред. А.Я. Барашникова и В.А. Пермякова. – Киев: Будівельник, 1989. – 224 с.
8. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров: определения, теоремы, формулы / Г. Корн, Т. Корн; под общей ред. И.Г. Арамановича. – 4-е изд. – Москва: Наука, 1978. – 832 с.

Надійшла до редколегії 17.10.11

УДК 532.5

Курилко* О.Б., аспірант
Гуржій** О.А., док. фіз.-мат. наук, професор**Топологічне змішування в'язких рідин в
прямокутній порожнині**

Досліджена двовимірний періодична течія в'язкої нестисливої рідини в наближенні Стокса всередині прямокутної порожнини, яка приводиться в рух верхньою та нижньою границею. Отриманий аналітичний розв'язок задачі методом політичної редукції для заданого розподілу швидкостей руху границь. Виявлено існування трьох періодичних точок в течії, які породжують хаотичний рух виділеної пасивної рідини. Показано виникнення топологічного хаосу в течії Стокса без участі змішувачів, розташованих всередині порожнини.

Ключові слова: прямокутна порожнина, топологічний хаос, мнимий стрижень.

*E-mail: alexandr.kurylko@gmail.com

**E-mail: a.gourjii@gmail.com

Статтю представив член редколегії д. фіз.-м. н., професор Мелешко В. В.

1 Вступ

В останні роки, починаючи з робіт [4,5], методи топології та теорії пучків знайшли широке застосування до аналізу перемішування в течіях. Доведено, що якщо пучок має позитивну топологічну ентропію, то існує область в рідині, в якій мають місце хаотичні траєкторії рідких частинок. Аналіз пучка дає важливу інформацію про властивості перемішування рідин. Наявність хаосу є наслідком топології руху простих тіл різноманітної форми, що виконує роль фізичного змішувача.

В роботі [4] теоретично та експериментально досліджували топологічні схеми змішування за участі фізичних стрижнів-змішувачів. Доведено, що при використанні трьох фізичних стрижнів-змішувачів існують два різних періодичних рухи: перший супроводжується експоненційним розтягом та деформацією виділеного об'єму рідини, відомий як топологічний хаос, в той час як другий не має вищезазначених особливостей. За допомогою теорії Торстена-Нільсена проведена класифікація дифеоморфізмів, які відповідають різним протоколам змішування.

О.Б. Kurylko*, PhD student
A.A. Gourjii**, Doctor of science, professor**Topological mixing of viscous fluids in
rectangular cavity**

The two-dimensional periodic flow of viscous incompressible fluid in the Stokes approximation in a rectangular cavity, which is driven by top and bottom boundaries, is considered. The analytical solution of the problem is achieved by the improved reduction method for a given velocity distributing of moved boundaries. The existence of three periodic points in the flow, which generate chaotic motion of the selected passive fluid, is detected. The origin of topology chaos in the Stokes flow without internal rods located inside the cavity is shown.

Key words: rectangular cavity, topological chaos, ghost rod.

Наявність фізичних стрижнів не є обов'язковою для породження топологічного хаосу і теорія Торстена-Нільсена може бути застосована до будь-яких стрижнів, що породжують топологічний хаос. Було показано [9], що пасивні частинки рідини, що рухаються по періодичним орбітам, можуть бути використані при змішуванні в'язкої рідини в прямокутній комірці. В роботах [6,9] показана можливість застосування результатів, отриманих в роботі [4] до випадків, коли рух стрижнів-змішувачів є топологічно тривіальним, розглядаючи динаміку руху спеціальних періодичних точок, які отримали назву «мимих стрижнів» («ghost rods»).

Дана робота присвячена побудові алгоритму знаходження спеціальних періодичних точок, що виконують роль «мимих стрижнів» в процесі змішування, встановлення їх типу, порядку та просторового положення. Значна увага приділяється аналізу структури «мимих стрижнів». В роботі за допомогою методики аналізу структури відображення Пуанкаре, проводиться дослідження та ідентифікація регулярних та хаотичних регіонів, що виникають

в процесі адвекції пасивної рідкої частинки, що рухається у в'язкій рідині всередині прямокутної порожнини.

2 Постановка задачі та побудова аналітичного розв'язку

Розглянемо двовимірну течію в'язкої нестисливої рідини в прямокутній порожнині з розмірами $2a \times 2b$ з рухомими верхньою та нижньою границями в декартовій системі координат, пов'язаної з центром порожнини (рис.1). В наближенні Стокса ($Re \rightarrow 0$) впливом інерційних сил на течію можна знехтувати в порівнянні з впливом сил в'язкості. Тоді після введення функції течії $\psi(x, y)$, за допомогою якої компоненти вектора швидкості визначаються за формулами

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1)$$

розв'язок стаціонарної задачі зводиться до розв'язання бігармонічного рівняння

$$\Delta \Delta \psi = 0. \quad (2)$$

Нехай течія у прямокутній порожнині $|x| \leq a$, $|y| \leq b$ викликається заданою дотичною швидкістю $U_{top}(x)$ на верхній ($y = b$) стінці, а нижня ($y = -b$) і бічні стінки $x = \pm a$ - нерухомі (рис. 1).

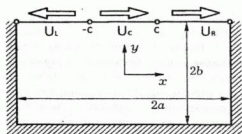


Рис. 1. Геометрія задачі.

В цьому випадку граничні умови для рівняння (2) мають вигляд

$$\psi(\pm a, y) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=\pm a} = 0, \quad |y| \leq b, \quad (3)$$

$$\psi(x, -b) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{y=-b} = 0, \quad |x| \leq a, \quad (4)$$

$$\psi(x, b) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{y=b} = \begin{cases} -U_L, & -a \leq x < -c, \\ U_C, & |x| \leq c, \\ U_R, & c < x \leq a \end{cases} \quad (5)$$

З огляду на лінійність граничної задачі (2)-(5) її розв'язок можна подати у вигляді

суперпозиції чотирьох бігармонічних функцій

$$\psi(x, y) = \psi_1(x, y) + \psi_2(x, y) + \psi_3(x, y) + \psi_4(x, y), \quad (6)$$

де $\psi_1(x, y)$ представляє функцію течії, поле швидкості якої є парним по координаті x і не парним по координаті y , а $\psi_2(x, y)$ - функція течії, поле швидкості якого є парним по обом координатах, функція $\psi_3(x, y)$ представляє течію, поле швидкості якої є непарним по координаті x і непарним по іншій координаті. Нарешті $\psi_4(x, y)$ представляє функцію течії рідини, поле швидкості якої є непарним по обох координатах.

Детальний опис аналітичного розв'язку цих задач наведено в роботі [2]. При цьому використовувався аналітичний метод суперпозиції, який є ефективним для багатьох двовимірних бігармонічних задач для течії Стокса [7].

3 Результати обчислень

В якості прикладу розглянемо процес перемішування рідини всередині прямокутної порожнини ($a = 3$, $b = 1$, $c = 1$) при періодичному русі обмежуючих поверхонь з періодом T за сценарієм R_+L_- псевдо-Аносового типу, що введений в роботу [4].

На рис.2 показаний розподіл функції течії в порожнині при $U_L = 12.82$, $U_C = U_R = 10.76$, на якому нанесені лінії одного рівня з еквідистантним кроком $\delta\psi = 0.4$. Видно, що в порожнині формуються дві конвективні зони течії, в яких рідина рухається по замкнутим траєкторіям з приблизно рівними швидкостями. В нижній частині порожнини швидкість руху рідини суттєво зменшується. Лінія $\psi(x, y) = 0$ - це сепаратриса, яка поділяє комірку на конвективні зони. Цікаво зазначити, що в лівому і правому нижньому кутах течії є ще дві замкнуті області, в яких формуються так звані вихори Моффата [8].

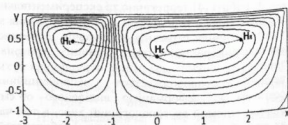


Рис. 2. Картина ліній течії в прямокутній порожнині під дією дотичних швидкостей.

Визначення просторового положення точок H_L , H_C , H_R та їх роль в процесах змішування буде розглянуто нижче.

Тепер розглянемо особливості руху рідини в порожнині при періодичному русі верхньої та нижньої границь. Нехай на проміжку часу $nT \leq t < (n + \frac{1}{2})T$, $n = 0, 1, 2, \dots$ швидкість на верхній та нижній стінках задана згідно протоколу (5), що відповідає рухові рідини типу R_c [4]. Потім відбувається раптова зміна швидкості

$$U_{top}(x) = \begin{cases} -U_R, & -a \leq x \leq c \\ U_L, & c < x \leq a \end{cases},$$

на проміжку часу $(n + \frac{1}{2})T \leq t < (n+1)T$, $n = 0, 1, 2, \dots$,

що відповідає рухові рідини типу L_c [4]. Картина ліній течії для цього випадку має аналогічну структуру з випадком, що показаний на рис.2, але конвективні зони змінюються місцями.

Якісний аналіз траєкторій руху окремих частинок і виділених об'ємів рідини можна провести, визначаючи кількість і тип періодичних точок фазових траєкторій та їх стійкість. В даному випадку значення параметрів U_L та U_R визначалися таким чином, щоб відношення U_L/U_R задовольняло наступні умови: 1) існують три періодичні точки в рідині H_L , H_C та H_R такі, що H_L є нерухомою точкою стагнації, а H_C та H_R - належать одній лінії течії; і 2) точки H_C та H_R точно обмінюються позиціями через півперіоду руху рідини.

На рис.2 показані гіперболічні точки третього порядку, які через три повних періоди повертаються в свої початкові положення, що мають координати: $H_L = (-1.85, 0.46)$, $H_C = (0, 0.18)$ та $H_R = (1.85, 0.46)$, які є спеціальними періодичними точками і виконують роль «мнимих стрижнів» («ghost rods»). Тип періодичних точок визначався аналітично згідно методики, яка запропонована в роботі [3].

На рис.3 показаний переріз Пуанкаре періодичної течії в'язкої рідини в прямокутній порожнині, на якому показано положення окремої рідкої частинки через інтервал часу $\tau_n = n\tau_b/3$, $n = 1, 2, \dots$ на протязі 10000 періодів пучка τ_b . На рисунку видно, що в нижньому лівому та нижньому правому кутах порожнини існують області, в яких рідкі частинки знаходяться в пастці, які сформовані кутковими

вихорами Моффата [8]. Це означає, що якщо помістити підфарбовану рідину в одну з цих областей, то вона ніколи не зможе змішатися з оточуючою рідиною. Отже, змішування в цих областях не є ефективним. Слід відзначити, в течії існують 6 еліптичних островів (рис.3). Кожна пара островів рухається як одне ціле разом з однією з трьох періодичних точок течії (H_L , H_C , H_R). Отже, ці групи точок течії відіграють роль фізичних змішувачів. Переріз Пуанкаре є однорідним ззовні островів та за межами областей, утворених поблизу нижніх куткових точок порожнини, тому можна вважати, що рідина добре змішується в цьому хаотичному морі.

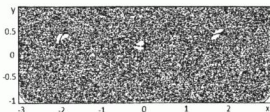


Рис.3. Переріз Пуанкаре.

Розглянемо детально структуру центрального мнимого стрижня, показаного на рис.4. Поблизу гіперболічної точки H_C існують два еліптичних острови з центральними еліптичними точками, а рідкі частинки в межах цих островів рухаються по замкнутим траєкторіям. Гіперболічна точка H_C розташована в крайньому правому положенні відносно еліптичних островів, через яку проходить стійкий многовид (крива чорного кольору) та нестійкий многовид (крива зеленого кольору).

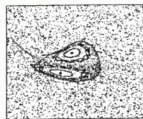


Рис.4. Структура центрального мнимого стрижня, що відповідає періодичній точці H_C .

З іншого боку мнимого стрижня розташована інша гіперболічна точка третього порядку, через яку також проходить пара стійкого (крива синього кольору) та нестійкого (крива

фіолетового кольору). Структури двох інших стрижнів подібні до структури центрального стрижня.

Структура мнимого стрижня подібна розв'язку задачі про обтікання циліндра, як показано на рис.5. На циліндрі видно дві точки стагнації, кожна з якої є гіперболічною точкою в течії. Права точка відповідає періодичній точці H_C , а ліва відповідає лівій гіперболічній точці на рис.4. Зовнішня границя циліндра є лінією течії, яка відіграє роль стійкого многовиду, що проходить через точку H_C і нестійкого многовиду, що проходить через іншу гіперболічну точку.

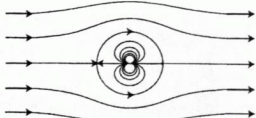


Рис.5. Обтікання циліндра однорідним потоком рідини.

Згідно теорії індексів [1] в динамічних системах, параболічна точка має індекс 0, гіперболічна точка має індекс -1, а еліптична точка має індекс +1. Тому дві гіперболічні та дві еліптичні точки, які входять в структуру мнимих стрижнів визначають індекс цієї структури рівний 0, що є сумою індексів періодичних точок, які входять в його склад. Отже, індекс стрижня дорівнює індексу параболічної точки. Тому, мнимі стрижні поведуть себе як параболічні точки течії.

4 Висновки

Дослідження показали, що в ламінарній течії в'язкої рідини всередині прямокутної порожнини при періодичному русі обмежувачих поверхонь існують два різних протоколи змішування. Перший протокол змішування, псевдо-Аносового типу, відомий як топологічний хаос, характеризується експоненціальним зростанням числа періодичних точок течії та експоненціальним розтягом ліній в рідині. Другий протокол змішування не пов'язаний з утворенням нових періодичних точок різного типу. В області, прилеглої до таких структур, виділена рідина

знає локального обертального руху, при якому процеси адвекції протікають регулярно.

На прикладі течії (в наближенні Стокса) в'язкої нестисливої рідини всередині прямокутної порожнини з рухомими границями встановлено існування трьох періодичних точок рідини, які виконують роль мнимих стрижнів і породжують хаотичний рух рідини. За допомогою методики перерізу Пуанкаре, встановлені особливості та структура областей інтенсивного та регулярного змішування в'язкої рідини, а також локальна структура мнимих стрижнів, що виконують роль фізичних змішувачів.

Список використаних джерел

1. Заславский Г.М., Саздеев Р.З. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса // М.: Наука – 1988. – 368с.
2. Мелешко В. В., Гуржій О. А., Безим'яна Е. М. Електро-осмотичні течії в'язкої рідини у прямокутній порожнині // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – 50, № 1. – С. 107–116.
3. Мелешко В.В., Краснополяская Т.С. Смешивание вязких жидкостей // Нелинейная динамика. – 2005. – Т.1, №1. – С. 69–109.
4. Boyland P.L., Aref H., Stremmer M.A. Topological fluid mechanics of stirring // J. Fluid Mech. – 2000. – 403. – P. 277–304.
5. Boyland P.L., Stremmer M.A., Aref H. Topological fluid mechanics of point vortex motions // Physica D. – 2003. – 175. P. 65–95.
6. Gouillart E., Finn M.D., Thiffeault J.L. Topological mixing with ghost rods // Phys. Rev. E. – 2006. – 73, 036311.
7. Meleshko V.V. Biharmonic problem in a rectangle // Appl. Sci. Res. – 1998. – 58. – P. 217–249.
8. Moffatt H.K. Viscous and resistive eddies near a sharp corner // J. Fluid Mech. – 1964. – 18. – P. 1–18.
9. Stremmer M.A., Chen J. Generating topological chaos in lid-driven cavity flow // Physics of fluids. – 2007. – 19, 103602.

Надійшла до редколегії 11.11.2011

УДК 519.9

Лебедєва І. В.^{*}, к.ф.-м.н., доцент
Бандура Л. А.^{**}, студентка**Круговий динамічний демпфер для
розбалансованого ротора**

Проведено аналогію між класичним динамічним демпфером і круговим динамічним демпфером для врівноваження розбалансованих роторів. Ця аналогія використана в дослідженні ефективності роботи кругових демпферів у роторних системах. Встановлено, що круговий динамічний демпфер ефективно врівноважує розбалансований ротор на докритичних швидкостях обертання.

Ключові слова: динамічний демпфер, ротор, гасіння коливань.

^{*} E-mail: Lebedevai@ukr.net^{**} E-mail: elvie89@ukr.netСтаттю представив член редколегії доктор ф.-м.н., професор В. В. Мелешко**1 Вступ**

Основним видом сил, що збуджують вібрації в роторних машинах, є відцентрові сили, які виникають внаслідок дисбалансу. Ефективним методом боротьби з такими вібраціями є зрівноважування роторів.

Для зрівноважування на ходу роторів, що швидко обертаються, застосовуються автобалансири з твердими коригувальними вантажами, такі як маятникові, кульові (класичні) [3]. У них коригувальні вантажі на закритичних швидкостях обертання ротора з часом самі приходять у положення, в якому зрівноважують ротор, у той час як на докритичних швидкостях вони лише збільшують його дисбаланс.

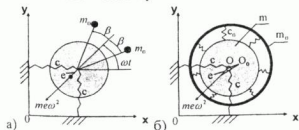


Рис. 1 Порівняння схем зрівноваження ротора:

- а) маятниковими балансирами,
б) круговим динамічним демпфером

I. V. Lebedeva^{*}, Cand. Sci. (Phys. – Math.),
Associate Professor
L. A. Bandura^{**}, student**Circular dynamic damper for unbalanced
rotor**

The analogy between classical dynamic dampers and circular dynamic dampers for balancing unbalanced rotors was considered. This analogy was used to study the effectiveness of circular dampers in the rotor systems. It was found that a circular dynamic damper effectively balances the unbalanced rotor on undercritical velocities.

Keywords: dynamic damper, the rotor, fluctuation decrement.

Круговий динамічний демпфер, який розглядається в роботі, здатний врівноважити дисбаланс ротора як на закритичних, так і на докритичних швидкостях. На рис.1. наведено схеми зрівноваження розбалансованого ротора рухомими маятниками і круговим динамічним демпфером (позначення загальноприйняті [4]).

2 Постановка задачі

Розглянемо задачу про усталений процес вимушених коливань системи з двома степенями вільності під дією гармонічного збурення. Як приклад подібної системи розглянемо дві маси і припустимо, що крім сил натягу пружин присутня зовнішня збурна сила $H \cos pt$, прикладена до маси m (рис.2.).

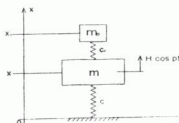


Рис. 2 Класичний динамічний демпфер

Складемо диференціальні рівняння системи.

$$m\ddot{x} + (c + c_0)x - c_0x_0 = H \cos pt,$$

$$m_0\ddot{x}_0 + (x_0 - x)c_0 = 0.$$

Частинний розв'язок цієї системи рівнянь можна записати у вигляді:

$$x = D \cos pt; \quad x_0 = D_0 \cos pt.$$

$$D = \frac{H(c_0 - m_0p^2)}{(c + c_0 - mp^2)(c_0 - m_0p^2) - c_0^2},$$

$$D_0 = \frac{Hc_0}{(c + c_0 - mp^2)(c_0 - m_0p^2) - c_0^2}.$$

Практичне значення має випадок, коли

$$D = 0, \text{ тобто } H(c_0 - m_0p^2) = 0 \Leftrightarrow p^2 = \frac{c_0}{m_0}.$$

Щоб задовольнити цю умову, потрібно лише вибрати c_0 і m_0 так, щоб робоче тіло m стало повністю нерухомим (власна частота тіла m збіглася з частотою збудовної сили). При цьому, хоча збудовна сила діє на масу m , але вона викликає коливання лише маси m_0 . Амплітуда

$$D_0 \text{ цих коливань задається формулою: } D_0 = -\frac{H}{c_0}.$$

В такий спосіб утворюється система з двома степенями вільності. Застосовувавши вище згадану теорію, бачимо, що коливання головної системи m зникають, а амплітуда коливань додаткової маси m_0 визначається як $D_0 = -\frac{H}{c_0}$. Така

додаткова система, прикріплена до головної системи, називається динамічним демпфером коливань.

При проектуванні демпфера вибирають таку жорсткість c_0 , щоб мати прийнятне значення амплітуди D_0 , а потім вибирають масу m_0 так, щоб $\frac{c_0}{m_0} = p^2$. Ця умова є умовою настройки

динамічного демпфера на задану частоту збудження D .

3 Рух ротора з трьома круговими динамічними демпферами

Розглянемо рух ротора в площині Oxy . Центр мас ротора не лежить на осі його власного обертання. Виникає статичний дисбаланс, оскільки порушується осьова симетрія ротора. При обертанні ротора виникає сила інерції $H = m\omega^2 e$, яка діє на зміщений центр мас. Тут e – ексцентриситет ротора.

Рух ротора з круговим динамічним демпфером (рис.1 б) описується системою рівнянь:

$$m\ddot{x} + cx + c_0(x - x_0) = m\omega^2 \cos \omega t,$$

$$m\ddot{y} + cy + c_0(y - y_0) = m\omega^2 \sin \omega t,$$

$$m_0\ddot{x}_0 + c_0(x_0 - x) = 0,$$

$$m_0\ddot{y}_0 + c_0(y_0 - y) = 0.$$

Тут (x, y) – координати центра геометричної осі ротора, (x_0, y_0) – координати центра мас кільця кругового динамічного демпфера.

Скористаємося методом комплексного згортання: введемо комплексні функції

$$\Phi(t) = x + iy, \quad \Phi_0(t) = x_0 + iy_0.$$

Одержимо систему диференціальних рівнянь:

$$m\ddot{\Phi} + (c + c_0)\Phi - c_0\Phi_0 = m\omega^2 e^{i\omega t},$$

$$m_0\ddot{\Phi}_0 + c_0\Phi_0 - c_0\Phi = 0.$$

Шукаємо розв'язок системи у вигляді:

$$\Phi(t) = D e^{i\omega t},$$

$$\Phi_0(t) = D_0 e^{i\omega t}.$$

Задача повторює класичну схему тіла m і динамічного демпфера, зображеного на рис.2.

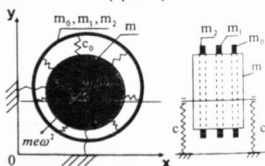


Рис. 3 Ротор з трьома круговими динамічними демпферами

Тепер розглянемо ротор маси m , на вісь якого насаджено важкі кільця масами m_1, m_0, m_2 (рис.3). Кільця пружно скріплені з віссю обертання ротора за допомогою гумової мембрани і обертаються синхронно з ротором.

Тут Oxy – нерухома система координат.

x, y – координати центра мас ротора маси m :

$x_1, y_1, x_0, y_0, x_2, y_2$ – координати мас m_1, m_0, m_2 відповідно. Згідно з принципом Д'Аламбера диференціальні рівняння руху системи мають вигляд

$$m\ddot{x} + cx + c_1(x - x_1) + c_0(x - x_0) + c_2(x - x_2) = m\omega^2 \cos \omega t,$$

$$m\ddot{y} + cy + c_1(y - y_1) + c_0(y - y_0) + c_2(y - y_2) = m\omega^2 \sin \omega t,$$

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1(x_1 - x) = 0,$$

$$m_1\ddot{y}_1 + c_1(y_1 - y) = 0,$$

$$m_0 \ddot{x}_0 + c_0 (x_0 - x) = 0,$$

$$m_0 \ddot{y}_0 + c_0 (y_0 - y) = 0,$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x) = 0,$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + c_2 (y_2 - y) = 0.$$

Задача повторює класичну схему тіла масою m з прикріпленнями до нього додатковими масами m_1, m_0, m_2 , тобто динамічного демпфера. D, D_1, D_0, D_2 - комплексні амплітуди.

$$\Delta = (c + c_1 + c_0 + c_2 - mp^2)(c_1 - m_1 p^2)(c_0 - m_0 p^2) \cdot \\ \cdot (c_2 - m_2 p^2) - c_0^2 (c_1 - m_1 p^2)(c_2 - m_2 p^2) - c_1^2 (c_0 - m_0 p^2) \cdot \\ \cdot (c_2 - m_2 p^2) - c_2^2 (c_0 - m_0 p^2)(c_1 - m_1 p^2) \\ D = \frac{m\omega^2 (c_1 - m_1 p^2)(c_0 - m_0 p^2)(c_2 - m_2 p^2)}{\Delta},$$

$$D_1 = \frac{m\omega^2 c_1 (c_0 - m_0 p^2)(c_2 - m_2 p^2)}{\Delta},$$

$$D_0 = \frac{m\omega^2 c_0 (c_1 - m_1 p^2)(c_2 - m_2 p^2)}{\Delta},$$

$$D_2 = \frac{m\omega^2 c_2 (c_1 - m_1 p^2)(c_0 - m_0 p^2)}{\Delta}.$$

Здійснимо настройку трьох кругових динамічних демпферів на близькі частоти

$$p_0^2 = \omega^2, \quad p_1^2 = \omega^2(1 - \varepsilon), \quad p_2^2 = \omega^2(1 - 2\varepsilon),$$

(ε - малий параметр), що перекривають цей інтервал в околі частоти ω збурної сили. При цьому забезпечується надійність гасіння коливань ротора в околі значень частоти збурної сили.

Вирази для амплітуд можна записати у вигляді:

$$D_1 = -\frac{m\omega^2}{c_1}, \quad D_0 = -\frac{m\omega^2}{c_0}, \quad D_2 = -\frac{m\omega^2}{c_2}.$$

Це умови настройки кругових динамічних демпферів на задану частоту збудження D .

Розглянемо приклад ефективності системи трьох кругових динамічних демпферів настроєних на близькі частоти

$$\frac{c_0}{m_0} = \frac{1}{4} \frac{c}{m} = \frac{1}{4} \omega_0^2,$$

$$\frac{c_1}{m_1} = \frac{1}{4} \frac{c_0}{m_0} (1 - \varepsilon) = \frac{1}{4} \omega_0^2 (1 - \varepsilon),$$

$$\frac{c_2}{m_2} = \frac{1}{4} \frac{c_0}{m_0} (1 - 2\varepsilon) = \frac{1}{4} \omega_0^2 (1 - 2\varepsilon).$$

$$m = 10 \text{ кг}, \quad m_0 = 0,1 \text{ кг}, \quad m_1 = 0,05 \text{ кг},$$

$$m_2 = 0,15 \text{ кг}, \quad e = 0,1 \text{ мм}.$$

Записавши вираз для амплітуди D , перейдемо до безрозмірних величин, прийнявши

$$\frac{\omega}{\omega_0} = p \quad \text{і} \quad \frac{D}{e} = \bar{D}. \quad \text{Дістанемо,}$$

$$\bar{D} = \frac{-p^6 + \frac{1-3\varepsilon}{4} p^4 - \frac{3-6\varepsilon}{16} p^2 + \frac{1-3\varepsilon}{64}}{\Delta}.$$

$$\Delta(p) = p^6 - p^4 \left(\frac{7-3\varepsilon}{4} + \frac{m_1 + m_0 + m_2 - \varepsilon(m_1 + 2m_2)}{4} \right) + \\ + p^2 \left(\frac{15-24\varepsilon}{16} + \frac{m_1 + m_0 + m_2 - \varepsilon(m_1 + 2m_2)}{8m} - \right. \\ \left. - \frac{(2m_1 + 3m_0 + m_2)\varepsilon}{16m} \right) - \left(\frac{13-15\varepsilon}{64} + \frac{m_1 + m_0 + m_2 - \varepsilon(m_1 + 2m_2)}{64m} \right) - \\ - \frac{3\varepsilon}{16\omega_0^2} - \frac{(m_2 - 2m_1 - 3m_0)\varepsilon}{16m} + \frac{1}{p^2} \frac{1-3\varepsilon}{64}.$$

Побудуємо графік функції

$$\bar{D} = \frac{-p^6 + \frac{1-3\varepsilon}{4} p^4 - \frac{3-6\varepsilon}{16} p^2 + \frac{1-3\varepsilon}{64}}{\Delta}.$$

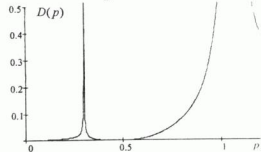


Рис. 4 а) Залежність безрозмірної амплітуди вимушених коливань ротора в околі частот трьох динамічних демпферів

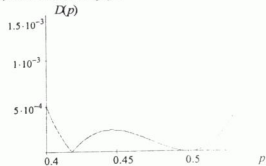


Рис. 4 б) Кількісна оцінка безрозмірної амплітуди вимушених коливань в околі (0.418, 0.5)

З отриманих графіків видно, що система кругових демпферів з близькими частотами здатна в широкому околі частоти вимушених коливань надійно врівноважити розбалансований ротор з високою точністю в діапазоні як докритичних, так і закритичних частот.

Висновки

У роботі проведені дослідження можливості врівноваження розбалансованого ротора динамічним круговим демпфером. Основні результати можуть бути сформульовані у вигляді таких висновків:

1. Проведені при виконанні роботи дослідження виявили принципову можливість врівноваження розбалансованого ротора круговим динамічним демпфером.
2. Встановлено, що круговий динамічний демпфер здатний врівноважити розбалансований ротор на докритичних і закритичних швидкостях власного обертання, при відповідній настройці. В докритичній області кутових швидкостей ротора класичні маятникові системи врівноваження ротора не спроможні врівноважити ротор.
3. Чисельний аналіз роботи кругового динамічного демпфера в докритичній області виявив, що інтервал швидкостей, на яких відбувається врівноваження, звужується в порівнянні з інтервалами балансування в закритичній області.
4. З метою розширення інтервалу ефективної роботи кругового демпфера розглянута система врівноваження розбалансованого ротора трьома динамічними демпферами, послідовно настроєними на динамічне гасіння коливань розбалансованого ротора в докритичній області. Встановлено, що система трьох кругових динамічних демпферів суттєво розширює

діапазон швидкостей обертання, на яких можливе врівноваження ротора на докритичних швидкостях.

5. Отриманий результат є новим і обґрунтовує можливість врівноваження ротора на докритичних швидкостях обертання, що важливо у багатьох технологічних процесах. Наприклад, в процесах тонкого шліфування при малих швидкостях.

Список використаних джерел

1. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко – Москва: Изд. физ.-мат. литературы, 1959. – 440 с.
2. Карамышкин В. В. Динамическое гашение колебаний / В. В. Карамышкин – Л.: "Машиностроение", 1988. – 105с.
3. Філімоніхін Г. Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами / Г. Б. Філімоніхін — Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352с.
4. Горошко О. О. Гіроскопічні системи / О. О. Горошко — К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 1994. – 116с.
5. Ден-Гартог Дж. П. Механические колебания / Дж. П. Ден-Гартог — М.: Физматгиз, 1960. — 580с.

Надійшла до редколегії 03.11.11

УДК 533.63, 534.23

Лук'янов Петро В., к.ф.-м.н., ст.н.с.

**Генерація звуку лопаттю гелікоптера
при косому обдуванні потоком**

Досліджено вплив косого обдування лопаті гвинта гелікоптера на процес генерації звуку. Встановлено, що від кута постановки лопаті зустрічному потоку залежить не тільки рівень звуку, що генерується, але також й форма розподілу тиску, котрий істотно відрізняється від розподілу тиску при прямому обтіканні лопаті потоком.

Ключеві слова: генерація звуку, косе обдування лопаті.

*E-mail: luk_ptr@yahoo.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Мелешко В.В.

1. Вступ

Вивченню генерації звуку (шуму обертання) присвячено ряд досліджень. Більшість з них побудовано на спрощених одновимірних моделях генерації звуку лопаттю [1-3]. Такі моделі дозволяють лише наближено описати процес генерації звуку для перших мод розкладання в ряд. Оскільки ці моди акумулюють основну енергію, то дані моделі дозволяють охопити тільки загальну картину генерації звуку. Але далеко не всі фактори, що впливають на генерацію звуку потоком, ці спрощені моделі враховують.

Так в них джерело виникнення звуку або розташовано в деякій фіксованій точці на лопаті [1], що обрховується за теоремою про середнє, або на одній лінії вздовж розмаху лопаті [2-3]. При цьому припускається, звук залежить від таких характеристик, як сила тяги гвинта, обертаючий момент. Таким чином локальна зміна аеродинамічних змінних фактично не приймається до уваги. Однак генерація звуку потоком, що взаємодіє з лопаттю гвинта гелікоптера, залежить від зміни навантаження на лопать, ряду інших параметрів задачі.

При прямому обтіканні основними з них є швидкість потоку, що набігає, тобто число Маха, товщина лопаті, її форма. Є ще один параметр, котрий впливає на генерацію звуку,

Lukianov Petr V., Ph.D., Senior Researcher

**Sound generation by helicopter's blade
at oblique angle of flow blow**

An influence of oblique angle of flow blow of the helicopter blade on sound generation process was studied. It was discovered that the level of generated sound and shape of pressure distribution depends on angle of flow blow, and a shape of pressure distribution essentially differs from sound wave at direct flow blow.

Key Words: sound generation, oblique flow blow of the blade.

це кут атаки. Однак, варіюючи його, ми достатньо швидко зможемо вийти за межі потенціальної течії, оскільки при зміні кута атаки течія становиться несиметричною, в неї з'являються вихорові структури. Тому вивчення впливу кута атаки на процес звукоутворення виходить за рамки потенціальної моделі, тобто даної роботи.

В той же час цікавим та невивченим питанням є генерація звуку потоком при косому обдуванні лопаті гвинта гелікоптера.

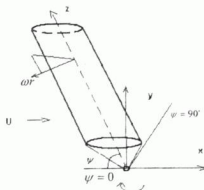


рис.1.

Ця задача може бути розв'язана в рамках моделі потенціальної течії.

2. Постановка задачі

Нехай лопать гелікоптера розташована під кутом атаки ψ до потоку, що набігає зі швидкістю U . Напрямок потоку протилежний напрямку польоту. Форма лопаті постійна вздовж за розмахом. Тоді проекція швидкості на вісь x при нульовому куті атаки запишеться

$$U_x = \omega r + U \sin \psi, \quad (1)$$

де ω, r - кутова частота обертання лопаті, поточний радіус відповідно.

Рівняння, що описує генерацію звука тонкою лопаттю (крилом) має вигляд [4]:

$$\nabla^2 \phi' - \frac{1}{a_\infty^2} \phi'_n = M_1^2 \{ (1 + (1 + \gamma) \phi'_x) \phi'_{xx} + \frac{2}{U} \phi'_n \}. \quad (2)$$

Гранична умова для симетричної лопаті $F(x, y)$ запишеться

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla F = 0. \quad (3)$$

Початкові збурення в потоці відсутні: $\phi = \phi_t = 0, t = 0$. Таким чином, необхідно розв'язати граничну задачу (2)-(3) для потоку, що набігає зі швидкістю (1).

3. Метод розв'язання задачі

Для чисельного розв'язання поставленої вище задачі використаємо чисельно-аналітичний метод [5]. Суть метода полягає в наступному. Для визначення шуканої функції ϕ розв'язується система n рівнянь: $n-2$ рівняння є представленням функції у вигляді ряду Тейлора у сусідніх точках:

$$\phi(x_k, y_k, z_k, t_k) = \phi(a) + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi}{\partial x_i} (x_i - a_i) + \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^4 \times \\ \times \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - a_i)(x_j - a_j) + R_m(x_i - a_i), \quad (4) \\ k = \overline{1, n-2}, R_m - \text{остаточний член ряду.}$$

Ці значення $\phi(x_k, y_k, z_k, t_k)$ в момент початку розрахунку можуть задаватись наближено (наприклад, з розв'язання стаціонарної задачі), якщо точні значення потенціалу на границі невідомі. Решта два

рівняння – це рівняння, що розв'язується, та гранична умова. В даному випадку ними є рівняння (2)-(3). Кількість точок розрахункової схеми $n-2$ залежить від конкретної задачі. При розв'язанні цієї задачі n дорівнювало 15.

Таким чином, у сукупній системі рівнянь невідомими є функція ϕ та її похідні в розрахунковій точці a . Після розв'язання систему рівнянь на першому розрахунковому кроці, рухаємося на одну точку уперед вздовж по сітці. Тепер вже знайдені значення $\phi(a)$ для нового розрахункового крока є $n-2$ - м значенням: $\phi(x_{n-2}) = \phi(a)$. Решта значень

$\phi(x_k, y_k, z_k, t_k), k = \overline{1, n-3}$ також зсувається на крок вперед за сіткою, тобто новим значенням з індексом k відповідають значення, котрі мали індекс $k+1$ на попередньому розрахунковому кроці.

Виконавши необхідні розрахунки, отримаємо значення функції, її похідних, котрі використаємо для розрахунку характеристик ближнього і дальнього звукового поля.

4. Аналіз результатів розрахунків

4.1. Ближнє поле

В якості тестового профілю було розглянуто профіль $F(x) = x(1-x)$. Товщина його варіювалась в межах $0.08 - 0.06$, а кут обдування – в межах $30^\circ - 90^\circ$. Решта параметрів є: $\omega = 3000 \text{ об/мин}, c = 0.3 \text{ м}; R/c = 10$ - відношення радіуса лопаті до довжини хорди поперечного перерізу. Важною характеристикою поведінки потоку в ближньому полі є коефіцієнт тиску C_p :

$$C_p = -2 \cdot (\phi_x + k \phi_t). \quad (5)$$

За його зміною можна вивчати не тільки розподіл тиску, тобто аеродинамічний аспект задачі, але також зрозуміти, де найбільш інтенсивніше відбувається звукоутворення: сплески C_p відповідають найбільш інтенсивній генерації звуку. На рис.2а,б представлено характерні значення

($\psi = 30^\circ, \delta = 0.08 - 0.06; a) M = 0.2, б) M = 0.8$) коефіцієнта тиску, котрі спостерігаються при різних кутах ψ обдування лопаті потоком.

Оскільки безпосередньо такої задачі ще не розв'язувалось, порівняння отриманих результатів з наявними даними можна виконати лише якісне, наближене. Суттєвою відмінною, котра виразно помітна на рис.2, є розподіл енергії потоку, що набігає, вздовж всієї поверхні лопаті. Так, якщо для прямого обтікання потоком лопаті основна енергія сплесків C_p була зосереджена рівномірно вздовж за розмахом лопаті приблизно посередині поперечного перетину [4], то для косого обдування картина істотно змінилась. Частина енергії потоку сформувала другу достатньо інтенсивну серію піків. Більш того, в центрі лопаті з'являються, хоча і не дуже помітні, поперечні перепади тиску у вигляді невеликих стрибків. Це значить, що вздовж лопаті додатково зароджується ударна хвиля. При прямому обтіканні потоку такого явища не спостерігалось. Це каже про те, що при косому обдуванні лопаті хвильова картина течії складніша, а ніж при прямому обтіканні.

4.2. Дальше поле

Використовуючи результати обрахунку ближнього поля, виконаємо розрахунок ϕ' в дальньому полі згідно формули [4]:

$$-M_1^2 \int_S \left[\frac{F}{R} \right]_t dS_x + \int_S [F_1]_t dS = 4\pi\phi'(x, t_1) \quad (6)$$

$$\text{де } F = \phi'_x + \frac{1}{2}(1+\gamma)(\phi'_x)^2 + \frac{2}{U}\phi'_t,$$

$$F_1 = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial n} + \frac{1}{Ra_\infty} \frac{\partial R}{\partial n} \frac{\partial \phi'}{\partial t} - \phi' \frac{\partial(1/R)}{\partial n}.$$

В виразі (6) присутня функція ϕ , її перші похідні. Їх значення були отримані під час розрахунку ближнього поля. Як відмічалось вище, при косому обдуванні істотно виріс рівень тиску в другій серії піків, що безпосередньо сказалося на загальному розподілі рівня тиску над крилом (рис.3а,б).

Так, якщо для прямого обтікання лопаті рівень випромінювання в першій половині вздовж за перерізом був помітно вище [4], то в даній задачі ця відмінність менш помітна. Більш того, вказані відмінності в коефіцієнті тиску, котрі з'явилися вздовж за розмахом лопаті для косого обдування, явилися

результатом генерації поперечної (по відношенню до напрямку руху, тобто вздовж за розмахом лопаті) хвилі. Для прямого обдування такого різкого хвильового фронту не спостерігалось.

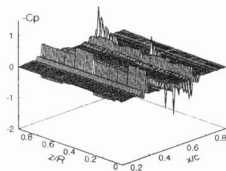


рис.2а

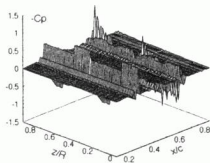


рис.2б

Максимальний рівень випромінювання L (Дб) дещо вище, а ніж при прямому обтіканні лопаті гелікоптера. Це пояснюється тим, що в задачі, що розглядається, поверхня лопаті приймає більш активну участь в генерації звука. Для більш тонкої лопаті максимальний рівень тиску на 5-6 Дб нижче, а ніж для більш товстої лопаті. Крім того, в частотному спектрі (рис.4 а,б) в області 150-200Гц помітна відмінність за рівнем частот, що генеруються. В даному частотному діапазоні у лопаті, котра тонше, рівень звука, що генерується, дещо вище, а ніж для більш товстої лопаті. Це означає, що генерація звука для цього частотного діапазону залежить як від товщини лопаті, так і від кута постановки її до зустрічного потоку.

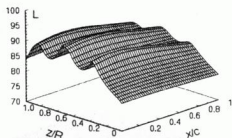


рис.3а

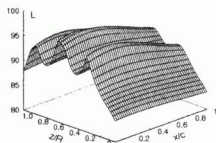


рис.3б

5. Висновки

1. В задачі генерації звуку лопаттю гелікоптера при косому обдуванні підмічено істотна взаємодія хвиль, що виражена у появі поперечної хвилі вздовж лопаті.
2. Генерація звуку відбувається більш рівномірно по всій поверхні лопаті, чим і відрізняється від генерації звуку при прямому обтіканні лопаті.
3. Рівень розподілу звукового тиску на поверхні лопаті, частотний спектр, суттєво залежить від кута розташування тіла до зустрічного потоку.

Список використаних джерел

1. Гутин Л.Я. О звуковом поле вращающегося винта. - ЖТФ, т.6, вып.5, 1936.

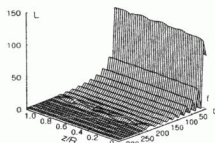


рис.4а

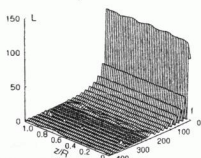


рис.4б

2. Ernsthause W., Willms W., Über die Berechnung des Schallfeldes einer Luftschraube. Akustische Zeitschrift, Heft 1, 1939.

3. Непомнящий Е.И. Исследование и расчет звукового воздушного винта - „Труды ЦИАМ“, вып.39, М., Оборонгиз, 1941.

4. Лукьянов П.В. Нестационарное распространение малых возмущений от тонкого крыла: ближе и дальше поле. Акустичний вісник. т.12,3, 2009, с.41-55.

5. Лукьянов П.В. Применение численно-аналитического метода для решения задач акустики // Збірн. Праць акуст.симпоз. Консонанс-2005.-К.: ІГМ НАНУ.-2005, с.225-230.

Надійшла до редакції 16.09.2011

УДК 534

В'ячеслав В. Мелешко, д.ф.-м.н.
Дмитро Ф. Приходько, аспірант**Хаотичні коливання П-подібного маятника**

Побудована динамічна система, чисельно та експериментально досліджена модель П-подібного маятника, для якої побудовані перетини Пуанкаре та чисельно відтворені траєкторії руху. Знайдені хаотичні режими руху. Порівнявши експериментальні траєкторії з чисельними встановлено високу точність чисельного розрахунку, яку перевірено виконанням закону збереження енергії.

Ключові слова: П-подібний маятник, динамічна система, хаотичний рух.

Vyacheslav Meleshko, Dr.
Dmitro F. Prykhodko, PhD student**Chaotic oscillations of a multiple pendulum**

Dynamical system is built up, numerically and experimentally the model of a multiple pendulum was studied, for it Poincare sections and numerically reproduced trajectories are constructed. Chaotic regimes of motion were found. By comparing the experimental trajectories with numerical trajectories the high accuracy of numerical calculations was shown by satisfaction of the energy conservation law.

Keywords: A multiple pendulum, dynamical system, chaotic motion.

*E-mail: dmitry.prykhodko@gmail.com

Статтю представив член редколегії д.ф.-м.н., професор Перестюк М.О.

Вступ

Дана робота представляє собою дослідження стохастичних рухів подвійного маятника, як нелінійної консервативної системи. Хаотична динаміка - нова галузь нелінійної механіки, що стрімко розвивається в наш час.

Дослідження в цій галузі почалися ще у XIX столітті, коли Пуанкаре та інші намагались побудувати теорію нелінійних збурень планетних рухів. Проте сучасний підхід до проблеми засновується на результатах, отриманих за допомогою швидкодіючих електронно обчислювальних машин [1 - 3].

Хаотична динаміка має свої застосування в багатьох областях наук та техніки, включаючи астрономію, фізику плазми, статистичну механіку та гідродинаміку [1 - 3], що доводить перспективність розвитку цієї галузі та досліджень, пов'язаних з хаотичною поведінкою різноманітних систем.

Закони Ньютона дозволяють знайти диференціальні рівняння, що описують рух системи, але вони в більшості випадків будуть неінтегровними. Таким чином закони, сформульовані видатним англійським вченим, можуть передбачити невизначене майбутнє, яке треба прояснювати за допомогою чисельного інтегрування, обчислюючи крок за кроком. Це вимагає як точнішого задання початкових умов

так і збільшення потужності залучених ресурсів, разом з вдосконаленням методів чисельного розв'язання.

Задача про рух подвійного маятника є показовою в тому плані, що консервативна механічна система веде себе хаотичним чином вже при двох степенях вільності. Результати, отримані чисельним інтегруванням рівнянь руху, були підтверджені експериментальними дослідженнями. Маятник, сконструйований в лабораторії кафедри теоретичної та прикладної механіки КНУ імені Тараса Шевченка, був побудований з урахуванням проведених обчислень.

Експериментально отримані траєкторії руху, також були побудовані чисельними методами при однакових початкових умовах. При великих початкових кутах відхилення траєкторії руху маятника значно відрізняються одна від одної, не зважаючи на досить малу різницю початкових умов.

Найефектнішими є повні коливання маятника навколо шарнірів. Поведінку системи у такому випадку важко передбачити. Слід зазначити, що в точності повторити рух системи при попередній траєкторії є майже неможливим, оскільки подвійний маятник веде себе хаотично при повних обертах і точність задання початкових умов завжди обмежена технічними засобами.

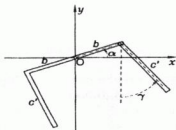


Рис. 1. Схема П-подібного маятника

Побудовані за методом Хенона [4] перерізи Пуанкаре найпереконливіше свідчать про хаотичність руху подвійного маятника. Тому що, коли перетин Пуанкаре представляє собою сукупність точок на замкненій кривій – це свідчить про регулярний рух. У випадку коли перетин Пуанкаре являє собою хмаро подібну область точок – це свідчить про хаотичний характер руху, як впливає з сучасної теорії динамічних систем [1].

Чисельне інтегрування рівнянь руху було проведене за методом Рунге-Кутта, а оцінку якості обчислень була перевірка на збереження повної енергії системи.

Постановка задачі

Модель зображена на Рис.1. Це П-подібний маятник, що складається з двох тіл. У цьому випадку шарнірно закріплений в середині вагомий стержень, довжини $2b$, зварений зі стержнем довжини c під прямим кутом в одному кінці і шарнірно з'єднаний з іншим стержнем такої ж довжини. За рахунок малості товщини стержнів можна вважати їхню вагу лінійно розподіленою.

У такому маятнику в стані рівноваги два шарніри будуть розташовані на одній горизонталі, що веде до нелінійності характеру щеплення.

Добре відомо, що при дії на маятник періодичної сили найбільш ефективною буде дія сили частота якої співпадає з частотою маятника за виключенням випадку, коли сила напрямлена прямо на шарнірне закріплення. В такому випадку реалізуються умови резонансу.

У кожному випадку маятники обмінюються енергією. Коливання одного плеча на інше впливає нелінійно. Іноді не можна передбачити як поведе себе система через деякий проміжок часу. Такий маятник був побудований в лабораторії кафедри теоретичної та прикладної механіки і спостереження за ним дуже захоплює глядача.

Дана модель веде себе нелінійно, і не зважаючи на те, що вона має тільки дві степені свободи і до того ж є консервативною, з математичної точки зору така система є неінтегрованою і її поведінку важко передбачувати. Такі системи вивчає порівняно нова галузь в механіці стохастична динаміка, і для дослідження подвійного маятника застосуємо методи цієї науки [1 – 3]. Перш за все запишемо рівняння Лагранжа другого роду, що описують рух цієї системи. Отримані диференціальні рівняння не можна проінтегрувати в явному вигляді і повністю визначити коливання, тому застосуємо чисельне інтегрування для дослідження руху та запишемо квадратичне наближення рівнянь руху. Для знаходження чисельного розв'язку використаємо метод Рунге-Кутта, задавши відповідний максимальний крок інтегрування для досягнення потрібної точності.

За допомогою виведення функції Гамільтона та диференціальних рівнянь у канонічних координатах побудуємо траєкторії рух маятника. Цей метод дозволяє досліджувати коливання протягом багатьох періодів і з'ясовувати хаотичність поведінки моделі. При чисельному розв'язанні задачі постає проблема точності обчислень та отриманих результатів. Нелінійні системи дуже чутливі до задання початкових умов, які визначають розв'язок поставленої задачі. Точний розв'язок потребує точного задання початкових умов, і чим далі в часі ми хочемо отримати точну відповідь на питання про стан системи в даний момент, тим точніше треба задавати початкові значення аргументів.

Виведення рівнянь руху

Виходячи з загальних рівнянь для динаміки П-подібного маятника [5],[6] для маятника зображеного на Рис.1. Функція Лагранжа запишеться у наступному вигляді:

$$L(\alpha, \dot{\alpha}, \gamma, \dot{\gamma}) = \frac{1}{6} \rho c^2 \left\{ \alpha^2 \left[\left(\frac{b}{c} \right)^3 + 6 \left(\frac{b}{c} \right)^2 + 1 \right] + \gamma^2 - 3\alpha\gamma \frac{b}{c} \sin(\alpha - \gamma) + 3 \frac{g}{c} (\cos \alpha + \cos \gamma) \right\} \quad (1)$$

Позбудуємо константи перед дужками та перейдемо до канонічних координат:

$$q_1 = \alpha, q_2 = \gamma, p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}, p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} \quad (2)$$

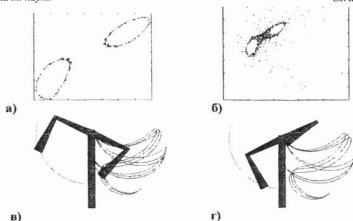


Рис. 2 Перетин Пуанкаре а) при початкових умовах $[-55^\circ, 0, 45^\circ, 0]$, б) при початкових умовах $[-56^\circ, 0, 45^\circ, 0]$; траєкторія коливань маятника в) при $[-55^\circ, 0, 45^\circ, 0]$, г) при $[-56^\circ, 0, 45^\circ, 0]$

$$\begin{cases} p_1 = 2\alpha \left[2\left(\frac{b}{c'}\right)^3 + 6\left(\frac{b}{c'}\right)^2 + 1 \right] - 3\gamma \frac{b}{c'} \sin(\alpha - \gamma) \\ p_2 = 2\gamma - 3\alpha \frac{b}{c'} \sin(\alpha - \gamma) \end{cases} \quad (3)$$

Переїшовши до канонічних координат (3) отримаємо функцію Лагранжа у формі представлення (4) та в канонічному вигляді та гамільтоніан типу (5) [7]:

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{2p_1^2 + \left[4\left(\frac{b}{c'}\right)^3 + 12\left(\frac{b}{c'}\right)^2 + 2 \right] p_2^2 + 6p_1 p_2 \frac{b}{c'} \sin(q_1 - q_2)}{16\left(\frac{b}{c'}\right)^3 + [30 + 18\cos^2(q_1 - q_2)]\left(\frac{b}{c'}\right)^2 + 8} \quad (4)$$

$$+ 3\frac{g}{c'}(\cos q_1 + \cos q_2 - 2)$$

$$\begin{aligned} H(q_1, q_2, p_1, p_2) &= p_1 q_1 + p_2 q_2 + \\ &+ \frac{2p_1^2 + \left[4\left(\frac{b}{c'}\right)^3 + 12\left(\frac{b}{c'}\right)^2 + 2 \right] p_2^2 + 6p_1 p_2 \frac{b}{c'} \sin(q_1 - q_2)}{16\left(\frac{b}{c'}\right)^3 + [30 + 18\cos^2(q_1 - q_2)]\left(\frac{b}{c'}\right)^2 + 8} \\ &+ 3\frac{g}{c'}(\cos q_1 + \cos q_2 - 2) \end{aligned} \quad (5)$$

Де b і c' відповідні довжини, α і γ кути відхилення показані на Рис.1, ρ – лінійна густина однорідних вагових стержнів.

Чисельний розрахунок коливань маятника

Чисельні розрахунки режимів коливань маятника проводились при наступних параметрах: маса плеча маятника що закріплена на нерухомому шарнірі $m_1 = 0,1373$ кг, маса плеча маятника що знаходиться на рухомому шарнірі $m_2 = 0,05505$ кг, $c' = 0,185$ м, $b = 0,187$ м, $\rho = 10,8$ кг/м².

Звернемо увагу ще на один цікавий факт. Обчислені перерізи Пуанкаре для двох близьких початкових умов (див. Рис.2), а саме: $[\alpha, \alpha, \gamma, \gamma] = [-55^\circ, 0, 45^\circ, 0]$ та

$$[\alpha, \alpha, \gamma, \gamma] = [-56^\circ, 0, 45^\circ, 0]$$

свідчать про те, що на 2000 періодів перша траєкторія знаходиться на квазіперіодичній поверхні фазового простору, в той час як друга зривається у хаотичний режим. Цей факт засвідчує непередбачуваність поведінки подвійного маятника, а також вказує на причину стохастичної динаміки системи. Вона полягає у найточнішому слідуванні початковим умовам.

Початкові умови задаються саме таким чином, тобто міняються лише початкові кути, а швидкості нульові у зв'язку з тим що досить складно відтворити експериментально задану початкову швидкість. Точність чисельних розрахунків ми перевіряли виконанням закону збереження енергії, таким чином ми підтвердили високу точність наших чисельних розрахунків $O(10^{-11})$.

Порівняння чисельних розрахунків з експериментальними даними

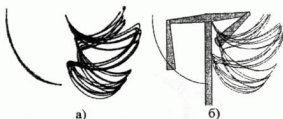


Рис. 3 Траєкторії коливань маятника при початкових умовах $[45^\circ, 0, 45^\circ, 0]$ а) – експериментально побудовані; б) – чисельно побудовані.

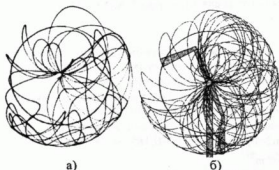


Рис. 4 Траєкторії коливань маятника при початкових умовах $[90^\circ, 0, 180^\circ, 0]$ а) – експериментально побудовані; б) – чисельно побудовані

Для отримання експериментальних траєкторій руху побудованої у лабораторії механічної моделі П-подібного маятника, на вертикальних ланках маятника закріплені діодні ліхтарі. Для фіксування траєкторій руху

Список використаних джерел

1. Лихтенберг А. Регулярная и стохастическая динамика / А. Лихтенберг, М. Либман – М.: Мир, 1984.
2. Лоренц Г. Техническая механика / Г. Лоренц – СПб.: Риккер, 1909, 340-346 с.
3. Ф. Мун Хаотические колебания / Ф. Мун – М.: Мир, 1990.
4. Henon M. On numerical computation of Poincaré maps / M. Henon – Physica D, 1982, 5, 412-414 p.
5. Rott N. A multiple pendulum for the demonstration of non-linear coupling / N. Rott – Z. Angew. Math. Phys. 1970, 21, 570-582 p.
6. Rott N. Symmetric triple pendulum with strong quadratic coupling / N. Rott, J.V. Breakwell, F. Hirt – Eur. J. Phys. 1991, 10, 203-216 p.
7. Srivastava N. Hamiltonian chaos / N. Srivastava, C. Kaufman, G. Muller Comput. Phys. 1990, 4, 549-553 p.

маятника (Рис. 3 а) та Рис. 4 а)) – фотографується рух маятника у темному приміщенні при великій витримці фотоапарата та ввімкнених діодних ліхтарях.

Як впливає з порівняння експериментальних траєкторій на рис.3 а) і рис.4 а) з чисельно отриманими траєкторіями, представленими на рис.3 б) і рис.4 б), ми маємо явне якісне та кількісне (розмах коливань) співпадіння цих траєкторій.

Висновки

У цій роботі проведені експериментальні, теоретичні та чисельні дослідження закономірностей руху п-подібного маятника.

Порівнявши теоретичні дані з експериментальними ми приходимо до висновку що теоретичні розрахунки були проведені з досить великою точністю $O(10^{-11})$ та коректно (що перевірялось виконанням закону збереження енергії), а також встановлено що результати чисельних розрахунків на базі виведених рівнянь руху добре співпадають з результатами експериментальних досліджень.

Вперше розглянувши рух П-подібного маятника, ми встановили і довели експериментально, що вже при двох степенях вільності система поводить себе непередбачуваним чином і мала зміна початкових умов призводить до принципової зміни характеру поведінки системи.

Таким чином доведено, що причиною хаотичного руху тіл є не стійкість регулярних режимів руху, що викликає якісну зміну руху П-подібного маятника, коли він у найменших деталях слідує початковим умовам.

Надійшла до редколегії 11.11.2011

УДК 534.7

Євгеній Д. Печук*, аспірант

**Хаос в модифікованій моделі взаємодії
серцево-судинної і респіраторної систем**

Модель взаємодії серцево-судинної і респіраторної систем досліджується з врахуванням зворотного впливу динаміки артеріального тиску на параметри дихальних осциляцій. Методами теорії динамічних систем досліджено вплив параметрів зворотних зв'язків на сукупну кардіореспіраторну динаміку. На основі біфуркаційних кривих старших показників Ляпунова, проєкцій фазових портретів, часових реалізацій і частотних спектрів виявлено регулярні (періодичні і квазіперіодичні), а також хаотичні режими.

Ключові слова: серцево-судинна система, респіраторна система, зворотний зв'язок, хаос.

*E-mail: uzuzun@i.ua

Статтю представив член редколегії д.ф.-м.н., професор Мелешко В.В.

Вступ

Модельованню і дослідженню динаміки серцевих ритмів присвячено багато наукових робіт у вітчизняній та іноземній літературі [1-3, 5]. Оскільки хаотичні режими є характерними для динаміки кардіосистем здорової людини, то одним з найбільш перспективних підходів до вивчення динаміки такого роду систем є нелінійно-динамічний підхід, заснований на сучасній теорії динамічних систем [4, 6-8]. Добре відомою і фізіологічно коректною є модель DeBoer серцево-судинної системи, запропонована в роботі [1], яка, проте, не враховує зворотного впливу діяльності серця на параметри дихання. Вперше для цієї моделі вказаний зворотний вплив по типу оптимального керування було враховано в моделі Грінченко – Рудницького [5]. Метою даної роботи є класифікація і дослідження закономірностей усталених режимів модифікованої моделі [1,5] методами сучасної теорії динамічних систем.

**Модель взаємодії серцево-судинної і
респіраторної систем**

Модель взаємодії серцево-судинної і респіраторної систем, досліджувана в роботах [1] і [5], є системою дискретних відображень, що описують еволюцію систолічного тиску S , діастолічного тиску D , кардіоінтервалу I , часу

Evgeniy D. Pechuk*, PhD student

**Chaos in a modified model of the
cardiovascular and respiratory system
interaction**

Model of the cardiovascular and respiratory system interaction is investigated taking into account a feedback influence of arteriotony dynamics on the parameters of respiratory oscillations. By methods of the theory of dynamical systems an influence of feedback parameters on the combined system dynamics is studied. Regular (periodic and quasi-periodic) and chaotic regimes of the combined system were found using bifurcation curves of largest Lyapunov exponents, phase portraits, time realizations and frequency spectrums.

Key Words: cardiovascular system, respiratory system, feedback, chaos.

артеріального загасання T від удару до удару. В рамках цієї моделі функції аорти моделюються за допомогою аортальної компресійної камери (Windkessel), а закон Франка-Старлінга використано для моделювання міокарду. В ній враховано основні барорефлекторні та барореспіраторні механізми. Вплив респіраторної системи на серцево-судинну обмежується лише механічною складовою і моделюється введенням відповідної адитивної добавки. Згідно із фізіологічними нормами, в усталеному режимі $S_0 = 120$ мм рт. ст., $D_0 = 80$ мм рт. ст., $I_0 = 800$ мс, $T_0 = 1500$ мс. Після об'єднання дискретних відображень [1,5]:

$$\begin{cases} D'_i = c_1 S'_{i-1} \exp(-I'_{i-1} / T'_{i-1}) \\ S'_i = D'_i + \gamma \frac{T_0}{S_0} I'_{i-1} + \frac{A}{S_0} \sin(2\pi f T_0 t'_i) + \frac{c_2}{S_0} \\ I'_i = G_r \frac{S_0}{T_0} \hat{S}'_{i-\tau_r} + G_\beta \frac{S_0}{T_0} F(\hat{S}', \tau_\beta) + \frac{c_3}{T_0}, (1) \\ T'_i = 1 + G_a S_0 / T_0 - G_a S_0 / T_0 F(\hat{S}', \tau_a) \\ \hat{S}'_i = 1 + 18 / S_0 \arctan(S_0(S'_i - 1) / 18) \end{cases}$$

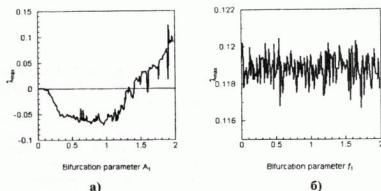


Рис. 1 Старший показник Ляпунова а) – системи (2)-(3), б) – системи (2)-(4)

де $i \geq 1$, $D' = D / S_0$, $S' = S / S_0$, $\hat{S}' = \hat{S} / S_0$,
 $I' = I / T_0$, $T' = T / T_0$, $c_1 = \frac{D_0}{S_0} \exp\left(\frac{I_0}{T_0}\right)$,
 $c_2 = S_0 - D_0 - \gamma I_0$, $c_3 = I_0 - S_0(G_v + G_\beta)$,
 $G_a = 18 \text{ мс/мм рт.ст.}$, $G_\beta = 9 \text{ мс/мм рт.ст.}$,
 $\gamma = 0.016 \text{ мм рт.ст./мс}$, $A = 3 \text{ мм рт.ст.}$ -
 амплітуда зміни тиску систоли, обумовлена
 рухом грудної клітки під час дихання,
 $f = 0.25 \text{ Гц}$ - частота дихання, $t_i = \sum_{k=0}^{i-1} I_k$ -
 момент часу серцевого скорочення,
 $F = \frac{1}{9}(\hat{S}_{i-r-2} + 2\hat{S}_{i-r-1} + 3\hat{S}_{i-r} + 2\hat{S}_{i-r+1} + \hat{S}_{i-r+2})$,
 $\tau_a = \tau_\beta = 4$, $\tau_v = 0$, якщо ЧСС менше за 75
 удар/хв і $\tau_v = 1$, якщо ЧСС більше ніж 75
 удар/хв.

Систему (1), після виключення залежних
 змінних, можна звести до системи трьох
 дискретних відображень з шістьма
 запізнюваннями по змінній S' , наступного
 вигляду:

$$\begin{cases} S'_i = \varphi_1(I'_{i-1}, S'_{i-1}, S'_{i-2}, S'_{i-3}, S'_{i-4}, S'_{i-5}, S'_{i-6}, S'_{i-7}, t_{i-1}) \\ I'_i = \varphi_2(I'_{i-1}, S'_{i-1}, S'_{i-2}, S'_{i-3}, S'_{i-4}, S'_{i-5}, S'_{i-6}) \\ t_i = t_{i-1} + I'_{i-1} \end{cases}, \quad (2)$$

де φ_1 і φ_2 - нелінійні функції. Отримана система
 (2), згідно сучасної теорії динамічних систем
 [4,6-8], зводиться шляхом заміни змінних до
 істотно нелінійної системи дев'яти дискретних
 відображень без запізнювання. Таким чином,
 наявність такої неусувної властивості
 функціонування серцево-судинної системи
 людини як запізнювання, призводить до
 істотного підвищення порядку сукупної системи

(2). Вплив респіраторної системи на серцево-
 судинну, в рамках даної моделі враховується
 параметрами A і f . Тому, зворотний вплив
 кардіосистеми може реалізовуватися шляхом
 впливу діяльності серця на ці дві характеристики
 в модифікованій моделі взаємодії. У даній роботі
 такий зворотний зв'язок моделюється найбільш
 простими лінійними зв'язками. Так, амплітуда
 зміни систолічного тиску, обумовлена рухом
 грудної клітки під час дихання, припускається
 залежною від значення тиску систоли на
 попередньому кардіоінтервалі згідно із законом:

$$A' = A_0 - A_1(S_{i-1} - S_0), \quad (3)$$

де $A_0 = A$, $A_1 \geq 0$, що моделює зменшення
 амплітуди дихання при збільшенні систолічного
 тиску. Частота дихання припускається залежною
 від частоти серцевих скорочень згідно
 залежності:

$$f' = f_0 + f_1(1/I_{i-1} - 1/I_0), \quad (4)$$

де $f_0 = f$, $f_1 \geq 0$. Таким чином, в даній роботі
 досліджується система (2), модифікована
 врахуванням зворотного впливу (3) або (4).

Усталені режими модифікованої моделі
 Перейдемо до дослідження усталених режимів
 системи (2). В силу нелінійності даної системи, її
 розв'язок можна отримати чисельно. Для
 чисельного моделювання вибираємо наступні
 початкові значення змінних: $I'[0] = 0.53$,
 $S'[-j] = 1.08$, $j = 0, \dots, 6$. На рис. 1.а показана
 залежність старшого показника Ляпунова
 системи (2)-(3), на проміжку $0 \leq A_1 \leq 2$. При
 нульовому значенні біфуркаційного параметра
 модель позбавлена зворотного впливу і
 характеризується регулярним усталеним
 режимом (рис. 2а-в.) [5]. При збільшенні

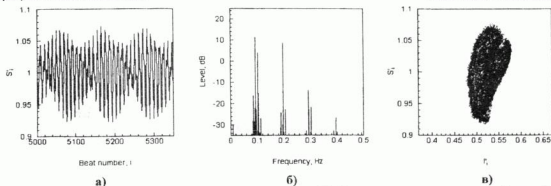


Рис. 2 Характеристики квазіперіодичного стану системи (2), без врахування зворотного зв'язку: а) – часова реалізація, б) – спектр потужності, в) – проекція фазового простору

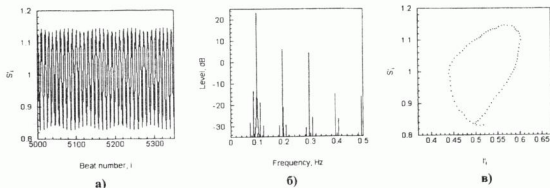


Рис. 3 Характеристики періодичного стану системи (2)-(3), при $A_1 = 0.3$

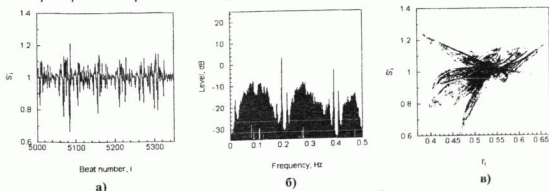
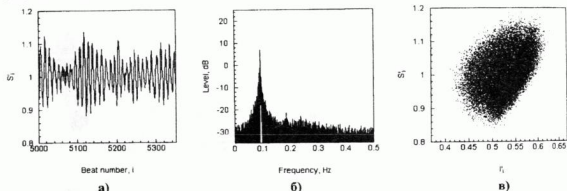


Рис. 4 Характеристики хаотичного стану системи (2)-(3), при $A_1 = 1.7$

значення біфуркаційного параметра, спостерігається регуляризація усталеного режиму моделі. На рис. 3а-в. представлені характеристики граничного циклу, що реалізовується в системі при значенні параметра $A_1 = 0.3$. При значеннях біфуркаційного параметра з областей додатності показника Ляпунова, граничний цикл руйнується і в системі народжується хаотичний режим, що характеризується неперервним спектром часової

реалізації систолічного тиску (рис. 4.а-б) і аттрактором з характерними турбулентними викидами (рис. 4в). У нелінійній динаміці такий сценарій переходу до хаосу називається переміжністю по Помо і Маннєвілью [7].

Тепер розглянемо систему (2) із зворотним зв'язком (4) і біфуркаційним параметром f_1 . На рис. 1б. приведена залежність старшого показника Ляпунова моделі (2)-(4) на проміжку $0 \leq f_1 \leq 2$. В цьому випадку спостерігається

Рис. 5 Характеристики хаотичного стану системи (2)-(4), при $f_1 = 0.1$

жорсткий стрибок показника в додатну область і, як наслідок, різка зміна регулярного режиму на хаотичний (рис. 5а-в.). Таким чином, врахування лінійного зворотного зв'язку (4), для моделі (2), веде до моментальної хаотизації усталеного режиму сукупної системи.

Висновки

Дослідження модифікованої моделі серцево-судинної системи, при врахуванні прямого і зворотного впливу респіраторної системи, на основі біфуркаційних кривих старших показників Ляпунова, проєкцій фазових портретів, часових реалізацій і частотних спектрів, дозволило :

- виявити регулярні (періодичні і квазіперіодичні), а також хаотичні режими;
- визначити сценарії переходу до хаотичних режимів (перехід до хаосу відбувається через переміжність по Помо і Маннєвілю, при врахуванні зворотного лінійного впливу систолічного тиску на амплітуду дихання, і через жорсткий стрибок, при врахуванні впливу кардіоінтервала на частоту дихання).

Вперше показано, що взаємозв'язок ритмів серця і дихання призводить до різкого переходу до хаосу, характерного для нормальної динаміки кардіосистем.

Список використаних джерел

- DeBoer R.W. Hemodynamic fluctuations and baroreflex sensitivity in humans: A beat-to-beat model / R.W. DeBoer, J. M. Karemaker, J. Strakee // Amer. J. Physiol. – 1987. – 253. – P. H680–H689.
- Goldberger Ary L. Clinical Electrocardiography: A Simplified Approach, 7th ed. / Ary L. Goldberger. – Philadelphia: Mosby Elsevier, 2006. – 420 p.
- Glass L. Introduction to Controversial Topics in Nonlinear Science: Is the Normal Heart Rate Chaotic? / L. Glass // CHAOS. – 2009. – 19. – P. 1–3.
- Гринченко В. Т. Введение в нелинейную динамику. Хаос и фракталы. Изд. 2-е / В. Т. Гринченко, В. Т. Мацыпура, А. А. Снарский. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 264с.
- Гринченко В. Т. Модель взаимодействия сердечно-сосудистой и респираторной систем / В. Т. Гринченко, А. Г. Рудницкий // Акустический вестник. – 2006. – 9, N 3. – С. 16–26.
- Кузнецов С.П. Динамический хаос / С. П. Кузнецов. – М.: Физматлит, 2001. – 295 с.
- Краснопольская Т. С. Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением / Т. С. Краснопольская, А. Ю. Швеи. – М.: Ижевск: R&C Dynamics, Институт компьютерных исследований, 2008. – 278с.
- Болотин Ю. Л. Конструктивный хаос / Ю. Л. Болотин, А. В. Тур, В. В. Яновский. – Харьков: Институт монокристаллов, 2005. – 420 с.

Надійшла до редколегії 20.11.2011

УДК 517.98

Вікторія М. Романенко, к. ф.-м. н.

**Апроксимація обмежених розв'язків
лінійних різницьових рівнянь з
необмеженими операторними
коефіцієнтами**

Отримані достатні умови наближення обмеженого розв'язку лінійного різницьового рівняння в банаховому просторі з кількома необмеженими операторними коефіцієнтами розв'язками відповідних задач Коші. Оцінена швидкість наближення.

Ключові слова: лінійне різницеве рівняння, банахів простір, задача Коші.

Romvik13@ukr.net

Статтю представив доктор ф.-м.н., професор, академік НАН України М.О. Перестюк

Вступ.

Нехай $(B, \|\cdot\|)$ – комплексний банахів простір з нульовим елементом $\bar{0}$, $L(B)$ – простір усіх лінійних неперервних операторів в B , I – одиничний оператор, $S := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Нехай також $D \subset B$ – лінійна множина, $A_k : D \rightarrow B$ – замкнені оператори. Нехай виконується

Припущення 1. Оператори A_1, A_2, \dots, A_{m-1} попарно комутують, тобто

$$\forall k, l, 1 \leq k, l \leq m-1 \forall x \in D, A_k x \in D, A_l x \in D :$$

$$A_k A_l x = A_l A_k x.$$

Розглянемо різницеве рівняння

$$x(n+1) = \sum_{k=0}^{m-1} A_k x(n-k) + y(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

де $y := \{y(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ – відома обмежена послідовність елементів B , $x := \{x(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ – шукана обмежена послідовність елементів B .

В роботі [1] розглянуте аналогічне рівняння першого порядку

$$x(n+1) = A_0 x(n) + y(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

За умови, що спектр $\sigma(A_0)$ не перетинається з S , простір B розкладається в пряму суму підпросторів B_+ та B_- , що відповідають частинам спектра $\sigma(A_0)$, що лежать відповідно ззовні та всередині S .

V. M. Romanenko, PhD

**Approximation of bounded solutions of
linear difference equations with
unbounded operator coefficients**

Sufficient conditions are obtained for approximation of bounded solution of linear difference equation in Banach space with unbounded operator coefficients by solutions of corresponding Cauchy problems. Rate of approximation is estimated.

Key words: linear difference equation, Banach space, Cauchy problem.

Теорема 1. [1] Нехай

$$\sigma(A_0) \cap S = \emptyset,$$

$y = \{y(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ – фіксована обмежена послідовність елементів B , $x = \{x(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ – єдиний обмежений розв'язок різницьового рівняння (2), відповідний послідовності y . Тоді існують числа $q_{\pm} \in (0, 1)$, $N_{\pm} \in \mathbb{N}$ такі, що для всіх $\alpha_- \in B_-$, $\alpha_+ \in B_+$, а також для всіх натуральних чисел m, k , які задовольняють умови $m \geq \max\{N_+, N_-\}$, $N_- \leq k \leq 2m - N_+$, справедливо нерівність

$$\|x(-m+k) - u(-m+k)\| \leq$$

$$\leq q_-^k \|x(-m) - \alpha_-\| + q_+^{2m-k} \|x(m) - \alpha_+\|,$$

де u – сума розв'язків двох задач Коші, що відповідають рівнянню (2) в інваріантних підпросторах, α_- , α_+ – відповідні початкові умови.

В роботі [3] цей результат узагальнюється на випадок рівняння (1) з одним необмеженим операторним коефіцієнтом.

В даній статті аналогічні результати отримані у випадку рівнянь з кількома необмеженими операторними коефіцієнтами. При цьому наявність кількох необмежених операторних коефіцієнтів вимагає ускладнення умов на оператори та на відому послідовність.

Апроксимація розв'язку.

Позначимо через B^m декартів добуток m екземплярів простору B ; B^m – банахів простір з покоординатним додаванням і множенням на скаляр та нормою

$$\|\vec{z}\| := \max_{1 \leq k \leq m} \|z_k\|, \quad \vec{z} = (z_1, \dots, z_m) \in B^m,$$

I_m – одиничний оператор у цьому просторі.

Аналогічно міркуванням з роботи [3] рівняння (1) записується у вигляді еквівалентного рівняння в цьому просторі таким чином:

$$\vec{z}(n+1) = A\vec{z}(n) + \vec{y}(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

$$\vec{z}(n) = \begin{pmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-m+1) \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(n) = \begin{pmatrix} y(n) \\ \vec{0} \\ \vdots \\ \vec{0} \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_{m-1} \\ I & O & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & I & O \end{pmatrix},$$

причому на незаповнених місцях матриці A знаходяться нульові оператори. Матриця A визначає в просторі B^m оператор, який теж позначатимемо буквою A , з областю визначення D^m .

В роботі [1] рівняння (3) досліджувалося за умови, що спектр оператора A не перетинається з одиничним колом S . Якщо за допомогою алгебраїчних доповнень формально записати оператор, обернений до оператора $A - zI_m$ при $z \in S$, то компонентами отриманої матриці будуть скінченні суми доданків вигляду

$$A_k z^j (\Omega(z))^{-1}, \quad 0 \leq k \leq m, \quad j \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

де

$$\Omega(z) := \sum_{k=0}^{m-1} A_k z^{m-1-k} - z^m.$$

У випадку необмежених операторних коефіцієнтів потрібні додаткові умови для надання сенсу таким виразам.

Теорема 2. Нехай виконується припущення 1, існує оператор $C \in L(B)$, який комутує з операторами A_k , $0 \leq k, l \leq m-1$ та виконуються умови:

1) при кожному $z \in S$ оператор $\Omega(z)$ має неперервний обернений;

2) при $0 \leq k, l \leq m-1$ функції

$$f_k(z) := A_k (\Omega(z))^{-1} C,$$

$$f_{kl}(z) := A_k A_l (\Omega(z))^{-1} C$$

є коректно визначеними функціями зі значеннями в $L(B)$, аналітичними в околі одиничного кола S , причому в цьому околі $f_{kl} = f_{lk}$;

3) при $0 \leq k, l \leq m-1$ оператор A_k комутує з обмеженими операторами $(\Omega(z))^{-1}$, $z \in C$;

4) $y(n) = Cv(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, де $\{v(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ – обмежена послідовність у просторі B .

Тоді рівняння (3) має обмежений розв'язок вигляду

$$\vec{z}(n) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} G(n-j) \vec{y}(j), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4)$$

де

$$G(j)x := -\frac{1}{2\pi i} \int_S z^{j-1} (A - zI_m)^{-1} x dz, \quad j \in \mathbb{Z},$$

коло S пробігається проти годинникової стрілки, $(A - zI_m)^{-1}$ – формальний обернений до матричного оператора $(A - zI_m)$.

При цьому рівняння (1) має обмежений розв'язок вигляду $x(n) = (\vec{z}(n))_1$, $n \in \mathbb{Z}$.

Доведення. З умови 2) випливає коректність означення оператора $G(j)$ для елементів $x \in B$, які входять в область значень $R(C)$ оператора C . Абсолютну збіжність ряду (4), а також рядів

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} A_k G(n-j) y(j)$$

при $0 \leq k \leq m-1$ забезпечує умова 2) та оцінки

$$\begin{aligned} \|G(j)\| &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{S_\varepsilon} z^j A_k (A - zI_m)^{-1} C dz \right\| \leq \\ &\leq (1 + \varepsilon)^j \sup_{z \in S_\varepsilon} \|A_k (A - zI_m)^{-1} C\| \end{aligned} \quad (5)$$

при $j < 0$, де $S_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 + \varepsilon\}$,

$$\begin{aligned} \|G(j)\| &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{S_{-\varepsilon}} z^j A_k (A - zI_m)^{-1} C dz \right\| \leq \\ &\leq (1 - \varepsilon)^j \sup_{z \in S_{-\varepsilon}} \|A_k (A - zI_m)^{-1} C\| \end{aligned} \quad (6)$$

при $j \geq 0$, де $S_{-\varepsilon} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 - \varepsilon\}$. При цьому $\varepsilon > 0$ обираємо відповідним околу з умови 2). Крім того,

$$AG(j)x = -\frac{1}{2\pi i} \int_S z^{j-1} (I_m + z(A - zI_m)^{-1}) x dz = \\ = G(j+1)x, \quad j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ AG(0)x = G(1)x - x,$$

де $x \in R(C)$. Тому послідовність (4) є розв'язком рівняння (3).

З зображення (3) випливає, що перша координата розв'язку \vec{z} є розв'язком рівняння (2). \square

Зауваження. 1. За умов теореми спектр оператора A не обов'язково не перетинається з одиничним колом (див. приклад нижче), тому ця теорема застосовна у випадках, що не описані в роботі [1]. З іншого боку, результати роботи [3] не є частинним випадком теореми 2, бо умови в цій теоремі суттєво враховують наявність кількох необмежених операторних коефіцієнтів.

2. Обмежений оператор $G(0)$, описаний в теоремі 1, у випадку $C = I$ є проектором на деякий підпростір B_+^m , а оператор $I - G(0)$ – проектором на доповнюючий підпростір B_-^m (такий розклад описаний у роботі [4]). В цій ситуації у роботі [1] відповідні задачі Коші ставляться окремо в отриманих підпросторах.

В нашому випадку позначимо

$$P_+ := G(1), \quad P_- := I - G(1),$$

$$A_- := G(2), \quad A_+ := G(0),$$

$$y_+(n) := P_+ y(n), \quad y_-(n) := P_- y(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

та розглянемо при довільному $N \in \mathbb{N}$ такі задачі Коші:

$$\begin{cases} \vec{u}_-(-N+k) = A_- \vec{u}_-(-N+k-1) + \\ + \vec{y}_-(-N+k-1), \quad k \geq 1, \\ \vec{u}_-(-N) = P_- \vec{\alpha}_-, \end{cases} \quad (7)$$

та

$$\begin{cases} \vec{u}_+(N-k) = A_+ \vec{u}_+(N-k+1) - \\ - A_+ \vec{y}_+(N-k), \quad k \geq 1, \\ \vec{u}_+(N) = P_+ \vec{\alpha}_+, \end{cases} \quad (8)$$

де $\vec{\alpha}_-, \vec{\alpha}_+$ – фіксовані елементи з B^m .

Теорема 3. Для довільної обмеженої послідовності $\{y(n) : n \in \mathbb{Z}\} \subset B$ та будь-яких $\vec{\alpha}_-, \vec{\alpha}_+ \in B$ при виконанні умов теореми 2 задачі Коші (7) та (8) мають єдині обмежені розв'язки. При цьому для обмеженого розв'язку x , побудованого в теоремі 2, справджується оцінка

$$\|x(n) - u_-(n) - u_+(n)\| \leq \\ \leq L((1+\varepsilon)^{n-N} + (1-\varepsilon)^{n+N}), \\ -N \leq n \leq N,$$

де стала L залежить лише від операторних коефіцієнтів.

Доведення. Користуючись звичайними міркуваннями для дій над функціями від операторів (див. [5]), отримаємо

$$A_- G(j)x = \frac{1}{2\pi i} \int_S z(A - zI_m)^{-1} G(j)x dz = \\ = -\frac{1}{2\pi i} \int_S (-G(j) + A(A - zI_m)^{-1}) G(j)x dz = \\ = -\frac{1}{2\pi i} \int_S (A - zI_m)^{-1} G(j+1)x dz = \\ = G(j+1)x, \quad j < 0, \\ A_- G(0)x = G(1)x - x, \quad x \in R(C).$$

Тут враховано, що

$$G(j)P_- x = G(j)x, \quad j < 0, \quad x \in R(C).$$

Тому легко перевірити, що розв'язком задачі Коші (7) буде послідовність

$$\vec{u}_-(n) = G(n+N+1)\vec{\alpha}_- + \\ + \sum_{j=-N+1}^n G(n-j)\vec{y}_-(j), \quad n \geq -N. \quad (9)$$

Аналогічно з рівностей

$$A_+ G(j)x = G(j+1)x, \quad j > 0, \\ A_+ G(0)x = G(1)x - x, \quad x \in R(C),$$

випливає, що розв'язком задачі Коші (8) буде послідовність

$$\vec{u}_+(n) = G(n-N+1)\vec{\alpha}_+ + \\ + \sum_{j=n}^{N-1} G(n-j)\vec{y}_+(j), \quad n \leq N. \quad (10)$$

Також при $-N \leq n \leq N$ отримаємо

$$\|x(n) - u_-(n) - u_+(n)\| \leq$$

$$\leq \|G(n - N + 1)\tilde{\alpha}_+\| + \|G(n + N + 1)\tilde{\alpha}_-\| + \\ + \sum_{j=-N+1}^n \|G(n - j)C\| \cdot \|v\|_{\infty} + \\ + \sum_{j=n}^{N-1} \|G(n - j)C\| \cdot \|v\|_{\infty}.$$

Враховуючи оцінки (5), (6), отримаємо твердження теореми. \square

Наслідок. Нехай $m = 2$, оператори A_0, A_1 обертовні, комутують та функція

$$(z^2 I_m - A_0 z - A_1)^{-1}$$

аналітична в околі одиничного кола. Тоді умови теореми задовольняє оператор $C = A_0^{-1} A_1^{-1}$.

Приклад. Нехай $m = 2$,

$$B = \{ \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \mid x_n \in \mathbb{C}, \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty \},$$

$$(A_0 x)_n := n x_n, (A_1 x)_n := 3n x_n, n \in \mathbb{N},$$

$$D := \{ \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \mid x_n \in \mathbb{C}, \sup_{n \in \mathbb{N}} |n x_n| < +\infty \}.$$

Тоді функція $f(z) := (z^2 I_m - A_0 z - A_1)^{-1}$ аналітична в околі одиничного кола, що легко перевірити, використовуючи рівності

$$((z^2 I_m - A_0 z - A_1)^{-1} x)_n :=$$

$$= (z^2 - n z - 3n)^{-1} x_n, n \in \mathbb{N},$$

$$f'(z) = (2z I_m - A_0)(z^2 I_m - A_0 z - A_1)^{-2}.$$

Отже, може бути застосований наслідок з теорему 3. З іншого боку, коефіцієнтом в рівнянні (3) є оператор

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ I & O \end{pmatrix}.$$

Результати робіт [1, 3] незастосовні, бо $1 \in \sigma(A)$. Дійсно, покажемо, що рівняння

$$(A - I_m)\vec{z} = ((1, 1, \dots), (1, 1, \dots))$$

не має розв'язків. Дійсно, воно еквівалентне системі рівнянь

$$\begin{cases} A_0 z_1 - z_1 + A_1 z_2 = (1, 1, \dots), \\ z_1 - z_2 = (1, 1, \dots), \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} z_1 = z_2 + (1, 1, \dots), \\ n(z_2(n) + 1) - z_2(n) - 1 + 2n z_2(n) = 1, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Отже, $z_2(n) = (2 - n)/(3n - 1)$, $n \in \mathbb{N}$. Проте в такому разі вектор z_2 не належить до області визначення оператора A_1 .

Висновки.

Знайдені достатні умови апроксимації обмеженого розв'язку лінійного різницевого рівняння з кількома необмеженими операторними коефіцієнтами в банаховому просторі розв'язками відповідних задач Коші. Отримана оцінка швидкості наближення.

Список використаних джерел

1. Романенко В.М. Наближення обмежених розв'язків різницевої та диференціальних рівнянь розв'язками відповідних задач Коші // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2002. – №2. – С. 142 – 147.
2. Городній М.Ф., Романенко В.М. Апроксимація обмеженого розв'язку одного різницевого рівняння з необмеженим операторним коефіцієнтом розв'язками відповідних крайових задач // Укр. мат. журн. – 2000. – т.52. – №4. – С. 548 – 552.
3. Романенко В.М. Апроксимація обмежених розв'язків диференціальних рівнянь старших порядків // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2010. – Вип. 3. – С. 153–156.
4. Дороговцев А.Я. Периодические и стационарные режимы бесконечных детерминированных и стохастических динамических систем. К.: Вища шк. – 1992. – 319с.
5. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве – М.: Наука, 1970. – 536 с.

Надійшла до редколегії 14.11.2011

УДК 519.9

Трунов Олександр О.^{*}, студент**Концентрація напружень у прямокутній пластині з круговим отвором**

В роботі з використанням методу суперпозиції досліджено вплив обмеженості області на концентрацію напружень у прямокутній пластині з круговим отвором при одноосному розтягу. Визначені коефіцієнти концентрації напружень на кругових отворах різного діаметру для деяких співвідношень сторін прямокутної пластини.

Ключові слова: метод суперпозиції, пружний прямокутник з круговим отвором, бігармонічна задача, нескінченна система.

^{*} E-mail: trunov.olexandr@gmail.com

Статтю представив член редколегії д.ф.-м.н., професор [Мелешко В.В.]

1 Вступ

При розгляді питання про вплив отворів різної форми на концентрацію напружень в пружній площині зазвичай вважають цю площину нескінченною. Метою роботи є вивчення впливу обмеженості області при наявності отвору на концентрацію напружень в прямокутній пластині.

В роботі досліджено з використанням методу суперпозиції [2,3] вплив кругових отворів різного діаметру на величину напруження σ_θ на контурі вільного від навантажень отвору для різних співвідношень сторін пластини при її одноосному розтягу. З розв'язку задачі Кірша для нескінченної площини відомо, що найбільшого значення приймає напруження σ_θ на контурі отвору перпендикулярно до напрямку прикладеного розтягуючого зусилля, де коефіцієнт концентрації напружень σ_θ / p дорівнює 3. Аналіз застосовності формул Кірша для скінченної області зроблено в [1], де є наступний висновок: якщо ширина смуги не менша п'яти діаметрів отвору, то похибка при визначенні $\sigma_{\theta \max}$ складає не більше 6%. Задача про концентрацію напружень поблизу кругового отвору для смуги, що зазнає однорідного розтягу на нескінченності, була розв'язана в роботі [4]. Але важливо також розглянути пластину скінченної довжини та визначити вплив обмеженості області на концентрацію напружень

Alexander A. Trunov^{*}, student**Stress concentration in a rectangular plate with a cylindrical hole**

In present paper influence of the domain boundness on concentration of stresses in rectangular plate with cylindrical hole using superposition method in case of uniaxial tensile is investigated. Coefficients of stress concentration on cylindrical holes of different diameter for certain ratio of rectangle plate sides are defined.

Keywords: method of superposition, bigarmonic problem in a rectangle with cylindrical hole, linear infinite system.

на контурі отвору. Адже врахування обмеженості смуги по довжині викличе ще більше зростання напружень на контурі отвору.

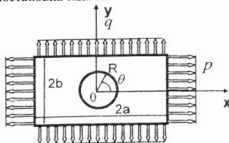
2 Постановка задачі

Рис.1 – Представлення крайової задачі

Плоскі задачі теорії пружності при силовому навантаженні на контурі та відсутності масових сил зводяться до однорідного бігармонічного рівняння відносно функції напружень:

$$\Delta \Delta F = 0. \quad (1)$$

Розв'язок поставленої задачі може бути знайдений аналітично за методом суперпозиції. Згідно цього методу функція напружень для даної задачі може бути представлена у вигляді суми двох функцій напружень в декартовій та полярній СК:

$$F = F^{(rec)}(x, y) + F^{(pol)}(r, \theta), \quad (2)$$

де $F^{(rec)}(x, y)$ – функція напружень, що відповідає задачі навантаження прямокутника скінченних розмірів без отвору та має вигляд:

$$F^{(rec)}(x, y) = C_0 y^2 + A_0 y^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \frac{\cosh \alpha_n y}{\sinh \alpha_n b} + B_n \frac{y \sinh \alpha_n y}{\sinh \alpha_n b} \right) \cos \alpha_n x + \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_k \frac{\cosh \beta_k x}{\sinh \beta_k a} + D_k \frac{x \sinh \beta_k x}{\sinh \beta_k a} \right) \cos \beta_k y, \quad (3)$$

$$\text{де } \alpha_n = \frac{\pi n}{a}, \quad \beta_k = \frac{\pi k}{b};$$

та $F^{(cyl)}(r, \theta)$ – функція напружень, яка відповідає задачі навантаження нескінченної пластини з циліндричним отвором і має вигляд:

$$F^{(cyl)}(r, \theta) = E_0 R \ln \frac{r}{R} + R^2 \sum_{j=1}^{\infty} \left[E_j \left(\frac{R}{r} \right)^{2j-2} + F_j \left(\frac{R}{r} \right)^{2j} \right] \cos 2j\theta, \quad (4)$$

з невизначеними коефіцієнтами $A_0, C_0, A_n, B_n, C_k, D_k, E_0, E_j, F_j$. Тут $2a$ та $2b$ – розміри сторін пластини, R – радіус отвору.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial^2 y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial^2 x}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad (5)$$

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F(r, \theta)}{\partial \theta^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F(r, \theta)}{\partial \theta} \right),$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\partial^2 F(r, \theta)}{\partial r^2}. \quad (6)$$

Отже використовуючи метод суперпозиції функція напружень представлена у вигляді суми трьох звичайних рядів Фур'є по повним системам тригонометричних функцій по координатах x , у та θ . Всі ці ряди задовольняють тотожно бігармонічному рівнянню всередині області і містять послідовності коефіцієнтів достатні для виконання двох граничних умов на кожній границі.

Граничні умови у випадку навантаження прямокутника нормальними силами на сторонах з вільним від навантажень круговим отвором мають вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_x(\pm a, y) &= p = \text{const}, \\ \sigma_y(x, \pm b) &= q = \text{const}, \\ \tau_{xy}(\pm a, y) &= 0, \quad \tau_{xy}(x, \pm b) = 0, \\ \sigma_r(R, \theta) &= 0, \quad \tau_{r\theta}(R, \theta) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

3 Побудова розв'язку

Використовуючи співвідношення

$$\frac{\cos 2j\theta}{r^{2j}} = x C_j(x, y) + y S_j(x, y), \quad (10)$$

$$\frac{\cos 2j\theta}{r^{2j-2}} = (x^2 + y^2) [x C_j(x, y) + y S_j(x, y)],$$

де

$$\begin{aligned} C_j(x, y) &= \frac{\cos(2j+1)\theta}{r^{2j+1}} = \frac{1}{(2j)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2j} e^{-\lambda x} \cos \lambda y d\lambda = \\ &= \frac{(-1)^j}{(2j)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2j} e^{-\lambda x} \sin \lambda y d\lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_j(x, y) &= \frac{\sin(2j+1)\theta}{r^{2j+1}} = \frac{1}{(2j)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2j} e^{-\lambda x} \sin \lambda y d\lambda = \\ &= \frac{(-1)^j}{(2j)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2j} e^{-\lambda x} \cos \lambda y d\lambda, \end{aligned}$$

можна визначити функцію напружень $F^{(cyl)}(r, \theta)$ в декартових координатах та за формулами (5) обчислити компоненти напружень "циліндричної" частини загального розв'язку (2) $\sigma_x^{(cyl)}(x, y)$, $\sigma_y^{(cyl)}(x, y)$ та $\tau_{xy}^{(cyl)}(x, y)$. На сторонах прямокутника ці напруження визначають наступні функції:

$$g_{\sigma}(y) = \sigma_x^{(cyl)}(\pm a, y), \quad f_{\sigma}(x) = \sigma_y^{(cyl)}(x, \pm b),$$

$$g_{\tau}(y) = \tau_{xy}^{(cyl)}(\pm a, y), \quad f_{\tau}(x) = \tau_{xy}^{(cyl)}(x, \pm b).$$

Якщо ми використаємо представлення цих функцій в ряд Фур'є

$$\tau_{xy}^{(cyl)}(a, y) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k^{\tau} \sin \beta_k y,$$

$$\tau_{xy}^{(cyl)}(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{\tau} \sin \alpha_n x,$$

та встановимо залежність між довільними коефіцієнтами у виразі (3)

$$A_n = -\frac{f_n^{\tau}}{\alpha_n^2} - \frac{B_n}{\alpha_n} (1 + \alpha_n b \coth \alpha_n b),$$

$$C_k = -\frac{g_k^{\tau}}{\beta_k^2} - \frac{D_k}{\beta_k} (1 + \beta_k a \coth \beta_k a), \quad (11)$$

тоді компоненти дотичних напружень на сторонах прямокутника будуть тотожно рівні нулю.

Таким же чином, використовуючи представлення:

$$\cosh \alpha y \cos \alpha x = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{(\alpha r)^{2j}}{(2j)!} \cos 2j\theta,$$

$$2\alpha y \sinh \alpha y \cos \alpha x = (\alpha r)^2 + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left[\frac{(\alpha r)^{2j+2}}{(2j+1)!} + \frac{(\alpha r)^{2j}}{(2j-1)!} \right] \cos 2j\theta,$$

$$\cosh \beta x \cos \beta y = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\beta r)^{2j}}{(2j)!} \cos 2j\theta,$$

$$2\beta x \sinh \beta x \cos \beta y = (\beta r)^2 + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{(\beta r)^{2j+2}}{(2j+1)!} + \frac{(\beta r)^{2j}}{(2j-1)!} \right] \cos 2j\theta,$$

можна визначити функцію напружень $F^{(rec)}(x, y)$ в полярних координатах та обчислити з рівнянь (6) компоненти напружень "прямокутної" частини загального розв'язку (2) $\sigma_r^{(rec)}(r, \theta)$, $\tau_{r\theta}^{(rec)}(r, \theta)$ та $\sigma_\theta^{(rec)}(r, \theta)$.

Граничні умови для нормальних компонентів напружень на сторонах прямокутника (7) приводять до нескінченної системи рівнянь:

$$D_k \Delta(\beta_k a) + \frac{4}{b} (-1)^k \beta_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n (-1)^n \alpha_n^2}{(\alpha_n^2 + \beta_k^2)^2} = G_k, \quad 1 \leq k \leq \infty \quad (13)$$

$$B_n \Delta(\alpha_n b) + \frac{4}{a} (-1)^n \alpha_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k (-1)^k \beta_k^2}{(\alpha_n^2 + \beta_k^2)^2} = H_n, \quad 1 \leq n \leq \infty$$

та

$$2A_0 = p - g_0^\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^t (-1)^n}{\alpha_n b}, \\ 2C_0 = q - f_0^\sigma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k^t (-1)^k}{\beta_k a}, \quad (14)$$

де введено наступні позначення:

$$\Delta(\xi) = \coth \xi + \frac{\xi}{\sinh^2 \xi},$$

$$G_k = \frac{2}{\beta_k b} (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^t (-1)^n \alpha_n}{\alpha_n^2 + \beta_k^2} - \frac{g_k^t}{\beta_k} \coth \beta_k a - \frac{g_k^\sigma}{\beta_k},$$

$$H_n = \frac{2}{\alpha_n a} (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k^t (-1)^k \beta_k}{\alpha_n^2 + \beta_k^2} - \frac{f_n^t}{\alpha_n} \coth \alpha_n b - \frac{f_n^\sigma}{\alpha_n},$$

Таблиця 1

θ_0	λ				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0°	-1.08	-1.26	-1.55	-1.91	-2.24
15°	-0.82	-0.97	-1.25	-1.62	-2.01
30°	-0.06	-0.16	-0.39	-0.77	-1.34
45°	0.99	0.96	0.84	0.57	-0.06
60°	2.04	2.10	2.18	2.22	2.07
75°	2.82	2.94	3.23	3.70	4.44
90°	3.10	3.25	3.63	4.31	5.53

$$g_\sigma(y) = \sigma_x^{(\sigma)}(a, y) = g_0^\sigma + \sum_{k=1}^{\infty} g_k^\sigma \cos \beta_k y,$$

$$f_\sigma(x) = \sigma_y^{(\sigma)}(x, b) = f_0^\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} f_n^\sigma \cos \alpha_n x.$$

З граничних умов (7) для радіальних і тангенціальних напружень на контурі отвору отримаємо нескінченну систему рівнянь:

$$E_0 = - \left(A_0 + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n \alpha_n}{\sinh \alpha_n b} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k \beta_k}{\sinh \beta_k a} \right), \\ 2jE_j (4j-1) + 4jF_j (2j+1) = \quad (15)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n \alpha_n (-1)^j (\alpha_n R)^{2j}}{(2j)! \sinh \alpha_n b} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k \beta_k (\beta_k R)^{2j}}{(2j)! \sinh \beta_k a}, \quad 1 \leq j \leq \infty$$

$$2j \left[E_j (2j-1) + F_j (2j+1) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^t (-1)^j (\alpha_n R)^{2j-2}}{(2j-2)! \sinh \alpha_n b} +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k^t (\beta_k R)^{2j-2}}{(2j-2)! \sinh \beta_k a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n \alpha_n j (-1)^j (\alpha_n R)^{2j-2}}{(2j-2)! \sinh \alpha_n b} (1-j + \alpha_n b \coth \alpha_n b) \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k \alpha_k j (-1)^j (\alpha_k R)^{2j-2}}{(2j)! \sinh \alpha_k b} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k \beta_k (\beta_k R)^{2j-2}}{(2j-2)! \sinh \beta_k a} (1-j + \beta_k a \coth \beta_k a) \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k \beta_k j (\beta_k R)^{2j}}{(2j)! \sinh \beta_k a}, \quad 2 \leq j \leq \infty$$

Рівняння (13), (14) та (15) утворюють повну систему відносно невідомих $A_0, C_0, B_n, D_k, E_0, E_j, F_j$.

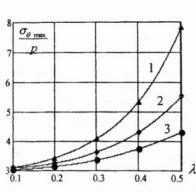
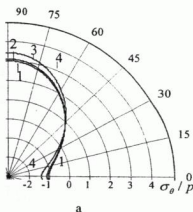
Структура нескінченної системи (13), (14), (15) зрозуміла. Рівняння (13), (14) відповідають напруженому стану для прямокутної пластини без отвору зі зміненими неоднорідними напруженнями на сторонах. Ця неоднорідність виникає через присутність отвору всередині прямокутної пластини. Рівняння (15) визначають напружений стан ззовні отвору, створений неоднорідними напруженнями на границі. Ця неоднорідність відображає присутність прямокутної границі пластини.

4 Чисельний аналіз результатів

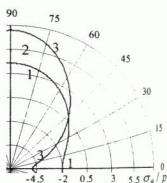
Для дослідження впливу обмеженості області на концентрацію напружень на контурі

Таблиця 2

θ_0	λ				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0°	-1.08	-1.36	-1.91	-2.97	-4.88
15°	-0.82	-1.04	-1.51	-2.37	-3.96
30°	-0.04	-0.17	-0.43	-0.85	-1.67
45°	1.00	1.03	1.06	1.10	1.18
60°	2.05	2.23	2.56	3.08	4.09
75°	2.82	3.11	3.67	4.69	6.49
90°	3.10	3.43	4.08	5.34	7.46

Рис.1 – Значення σ_θ / p при $\theta_0 = 90^\circ$ 

а



б

Рис.2 – Значення σ_θ / p на контурі отвору

отвору та порівняння з відомими результатами покладемо в (7) $q=0$. В табл. 1 та табл. 2 наведено значення коефіцієнта концентрації напружень σ_θ / p на контурі отвору для різних значень $\lambda = R/b$ при відношенні сторін $a/b=2$ та $a/b=1$, відповідно. Графік залежності коефіцієнта концентрації напружень від λ при $\theta_0 = 90^\circ$ наведено на рис.1, де крива 1 побудована для значення $a/b=1$, крива 2 - для $a/b=2$, крива 3 - розв'язок [4] для смуги. На рис.2 а, б побудовані графіки значення σ_θ / p на контурі отвору для різних значень λ при відношенні сторін $a/b=1$. На рис. 2 а: крива 1 - для пластини нескінченних розмірів ($\lambda=0$), крива 2 - для $\lambda=0.1$, крива 3 - для $\lambda=0.2$, крива 4 - для $\lambda=0.3$. На рис. 2 б: крива 1 - для $\lambda=0.3$, крива 2 - для $\lambda=0.4$, крива 3 - для $\lambda=0.5$.

5 Висновки

Даний підхід дозволяє врахувати вплив обмеженості області як по ширині, так і по довжині прямокутної пластини на напружений стан та концентрацію напружень при наявності кругового отвору. Побудовано аналітичний розв'язок задачі теорії пружності для обмеженої пластини з круговим отвором, розташованим симетрично та вільним від навантажень, при навантаженні її сторін нормальними рівномірно розподіленими зусиллями. Наведено розрахунки для одновісного рівномірного розтягу пластини. Визначені коефіцієнти концентрації напружень для різних значень діаметра отвору та співвідношення сторін прямокутної пластини. При зменшенні довжини пластини значно збільшується коефіцієнт концентрації напружень

на контурі отвору при $\theta_0 = 90^\circ$ відносно напрямку розтягуючого зусилля: з 5.53 при $R/b=0.5$ для пластини з відношенням сторін $a/b=2$ до значення 7.46 для квадратної пластини. При заданій ширині пластини зі збільшенням радіуса отвору коефіцієнт концентрації напружень значно зростає: з 3.1 для $R/b=0.1$ до 5.53 для $R/b=0.5$ при $a/b=2$ та з 3.1 до 7.46 при $a/b=1$. Є важливим врахування обмеженості смуги по довжині - для порівняння наведено значення σ_θ / p для смуги.

Список використаних джерел

1. Тимошенко С. П. Прочность и колебания элементов конструкций / С. П. Тимошенко. – Москва: Наука, 1975. – 704с.
2. Grinchenko V.T. The biharmonic problem and the progress in the development of analytical methods for the solution of boundary-value problems / V.T. Grinchenko // Journal of Engineering Mathematics– 2003. – 46. – P.281-297.
3. Galaktionov O.S. Stokes flow in a rectangular cavity with a cylinder / O.S. Galaktionov, V.V. Meleshko, G.W.F. Peters, H.E.H. Meijer // Fluid Dynamics Research – 1999. – 24. – P.81-102.
4. Howland R. C. J. On the Stresses in the Neighbourhood of a Circular Hole in a Strip under Tension / R. C. J. Howland // Philosophical Transactions Royal Society London – 1930. – 229. – P.49-86.

Надійшла до редколегії 03.11.11

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 519.9

Алексєєнко В. В. асп.,
Клюшин Д. А. д. ф.-м. н., проф.**Узагальнення р-статистики для вибірок з повтореннями**

Розглядається нова міра близькості між вибірками із повтореннями, яка базується на довірчих межах для основної розподіленої маси значень генеральної сукупності. Запропонована міра є узагальненням р-статистики [1]. Вона послаблює вимоги до вибірок і дозволяє застосовувати її в тому числі і для вибірок з повторами. Для цього використовується узагальнення гіпотези Хілла для заокруглених значень вибірок.

Ключові слова: міра близькості, гіпотеза Хілла, р-статистика

Email: vvalexeyenko@gmail.com, dokmed5@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н. Хусайнов Денис Ях'євич.

Вступ

Нехай $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ – вибірки, отримані простим випадковим вибором із генеральних сукупностей G та H відповідно $z = (z_1, z_2, \dots, z_k)$ – тестова вибірка, що належить одній з генеральних сукупностей. За допомогою р-статистики можна побудувати критерії для встановлення, якій саме генеральній сукупності належить тестова вибірка [1]. Критерії для перевірки таких гіпотез розділяються на універсальні критерії, які є слухними проти будь-якої пари альтернатив, де $F_1(x) \neq F_2(x)$ (критерій Колмогорова–Смірнова [2, 3], критерій Лемана–Розенблатта [4, 5] тощо), і критерії, що є слухними проти пар різних альтернатив із певного класу (критерії Діксона [6], Матисена [7], Вальда і Волфовица [8], Уїлкоксона [9], Манна–Уїтні [10] тощо). Критерій, що застосований на р-статистиці, належить до першої, універсальної категорії. В реальних задачах маємо виміри якоїсь характеристики об'єктів дослідження і певні еталонні значення для визначених об'єктів, що є задачею класифікації. Обмеженням застосування р-статистики є умова, що елементи вибірок є реалізаціями випадкових величин з абсолютно неперервними функціями розподілу. Через це не можливо застосовувати р-статистику, коли x або y містять повтори (це суперечить і правилу обчислення статистики у

Alexeyenko V. V. asp.

, Klyushin D. A. d. s., prof.

Extension of the p-statistics for samples with repetitions

A new proximity measure between samples with repetitions based on confidence bounds for the bulk of a general population is considered. The measure proposed is an extension of the p-statistics [1]. It relaxes requirements for samples and allows to apply it to samples with repetitions too. To do this we proved an extension of the Hill assumption for truncated sample values

Key Words: proximity-measure, Hill assumption, p-statistics

роботі [1], і гіпотезі, наведеній вище). Мета роботи – узагальнити р-статистику на випадок повторів елементів у вибірках і послабити припущення про вибірки. Основна ідея побудови модифікованої р-статистики – вважаємо, що наші вибірки є заокругленими реалізаціями неперервних випадкових величин. На практиці ми зазвичай і маємо справу з параметрами, обчисленими з певною похибкою.

Модифікована гіпотеза Хілла.

Нехай x_1, x_2, \dots, x_n – реалізація неперервної випадкової величини X , $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ – відповідний варіаційний ряд. Згідно гіпотези Хілла [11] в цьому випадку ймовірність того, що наступна реалізація x_{n+1} потрапить у інтервал $(x_{(i)}, x_{(j)})$ не залежить від функції розподілу F_X і дорівнює:

$$P(x_{n+1} \in (x_{(i)}, x_{(j)})) = \frac{j-i}{n+1} \quad (1)$$

Нехай x_1, x_2, \dots, x_n – відповідні заокруглення вибірки x'_1, x'_2, \dots, x'_n , отриманої простим випадковим вибором із генеральної сукупності G , породженої неперервною випадковою величиною. Для визначеності будемо вважати, що якщо $x_k = x_{(i)} = x_{(i+1)} = x_j$, то $m < n$. Припустимо, що якщо

$$x_{(i-1)} < x_{(i)} = x_{(i+1)} = \dots = x_{(i+j)} < x_{(i+j+1)} \quad (2)$$

то $\forall x_k : x_k = x_{(i)}$ виконується: $x_{(i)}^r < x_k < x_{(i+j)}^r$.

Таке припущення назовемо гіпотезою заокруглення

Позначимо:

$$M(i) = \text{Max}\{k : x_{(k)} = x_{(i)}\} \quad (3)$$

$$m(i) = \text{Min}\{k : x_{(k)} = x_{(i)}\} \quad (4)$$

Теорема 1. В рамках гіпотези заокруглення справедлива формула:

$$P(x_{n+1} \in (x_{(i)}, x_{(j)})) = \frac{m(j) - M(i)}{n+1} \quad (5)$$

Доведення. Покажемо, що

$$x_{n+1} > x_{(i)} \Leftrightarrow x_{n+1}^r > x_{(M(i))}^r.$$

Необхідність. Нехай $x_{n+1} > x_{(i)}$ і $x_{n+1}^r \leq x_{(M(i))}^r$. З властивостей оператора заокруглення випливає, що $x_{n+1}^r \geq x_{(i)}^r = x_{(M(i))}^r$. Отже, $x_{n+1}^r = x_{(M(i))}^r$, що суперечить припущенню заокруглення.

Достатність. Нехай $x_{n+1}^r > x_{(M(i))}^r$. Тоді з властивостей заокруглення: $x_{n+1} \geq x_{(M(i))}$ і враховуючи гіпотезу заокруглення випливає, що $x_{n+1} > x_{(i)} = x_{(M(i))}$.

Аналогічно можна довести, що $x_{n+1} < x_{(j)} \Leftrightarrow x_{n+1}^r < x_{(m(j))}^r$.

Тепер застосувавши гіпотезу Хілла отримаємо:

$$\begin{aligned} P(x_{n+1} \in (x_{(i)}, x_{(j)})) &= \\ &= P(x_{n+1}^r \in (x_{(M(i))}^r, x_{(m(j))}^r)) = \frac{m(j) - M(i)}{n+1} \end{aligned}$$

Теорема 2. Якщо у вибірці x_1, x_2, \dots, x_n елемент x_i повторюється m разів, то в рамках гіпотези заокруглення:

$$P(x_{n+1} = x_{(i)}) = \frac{M(i) - m(i)}{n+1} \quad (6)$$

Доведення. Покажемо, що

$$x_{n+1} = x_{(i)} \Leftrightarrow x_{m(i)}^r < x_{n+1}^r < x_{M(i)}^r.$$

Необхідність випливає із гіпотези заокруглення безпосередньо.

Достатність. Нехай $x_{m(i)}^r < x_{n+1}^r < x_{M(i)}^r$. Тоді з

властивостей оператора заокруглення випливає: $x_{m(i)} \leq x_{n+1} \leq x_{M(i)}$, звідки і випливає, що $x_{n+1} = x_{(i)}$.

Застосувавши гіпотезу Хілла отримаємо:

$$\begin{aligned} P(x_{n+1} = x_{(i)}) &= P(x_{n+1}^r \in (x_{(m(i))}^r, x_{(M(i))}^r)) = \\ &= \frac{M(i) - m(i)}{n+1} \end{aligned}$$

Наслідок 1. В рамках гіпотези заокруглення справедлива формула:

$$P(x_{n+1} \in [x_{(1)}, x_{(n)}]) = \frac{n-1}{n+1} \quad (7)$$

Доведення.

$$\begin{aligned} P(x_{n+1} \in [x_{(1)}, x_{(n)}]) &= P(x_{n+1} = x_{(1)}) + \\ &+ P(x_{n+1} \in (x_{(1)}, x_{(n)})) + P(x_{n+1} = x_{(n)}) = \\ &= \frac{M(1) - m(1) + m(n) - M(1) + M(n) - m(n)}{n+1} = \\ &= \frac{M(n) - m(1)}{n+1} = \frac{n-1}{n+1} \end{aligned}$$

Зауваження. Якщо $x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(n)}$ то припущення гіпотези Хілла є достатнім для виконання гіпотези заокруглення (вважаємо, що значення збігаються із заокругленнями) і формула Теорема 1 збігається з формулою гіпотези Хілла.

Модифікована р-статистика

Позначимо за A гіпотезу про рівність неперервних функцій розподілів F_G і F_H генеральних сукупностей G і H відповідно. Нехай $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ заокруглені значення з вибірок G і H відповідно. Позначимо:

$$A_y^{(k)} = \{y_k \in (x_{(i)}, x_{(j)})\} \quad (8)$$

$$A_x^{(k)} = \{y_k = x_{(i)}\} \quad (9)$$

Нехай для генеральної сукупності G виконується гіпотеза заокруглення.

Тоді, якщо $F_G = F_H$ ($G = H$), то згідно Теоремами 1 і 2:

$$P(A_y^{(k)}) = P(y_k \in (x_{(i)}, x_{(j)})) = \frac{m(j) - M(i)}{n+1} = p_i \quad (10)$$

$$P(A_{ij}^{(k)}) = P(y_k = x_{(i)}) = \frac{M(i) - m(i)}{n+1} = p_n \quad (11)$$

Нехай h_y – кількість $k=1, m$ таких, що подія $A_{ij}^{(k)}$ справджується. Для фіксованих i та j події $A_{ij}^{(k)}$ фактично є модифікованою схемою Бернуллі (залежні, але рівномірні події).

Застосуємо для оцінки невідомої ймовірності довірчі межі інтервалу Вільсона:

$$p_{ij}^{(1)} = \frac{h_y + \frac{g^2}{2} - \sqrt{h_y(1-h_y)m + \frac{g^2}{4}}}{m + g^2} \quad (12)$$

$$p_{ij}^{(2)} = \frac{h_y + \frac{g^2}{2} + \sqrt{h_y(1-h_y)m + \frac{g^2}{4}}}{m + g^2} \quad (13)$$

Тоді $I_{ij} = (p_{ij}^{(1)}, p_{ij}^{(2)})$ – довірчий інтервал для невідомої ймовірності, побудований на підставі h_y . Позначимо за N кількість різних пар $(M(i), m(j))$, для яких $p_{M(i), m(j)} > 0$ + кількість різних пар $(m(i), M(i))$, для яких $p_n > 0$, L – кількість пар (i, j) з попередніх, для яких $p_{ij} \in I_{ij}$.

Розглянемо випадкову подію $B = p_{ij} \in I_{ij}$.

Частота цієї події $\frac{L}{N} = h$. Межі інтервалу Вільсона для невідомої ймовірності події B набуде вигляд:

$$p^{(1)} = \frac{h + \frac{g^2}{2} - \sqrt{h(1-h)m + \frac{g^2}{4}}}{m + g^2} \quad (14)$$

$$p^{(2)} = \frac{h + \frac{g^2}{2} + \sqrt{h(1-h)m + \frac{g^2}{4}}}{m + g^2} \quad (15)$$

Тоді аналогічно $I = (p^{(1)}, p^{(2)})$ – довірчий інтервал для події невідомої ймовірності події B , яка по суті стверджує, що генеральні сукупності мають однакові функції розподілу.

Величину h назвемо модифікованою p -статистикою.

Для введеної таким чином модифікованої p -статистики залишаються чинними теореми, доведені для p -статистики, так само як і критерій

прийняття гіпотези про рівність функцій розподілу.

Зауваження. Якщо $x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(n)}$, то модифікована p -статистика зводиться до p -статистики (за зауваженням до модифікованої гіпотези Хілла).

Коректність узагальнення

Теорема 3. Якщо за N_{ij} позначити кількість

$y_k : y_k \in I_{ij}$, то ця випадкова величина матиме узагальнений розподіл Бернуллі, якщо виконуватиметься умова: $F_G = F_H$.

Доведення. Розглянемо події $A_{ij}^k, k=1, m$. Не можна стверджувати, що ці події є незалежними, але можна стверджувати, що для фіксованої пари (i, j) всі ці події рівномірні, що випливає із узагальненої гіпотези Хілла в умовах виконання умови $F_G = F_H$. Отже вказана величина N_{ij} дійсно має узагальнений розподіл Бернуллі.

Отже для узагальненої p -статистики доведення теореми 1 [1] залишиться справедливим. \square

Теорема 4. Якщо справедлива гіпотеза $F_G = F_H$, то проблему обчислення рівня значимості інтервалу $I^{(n)}$, побудованого за правилом 3σ можна звести до розгляду випадкових величин, рівномірно розподілених на відрізку $[0, 1]$.

Доведення. Нехай x – довільна випадкова величина з генеральної сукупності G зі строго зростаючою неперервною функцією розподілу F_G , (x_1, x_2, \dots, x_n) – заокруглення вибірки $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ з генеральної сукупності G , а $(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})$ і $(x'_{(1)}, x'_{(2)}, \dots, x'_{(n)})$ – відповідні варіаційні ряди. Розглянемо випадкову величину $z = F_G(x')$. Відомо, що z має рівномірний розподіл $F_z(u)$ на проміжку $[0, 1]$.

Позначимо:

$$z_i = F_G(x'_i), w_i = F_G(y'_i) \quad (16)$$

З монотонності F_G випливає, що $z_{(i)} = F_G(x'_{(i)})$. Тому події $y'_k \in (x'_{(i)}, x'_{(j)})$ і $w_k \in (z_{(i)}, z_{(j)})$ рвнiоiмoвiрнi.

Покажемо, що для розглядуваних інтервалів I_j також рівно ймовірними будуть події

$$y_k \in (x_{(j)}, x_{(j)}) \text{ і } y'_k \in (x'_{(j)}, x'_{(j)})$$

В теоремах 1 і 2 показана справедливості наступних двох рівностей:

$$P(x_{n+1} \in (x_{(j)}, x_{(j)})) = P(x'_{n+1} \in (x'_{(m(j))}, x'_{(m(j))})) \quad (17)$$

$$P(x_{n+1} = x_{(j)}) = P(x'_{n+1} \in (x'_{(m(j))}, x'_{(m(j))})) \quad (18)$$

Згідно визначення, межі розглядуваних інтервалів можуть бути або $(M(i), m(j))$ або $(m(i), M(i))$. Окрім того, $x_{(j)} = x_{m(i)} = x_{m(i)}$ за визначенням.

Тому події $y_k \in (x_{(j)}, x_{(j)})$ і $y'_k \in (x'_{(j)}, x'_{(j)})$ рівноймовірні.

Отже ми показали рівноймовірність і подій $y_k \in (x_{(j)}, x_{(j)})$ і $w_k \in (z_{(j)}, z_{(j)})$.

Якщо для цього твердження повторити міркування для аналогічного твердження р-статистики, то отримаємо доведення теореми.

Наслідок: Для перевірки справедливості рівня значущості модифікованої р-статистик можна так само застосувати машинне моделювання.

Нехай $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ - послідовність подій, які можуть відбутися при проведенні випадкового випробування E і $\lim_{k \rightarrow \infty} p(B_k) = p^*$.

Нехай $h_{n_1}(B_1), h_{n_2}(B_2), \dots, h_{n_k}(B_k), \dots$ - послідовності частот подій $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$

відповідно, причому $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{n_k} = 0$. Випробування

E будемо називати підсиленням експериментом, якщо $\lim_{k \rightarrow \infty} h_{n_k}(B_k) = p^* < 1$

Критерій перевірки гіпотези рівності функцій розподілу

Критерій для перевірки гіпотези про рівність неперервних гіпотетичних функцій розподілу G і H з рівнем значущості 0.05. може бути сформульований так: Якщо довірчий інтервал

$$I = (p^{(1)}, p^{(2)})$$

містить в собі ймовірність $p = 1 - \beta = 0.95$, то гіпотеза приймається, інакше вона відхиляється і приймається альтернативна гіпотеза

Висновки

В результаті роботи було побудовано модифіковану р-статистику, яка узагальнює р-статистику, послабляючи обмеження на її застосування.

Таким чином було розширено клас задач, для яких можна застосовувати аналог р-статистики, окрім того було послаблено припущення, необхідне для застосування р-статистики.

Список використаних джерел

1. Ключини Д.А., Петунин Ю.І. Непараметрический критерий эквивалентности генеральных совокупностей, основанный на мере близости между выборками // Укр.матем. журн. – 2003, т.5, №. 2. – С. 147-163.
2. Смирнов Н.В. Оценка расхождения между эмпирическими кривыми распределения в двух независимых выборках // Бюлл. Московского ун-та. — 1939. — Т. 2, № 2. — С. 3-14.
3. Смирнов Н.В. Об уклонениях эмпирической кривой распределения // Матем. сборник. — 1939. — Т. 48, №. 6. — С. 3-26.
4. Lehmann E.L. Consistency and unbiasedness of certain nonparametric tests / Ann. Math. Statist. — 1951. V.22. № 1. — P.165-179.
5. Rosenblatt M. Limit theorems associated with variants of the von Mises statistic // Ann. Math. Statist. — 1952. V.23. — P.617-623.
6. Dixon W.G. A criterion for testing the hypothesis that two samples are from the same population // Ann. Math. Stat. — 1940. — Vol. 11. — P.199-204.
7. Mathisen H.C. A method of testing the hypothesis that two samples are from the same population // Ann. Math. Stat. — 1943. — Vol. 14. — P. 188-194.
8. Wald A., Wolfowitz J. On a test whether two samples are from the same population // Ann. Math. Stat. — 1940. — Vol. 11. — P. 147-162.
9. Wilcoxon F. Individual comparisons by ranking methods // Biometrika. — 1945. — Vol. 1. — P. 80-83.
10. Mann H.B., Whitney D.R. On a test of whether one of the random variables is stochastically larger than other // Ann. Math. Stat. — 1947. — Vol. 18. — P. 50-60.
11. Hill B.M. Posteriori distribution of percentiles: Bayes' theorem for sampling from a population // J. Amer. Statist. Assoc. — 1968. — Vol. 63. — P. 677-691.

Надійшла до редколегії 17.11.2011

Верченко А.П., канд. фіз.-мат. наук,
Гнатюк В.О., студент,
Швець Д.В., аспірант.

Побудова та чисельне дослідження математичної моделі технологічного процесу подрібнення

В статті представлена математична модель процесу помолу залізної руди, що описується системою звичайних нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Дана модель дозволяє при заданні початкових даних та варіації змінних симулювати робочий стан, а також ефект надмірного завантаження млина.

Ключові слова: математичне моделювання,
процес помолу залізної руди.

A.P. Verchenko, PhD,
V.O. Gnatiuk, student,
D.V. Shvets, postgraduate.

Building and numerical study of mathematical model of grinding process

The subject of this article is mathematical model of iron ore grinding process. This model is described by simple non-linear first order differential equations system. This model gives opportunity to simulate working condition and plugging phenomenon of mill by determination of initial data and variation of parameters.

Key Words: mathematical modeling, grinding process, plugging.

*E-mails: an.verchenko@gmail.com, vovagn@ya.ru, dmitrysv@gmail.com

Статтю представив д.т.н. Гарашенко Ф.Г.

Вступ

В сучасних економічних умовах, при жорсткій конкуренції, підприємства горнозбагачувальних комбінатів (ГЗК) зацікавлені у встановленні ефективних автоматичних систем управління технологічними процесами (АСУТП) з метою підвищення ефективності виробництва: збільшенні кількості готової продукції, зменшення питомих витрат ресурсів і т.п.

У зв'язку з даними тенденціями постають задачі побудови алгоритмів автоматичного керування як окремими агрегатами, так і певними ланками технологічного процесу. Ці задачі передбачають детальне вивчення процесів, що відбуваються в рамках технологічного ланцюга, їх математичну формалізацію та дослідження.

Актуальність задач автоматизації виробничих процесів

На даний момент технологічний процес подрібнення залізної руди є маловивченим з точки зору розробки формальних математичних підходів. Така ситуація зумовлена складністю вказаної задачі та високими вимогами до її розв'язку. Такі фактори як неточність вимірювальних приладів, відсутність достатньої та достовірної інформації щодо технологічних властивостей сировини, часова затримка у керуванні, варіації виробничих параметрів роблять складним моделювання та ідентифікацію стану системи, передбачення її поведінки.

Математична модель системи являє собою сукупність операторів (систему рівнянь), відображаючих моделі окремих вузлів, тобто модель формується з математичного опису окремих технологічних операцій, які складають систему.

В рамках даної роботи досліджується спрощена, тобто, ідеалізована математична модель, в якій збурюючі чинники не враховуються. Основна вимога, якій повинна відповідати модель – можливість технологічного розрахунку операції процесу подрібнення.

Процес подрібнення на збагачувальних фабриках використовують для роз'єднання тісно переплетених і зрослих між собою зерен різних мінералів, що містяться в корисній копалині. Чим повніше відбувається розкриття зерен корисної копалини при подрібненні, тим більш успішним буде його наступне збагачення [1–4].

Постановка задачі автоматизації технологічного процесу подрібнення

Стадія подрібнення є найбільш енергоспоживаючим, витратним та технологічно важливим процесом серед всього ланцюга збагачення. Її можна представити як замкнений цикл, що складається з шарового млина та спірального класифікатора

У шаровий млин подається руда класу крупності <5% +20мм та технічна вода, яка виконує транспортуючу роль у системі. Після виходу з млина продукт помолу, що називається пульпою, разом із додатковою водою потрапляє у

ванню класифікатора. Даний агрегат діє за принципом гравітаційної сепарації та забезпечує розподіл пульпи на недодрібнений та готовий клас. Недодріблена частина у вигляді піскової маси повертається спіралями класифікатора назад до млина, в той час, як готова зливається на подальші стадії збагачення. В процесі класифікації густина пульпи є визначальним фактором для одержання зливу необхідної крупності. У рідкій пульпі швидкість осадження крупних частинок збільшується, а отже зменшується можливість їхнього попадання в злив. Навпаки, у дуже густій пульпі осадження крупних частинок відбувається повільніше і злив виходить більш «грубим».

Процес подрібнення може супроводжуватись розвантаженням або надмірним завантаженням млина в залежності від подрібнюючого середовища, характеристики руди та режиму роботи стадії подрібнення.

Процес описується наступними входними параметрами: витрата руди, що надходить у млин, циркулююче навантаження (піськове навантаження класифікатора), ступінь завантаження млина, витрату води на млин, гранулометричний склад продукту, що подрібнюється, густину пульпи на зливах. Основні вихідні параметри – гранулометричний склад подрібненої руди і продуктивність процесу.

Для оцінки ступеня завантаження млина рудою використовується метод, заснований на вимірюванні шуму млина в різних частотних діапазонах. Гранулометричний склад продуктів подрібнення вимірюється безпосередньо автоматичними гранулометрами, встановленими на зливі класифікатора. Густина пульпи оцінюється методом математичного підрахунку.

Пропонується математична модель, що базується на дослідженнях робіт [5] і [6]. Особливостями приведених моделей є включення параметру завантаження млина, як показника стану системи. Це також дає можливість моделювати ситуації надмірного завантаження системи.

У роботі [5] автори підтвердили необхідність включення цього параметру у модель для покращання контролю процесу.

Математична модель технологічного процесу подрібнення

На основі досліджень математичного представлення даної проблеми у [5] була побудована схожа математична модель з внесенням змін технологічного характеру.

На рис. 1 зображена схема процесу подрібнення, де відповідні потоки позначені змінними параметрами математичної моделі.

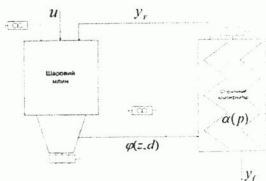


Рис. 1 Параметризована схема першої стадії подрібнення.

Процес описується системою з трьох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку [5], компонентами якої є:

– зміна у часі циркулюючої кількості піскової маси

$$T_f \dot{y}_f = -y_f + (1 - \alpha(p))\varphi(z, d), \quad (1)$$

– зміна у часі циркулюючої кількості вихідного продукту

$$T_r \dot{y}_r = -y_r + \alpha(p)\varphi(z, d), \quad (2)$$

– зміна у часі загального завантаження млина

$$\dot{z} = -\varphi(z, d) + y_r + u, \quad (3)$$

де T_f, T_r [год] – часові константи;

y_r, y_f $\left[\frac{\text{тон}}{\text{год}}\right]$ – кількість продуктів розділених класифікатором відповідно на готовий та недодрібнений клас (піскова маса);

u $\left[\frac{\text{тон}}{\text{год}}\right]$ – завантаження млина; z [тон] – кількість продукту у млині; $\varphi(z, d)$ – функція помолу що залежить від завантаження млина та характеристики руди; $\alpha(p)$ – функція класифікації, що залежить від поточної потужності класифікатора.

Функція помолу $\varphi(z, d)$ для різних характеристик руди представлена на рис. 2. Це немонотонна функція від параметра завантаження z [5]. При великих значеннях z ефективність помолу падає та відбувається ефект надмірного завантаження. При малих –

економічний показник виробництва не
виправдовує витрат ресурсів.

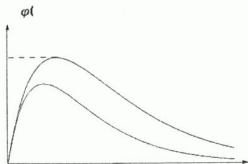


Рис. 2 Функція помолу в залежності від характеристик руди.

Функція класифікації, що представлена на рис. 3, монотонно зростаюча функція від потужності класифікатора p , яка знаходиться в

$$p \leq p \leq p$$

межах $[0;1]$ при $0 \leq p \leq 1$.

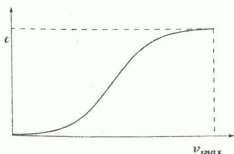


Рис. 3 Функція класифікації в залежності від потужності класифікатора.

Область визначень функцій відповідає фізичним обмеженням агрегатів:

$$\text{якщо } y_f(\mathbf{0}) \geq 0, \quad y_r(\mathbf{0}) \geq 0, \quad z(\mathbf{0}) \geq 0,$$

$$\text{то } y_f(\mathbf{t}) \geq 0, \quad y_r(\mathbf{t}) \geq 0.$$

Поклавши характеристику руди \bar{a} за константу, точка рівноваги системи $\varphi(\bar{z}, \bar{a})$, \bar{y}_r , \bar{y}_f визначається через параметри \bar{u} , \bar{p} :

$$\bar{y}_f = \bar{u}, \quad (4)$$

$$\bar{y}_r = \frac{\alpha(\bar{p})\bar{u}}{1 - \alpha(\bar{p})}, \quad (5)$$

$$\varphi(\bar{z}, \bar{a}) = \frac{\bar{u}}{1 - \alpha(\bar{p})}. \quad (6)$$

З рис. 4 можна зробити висновок, що точок рівноваги може бути дві, одна або зовсім не існувати. За умови нерівності

$$\bar{u} < (1 - \alpha(\bar{p}))\varphi_{\max}(\bar{a}) \quad (7)$$

існує дві різні точки рівноваги, які позначено, відповідно, на графіку як \bar{z}_1 і \bar{z}_2 . Тут $\varphi_{\max}(\bar{a})$ – максимальне значення функції $\varphi(\bar{z}, \bar{a})$ по \bar{z} . Саме в точці $\varphi_{\max}(\bar{a})$ функція має єдину точку рівноваги.

$$\varphi(\bar{z}, \bar{a})$$

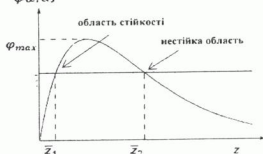


Рис. 4 Точки рівноваги та область стійкості [6].

Лінеаризуючи систему рівнянь (1)–(3) в точці рівноваги, можна виписати наступні співвідношення:

$$\lambda_1 = -T_f^{-1} \quad (8)$$

$$\lambda_2 + \lambda_2 = -\varphi_z(\bar{z}, \bar{a}) - T_r^{-1} \quad (9)$$

$$\lambda_2 \lambda_2 = T_r^{-1} \varphi_z(\bar{z}, \bar{a}) (1 - \alpha(\bar{p})), \quad (10)$$

де φ_z частинна похідна функції φ по \bar{z} . При цьому рівняння (9)–(10) отримані за теоремою Вієта.

Виходячи з виразів (8)–(10), характеристика стійкості визначається знаком функції $\varphi_z(\bar{z}, \bar{a})$. При $\varphi_z(\bar{z}, \bar{a}) > 0$ точка рівноваги є стійкою, в іншому випадку – нестійкою. На рис. 4

представлені вищевказані області стійкості рівноваги відносно максимуму функції $\varphi(z, d)$.

Приклади чисельних розрахунків на основі моделі технологічного процесу подрібнення

Для підтвердження адекватності моделі (1)–(3) були проведені чисельні експерименти у математичному пакеті Wolfram Mathematica 8.0. Параметрами моделі виступали наступні функції та константи:

$$\varphi(z, d) = 20 \cdot z \cdot \exp\left(-\frac{d \cdot z}{80}\right),$$

$$\alpha(p) = 9\left(\frac{p}{p_{\max}}\right)^2 - 13.5\left(\frac{p}{p_{\max}}\right)^4 + 5.4\left(\frac{p}{p_{\max}}\right)^5,$$

$$p_{\max} = 200; T_f = 0.3; T_r = 0.1; u = 110; d = 1.2.$$

Для максимального наближення до умов перебігу реального процесу, вибір параметрів здійснювався на основі наявних даних з приладів, які входять до складу діючих систем АСУТП на ГЗК. Результати експерименту приведено на Рис. 5. На графіках зображено імітацію динаміки процесу подрібнення в залежності від часу t , де

– $y_f \left[\frac{\text{тон}}{\text{год}} \right]$ – зміна динаміки готового класу (пунктирна крива);

– $y_r \left[\frac{\text{тон}}{\text{год}} \right]$ – зміна динаміки недодрібненого класу (неперервна крива);

– $z(t) [\text{тон}]$ – кількість продукту у млині (штрих-пунктирна крива).

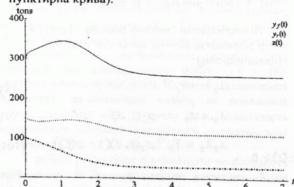


Рис. 5. Модель замкнутої системи циклу подрібнення.

Для ілюстрації ефекту надмірного завантаження млина, було збільшено параметр d зі значення $d = 1.2$ до 1.4 , тобто характеристика руди замінена на більш тверду. В

реальній ситуації це може виглядати як збільшення розміру вхідної фракції руди або ж зміна її фізико-механічних властивостей. Результат продемонстровано на Рис. 6.

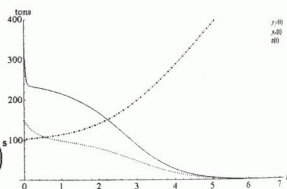


Рис. 7. Ефект перенавантаження млина.

Відповідно до отриманих результатів, з часом кількість продукту $z(t)$ у млині зростає, в той час як динаміка інших потоків циклу прямує до нуля. Це свідчить про те, що циркулююча маса не встигає досить якісно перемолотись, щоб вийти з циклу, і накопичується у млині разом з вхідною рудою.

Одержані результати досить адекватно відображають реальні процеси, що відбуваються у млині на стадії подрібнення.

Список використаних джерел

1. Morrell S., Sterns U. The application of population balance models to very fine grinding in tower mills // International Mineral Processing. 1990. – №3. – P.61–66.
2. Ramasamy M., Narayanan S., Rao C. Control of ball mill grinding circuit using model predictive control scheme // Journal of Process Control. 1994. – №15. – P.273–283.
3. Богданов О.С., Ненарокомов Ю.Ф. Справочник по обогащению руд. Обогащительные фабрики. – М.: Недра, 1984. – 360 с.
4. Абрамов А.В. Закономерности подрібнення. Технології збагачення. – К., 1993. – 250 с.
5. Grogard F., Wertz V. Robust Stabilization of a Nonlinear Cement Mill Model // Transactions on Automatic Control. – 2002. – Vol.46. – P.618–623.
6. Magni L., Bastin G., Wertz V. Multivariable nonlinear predictive control of cement mills // Control System Technology. – 2002. – Vol.7. – P.502–508.

Надійшла до редколегії 30.11.11

УДК 519.633

Гук Л.М., к. ф.-м. н.

Метод явного рахунку для реалізації моделі циркуляції атмосфери

В роботі представлено різницевий метод явного рахунку розв'язання одномірних задач конвективної дифузії, як складових більш складної задачі реалізації моделі циркуляції атмосфери. Наведені алгоритм реалізації методу та блок-схема алгоритму. Наведені результати теоретичного дослідження методу по основним характеристикам: апроксимація, стійкість, збіжність. Описані переваги та недоліки запропонованого методу.

Ключові слова: модель циркуляції атмосфери, задача конвективної дифузії, різницевий метод, алгоритм реалізації.

Method of explicit counting for implementation of atmospheric circulation model

A finite-difference method of explicit counting for solving one-dimensional convective diffusion problems is proposed. Each of these problems is a part of intricate problem implementation of atmospheric circulation model. Implementation algorithm of method and algorithm flow diagram is presented. The results of theoretical study of key features: approximation, stability, convergence are produced. Advantages and disadvantages of proposed method are described.

Key words: atmospheric circulation model, convective diffusion problem, difference method, algorithm of realization.

L. M. Huk, Ph.D.

E-mail: lessiagook@bigmir.net

Статтю представив д. т. н., проф. Гарашенко Ф.Г.

Вступ

В сучасній науці екологічні, кліматичні та синоптичні прогнози тісно пов'язані з математичним моделюванням циркуляції атмосфери. Розв'язування більшості метеорологічних задач базується на реалізації складних математичних моделей, основу яких складають рівняння Навьє-Стокса й тепло-, масопереносу [1]. В загальному випадку це трьохмірні нелінійні рівняння в частинних похідних другого порядку з малими параметрами при старших похідних. Задача реалізації моделі циркуляції атмосфери має значну обчислювальну складність та обмеження на строк отримання розв'язку. Вибір оптимального методу розв'язання рівнянь для задач метеорології є складною проблемою, так як ціль (точність) і засоби (економічність) суперечать один одному.

Часто розв'язок систем рівнянь, що описують динамічні процеси в атмосфері, проводять за допомогою розщеплення за напрямками та (або) за фізичними процесами. Це дозволяє звести проблему до розв'язання послідовності одномірних задач конвективної дифузії, пов'язаних між собою початковими даними.

На сьогодні розроблено потужний апарат методів розв'язування рівнянь конвективної дифузії. Відомі й перевірені методи знайшли своє місце в таких фундаментальних роботах як [2-4];

більш нові підходи представлені в численних публікаціях. Різні методи мають свої переваги та недоліки. Тому вибір методу реалізації моделі циркуляції атмосфери повинен спиратися на особливості самої задачі. При реалізації моделі циркуляції атмосфери необхідно враховувати: нелінійність рівнянь, можливість виродження їх типу при прямуванні до нуля коефіцієнтів дифузії, обчислювальну складність і обмеження на час отримання розв'язку, а також неусуwnу похибку початкових даних, обумовлену похибкою вимірів і нерівномірним розподілом вимірювальних станцій на земній кулі.

Відомі на сьогодні різницеві схеми умовно поділяються на явні та неявні. Неявні методи при зміні типу рівняння в розрахунковій області можуть давати якісно невірний розв'язок, а у випадку нелінійних рівнянь виникає необхідність застосування ітерацій, що значно збільшує час розрахунку. Застосування явних методів потребує жорсткого обмеження на часовий крок, що також призводить до збільшення часу реалізації.

В даній роботі представлено різницевий метод розв'язання одномірної задачі конвективної дифузії, котрому не притаманні вказані вище недоліки.

Метод явного рахунку

Застосовуючи розщеплення за просторовими координатами систему тривимірних рівнянь

гідродинаміки можна звести до послідовності
одновимірних задач типу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad (1)$$

$$\mu = \mu(x, t) > 0, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \eta(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = \alpha(t), \quad u|_{x=\ell} = \beta(t), \quad t > 0. \quad (3)$$

Проведемо просторово-часову
дискретизацію. Введемо сітку $\overline{\omega}_{ht} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_t$,

$$\overline{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad h = \ell/N\}$$

$$\overline{\omega}_t = \{t_n = n\tau, \quad i = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Апроксимуємо задачу (1)-(3) наступною
різницевою схемою [5]

$$\begin{aligned} & \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + \frac{v^+}{2} \left[\frac{y_{i+1}^n - y_i^n}{h} + \frac{y_i^{n+1} - y_{i-1}^{n+1}}{h} \right] + \\ & + \frac{v^-}{2} \left[\frac{y_{i+1}^{n+1} - y_i^{n+1}}{h} + \frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h} \right] - \\ & - \frac{1}{h} \left[a_{i+1}^+ \frac{y_{i+1}^n - y_i^n}{h} - a_i^+ \frac{y_i^{n+1} - y_{i-1}^{n+1}}{h} \right] - \\ & - \frac{1}{h} \left[a_{i+1}^- \frac{y_{i+1}^{n+1} - y_i^{n+1}}{h} - a_i^- \frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h} \right] = f_i^n \end{aligned} \quad (4)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; \quad n = 0, 1, \dots;$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad (5)$$

$$y_0^{n+1} = \alpha(t^{n+1}), \quad y_N^{n+1} = \beta(t^{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots; \quad (6)$$

де

$$v^+ = 0.5(v_i^n + |v_i^n|) \geq 0, \quad v^- = 0.5(v_i^n - |v_i^n|) \leq 0,$$

$$v^+ + v^- = v,$$

$$a_i^+ = \begin{cases} \frac{\mu_i + \mu_{i-1}}{2}, & v_i \geq 0, \\ 0, & v_i < 0; \end{cases}$$

$$a_i^- = \begin{cases} 0, & v_i \geq 0, \\ \frac{\mu_i + \mu_{i-1}}{2}, & v_i < 0. \end{cases}$$

Побудова даної схеми основана на винесенні
різниці проти потоку на верхній часовий шар, як
в апроксимації першої просторової похідної, так і
другої. Це дозволяє будувати розв'язок для точок
сітки в порядку зростання індексу i при $v \geq 0$,
або спадання i при $v < 0$, за алгоритмом
реалізації явних схем. Тому запропонована схема
отримала назву: *схема явного рахунку розв'язання
одновимірної задачі конвективної дифузії*.
Наведемо алгоритм реалізації схеми (4)-(6).

Крок 1: визначаємо точки розрахункової
області, в яких швидкість конвекції змінює знак.

Знаходимо множину

$$K = \left\{ k_0 = 0, \quad k_j = i, \quad j = \overline{1, J}, \quad i \in I = \{1, \dots, N-1\}; \right. \\ \left. \operatorname{sgn}(v_i) \neq \operatorname{sgn}(v_{i-1}), \quad k_{J+1} = N \right\},$$

J - кількість змін знаку швидкості конвекції
в розрахунковій області.

Крок 2: знаходимо розв'язок в точках зміни
знаку швидкості конвекції з «-» на «+».

Для всіх $k \in K \setminus \{0, N\}$ таких, що $v_k^n > 0$
знаходимо значення y_{k-1}^{n+1} , y_k^{n+1} . Для цього
скористасмося наступними міркуваннями.
Запишемо схему (4) для точок x_{k-1} й x_k ,
враховуючи, що $v_{k-1}^n < 0$, $v_k^n > 0$:

$$\begin{aligned} & \frac{y_{k-1}^{n+1} - y_{k-1}^n}{\tau} + \frac{v_{k-1}^n}{2} \left[\frac{y_k^{n+1} - y_{k-1}^{n+1}}{h} + \frac{y_{k-1}^n - y_{k-2}^n}{h} \right] - \\ & - \frac{1}{h} \left[a_k^n \frac{y_k^{n+1} - y_{k-1}^{n+1}}{h} - a_{k-1}^n \frac{y_{k-1}^n - y_{k-2}^n}{h} \right] = f_{k-1}^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{y_k^{n+1} - y_k^n}{\tau} + \frac{v_k^n}{2} \left[\frac{y_{k+1}^n - y_k^n}{h} + \frac{y_k^{n+1} - y_{k-1}^{n+1}}{h} \right] - \\ & - \frac{1}{h} \left[a_{k+1}^n \frac{y_{k+1}^n - y_k^n}{h} - a_k^n \frac{y_k^{n+1} - y_{k-1}^{n+1}}{h} \right] = f_k^n. \end{aligned}$$

Таким чином, маємо систему двох рівнянь з
двома невідомими з якої знаходимо значення
 y_{k-1}^{n+1} , y_k^{n+1} :

$$y_{k-1}^{n+1} = \frac{(1 + p_k) \Re_k - q_{k-1} \Im_k}{s_k}, \quad (7)$$

$$y_k^{n+1} = \frac{p_k \Re_k + (1 - q_{k-1}) \Im_k}{s_k}, \quad (8)$$

$$\text{де } p_k = \frac{\tau}{h} \left(\frac{v_k^n}{2} + \frac{a_k^n}{h} \right), \quad q_k = \frac{\tau}{h} \left(\frac{v_k^n}{2} - \frac{a_{k+1}^n}{h} \right),$$

$$s_k = 1 + p_k - q_{k-1},$$

$$\Re_k = (1 - p_{k-1}) y_{k-1}^n + p_{k-1} y_{k-2}^n + \mathcal{F}_{k-1}^n,$$

$$\Im_k = (1 + q_k) y_k^n - q_k y_{k+1}^n + \mathcal{F}_k^n.$$

Крок 3: безпосереднє обчислення...

Для всіх точок x_{k_j} , $k_j \in K$, $j = \overline{0, J}$

виконуємо наступну послідовність дій:

- перевіряємо знак v_{k_j} ,
- якщо $v_{k_j}^n \geq 0$, то проводимо розрахунок по
схемі

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + \frac{v_i^n}{2} \left[\frac{y_{i+1}^n - y_i^n}{h} + \frac{y_i^{n+1} - y_{i-1}^{n+1}}{h} \right] -$$

$$-\frac{1}{h} \left[a_{i+1}^n \frac{y_{i+1}^n - y_i^n}{h} - a_i^n \frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h} \right] = f_i^n, \quad (9)$$

$$\forall i = \overline{k_j + 1, k_{j+1} - 1};$$

- якщо $v_{k_j}^n < 0$, то проводимо розрахунок в зворотному напрямку по схемі

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + \frac{v_i^n}{2} \left[\frac{y_{i+1}^{n+1} - y_{i+1}^n}{h} + \frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h} \right] -$$

$$-\frac{1}{h} \left[a_{i+1}^n \frac{y_{i+1}^{n+1} - y_{i+1}^n}{h} - a_i^n \frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h} \right] = f_i^n, \quad (10)$$

$$\forall i = \overline{k_{j+1} - 1, k_j + 1};$$

Таким чином розрахунок по схемі (4)-(6) ведеться за алгоритмом явних схем, ускладнюючись лише визначенням точок зміни знаку швидкості конвекції і розрахунком значень на верхньому часовому шарі в точках зміни знаку $v(x)$ з «-» на «+». Така організація розрахунку більш економна, ніж застосування методу прогонки. При веденні розрахунку за схемою (4)-(6) нема необхідності застосовувати ітерації, так як коефіцієнти беруться з нижнього часового шару.

Вхідні дані: N - кількість точок просторової сітки; U - масив значень функції u на нижньому часовому шарі; v - масив значень швидкості конвекції на нижньому часовому шарі; μ - масив значень коефіцієнта дифузії на нижньому часовому шарі; f - масив значень правої частини на нижньому часовому шарі, α, β - граничні умови на верхньому часовому шарі. **Вихідні дані:** U^{n+1} - масив значень функції u на верхньому часовому шарі.

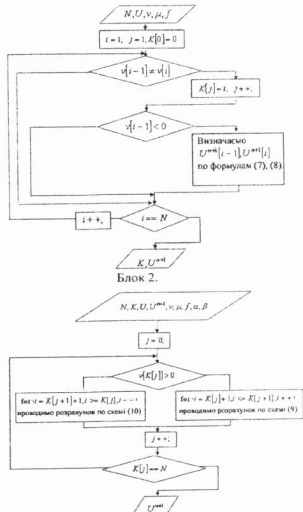


Рис. 1. Блок-схема алгоритму.
Основні характеристики
методу явного рахунку

Теоретичні дослідження апроксимації, стійкості та збіжності методу явного рахунку показали [5, 6]:

1. Схема (4)-(6) апроксимує задачу (1)-(3) з точністю порядку $O\left(\frac{\tau}{h} + \tau + h^2\right)$ в C .

2. Для сталих коефіцієнтів схема безумовно стійка [6]. Для випадку змінної конвекції при сталому коефіцієнті дифузії схема стійка за початковими даними і правою частиною при виконанні умови

$$\tau \leq \frac{4}{5M_0 + V}, \quad (11)$$

Блок 1.

$$\text{де } M_0 = \frac{v_{\max}^2}{\mu}, \quad v_{\max} = \max_x |v(x)|,$$

$$V = \max_x |v'(x)| > 0.$$

Для випадку змінної конвекції при $\mu = 0$ схема стійка за початковими даними і правою частиною при $\tau < 2/V$. (12)

Для випадку змінної дифузії стійкість схеми за початковими даними і правою частиною має місце при

$$\tau < \frac{1}{V + M/2h}, \quad \text{де } M = \max_x |\mu'(x)| > 0. \quad (13)$$

3. Розв'язок різницевої задачі (4)-(6) збігається до розв'язку диференціальної задачі (1)-(3) зі швидкістю $O(\tau + h^2 + \tau/h)$ при виконанні наступних умов:

$$\tau < \frac{1}{V + M/2h}, \quad (14)$$

$$\tau/h \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0. \quad (15)$$

У випадку, коли коефіцієнт дифузії дорівнює нулю розв'язок різницевої задачі (4)-(6) збігається до розв'язку диференціальної задачі (1)-(3) зі швидкістю $O(\tau + h^2)$ при умові

$$\tau < 2/V. \quad (16)$$

Зауваження 1. Для методу явного рахунку має місце умовна апроксимація. Найбільшим членом порядку похибки апроксимації є τ/h .

Проте, в розкладенні в ряд Тейлора при τ/h стоїть коеф. дифузії (значення якого в задачах метеорології, як правило, дуже мале порівняно зі значенням відношення τ/h). За рахунок цього τ/h фактично не впливає на точність методу.

Характеризуючи точність методу, варто відмітити його дисипативні й дисперсійні Властивості. Схема має другий порядок дисперсійності й другий порядок дисипації. Таким чином, дисперсія й дисипація схеми гасять одна одну, що дозволяє схемі працювати більш точно [7]. Це підтверджують результати чисельних експериментів [5], згідно яким точність схеми має порядок $O(\tau^2 + h^2)$, що цілком підходить для розв'язування метеорологічних задач.

Зауваження 2. Як видно з умови (13) для методу явного рахунку має місце залежність часового й просторового кроків. Проте обмеження (13) значно краще жорстких обмежень відомих явних методів, де часовий крок τ повинен бути порядку h^2 .

Висновки

В даній роботі описано різницевий метод

явного рахунку розв'язку одномірних задач конвективної дифузії, як складових більш складної задачі реалізації моделі циркуляції атмосфери.

Представлений метод дозволяє вести розрахунок явним („бегущим” - рос.) рахунком. В роботі описано алгоритм реалізації методу, вказані його переваги перед відомими неявними й явними схемами: простота організації обчислень (явний рахунок) і відсутність необхідності застосування ітерацій дозволяють економити час розв'язку задачі; при прямуванні коефіцієнта дифузії до нуля (виродження типу рівняння) не виникає некоректності у розв'язку.

Умови стійкості методу явного рахунку є менш жорсткими, ніж обмеження, характерні для явних методів. Як недолік методу, можна вказати умовну апроксимацію, що висуває додаткову умову збіжності схеми: $\tau/h \rightarrow 0$ при

$$\tau \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Результати теоретичного дослідження [5,6] й тестування методу явного рахунку підтверджують доцільність його використання для реалізації моделі циркуляції атмосфери.

Список літератури

1. Прусов В.А., Дорошенко А.Ю. Моделирование природных и техногенных процессов в атмосфере. – Київ: Наукова Думка, 2006. – 542 с.
2. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
3. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. В 2-х т. Том 1. Основные положения и общие методы / перевод с англ. А. И. Державиной, под ред. В. П. Шидловского - М.: Мир, 1991. - 504 с.
4. Самарский А.А., Вабисевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. - Эдиториал УРСС, Москва, 1999. - 248 с.
5. Прусов В.А., Дорошенко А.Е., Черныш Р.И., Гук Л.Н. Теоретическое исследование одного численного метода решения задачи конвективной диффузии // Кибернетика и системный анализ. - 2008. №2. С. 161 - 170.
6. Гук Л. М. Стійкість та збіжність економічного методу розв'язання одновимірної задачі конвективної дифузії // Вісник Київського університету, серія: фізико-математичні науки. - 2008. №4. С. 115 - 118.
7. Москальков М. Н. Исследование дисперсионных свойств разностных схем для уравнения переноса // Численный анализ. - Киев: ИК АН УССР, 1978. - С. 75-86.

Надійшла до редколегії 01.11.2011

УДК 519.65

Демків І.І., к.ф.-м.н., доц.

Інтерполяційні інтегральні ланцюгові дробу, що не вимагають правила підстановки

Будується та досліджується інтерполяційний інтегральний ланцюговий дріб, що є природним узагальненням інтерполяційного ланцюгового дробу для функції однієї змінної і не використовує правило підстановки.

Ключові слова: інтерполяція, функціонал, континуальні вузли.

*E-mail: ihor.demkiv@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н. Хусайнов Д.Я.

Вступ

Вперше інтерполяційні інтегральні ланцюгові дробу (І ЛД) були уведений у роботу [1]. У [1] доведено, що вказане там визначення ядер є необхідною умовою, щоб інтегральний ланцюговий дріб був інтерполяційним на континуальній множині вузлів

$$x^n(z, \xi^n) = x_0 + \sum_{i=1}^n H(z - \xi_i) [x_i(z) - x_{i-1}(z)] \quad (1)$$

$$\xi^n = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \Omega_n = \{z^n : 0 \leq z_1 \leq \dots \leq z_n \leq 1\}$$

для функціоналів $F: L_1(0,1) \rightarrow \mathbb{R}^1$. Тут через $x_i(z) \in Q[0,1]$, $i = 0, 1, \dots$ позначені довільні, фіксовані елементи з простору $Q[0,1]$ – кусково-неперервних на відрізку $[0,1]$ функцій зі скінченною кількістю точок розриву першого роду.

Достатні умови інтерполяційності інтегрального дробу з [1] були знайдені у роботі [2] і вони вимагають виконання правила підстановки. Умови, які треба накласти на функціонал $F(x(\cdot))$, щоб він задовольняв правилу підстановки наводяться у [3].

I. I. Demkiv*, PhD.

Interpolation integral chain fractions which does not require substitution rule

Interpolation integral chain fraction which is natural generalization of interpolation chain fraction for one-variable function and does not use the substitution rule is constructed and investigated.

Key words: interpolation, functional, continual knots.

Але досліджуваний у [1] та [2] І ЛД має одну ваду. Якщо покласти замість вузлів інтерполяції (1) $x_i(z) = x_i = \text{const}$, $i = 0, n$, $x(z) = x = \text{const}$, то І ЛД не перейде у інтерполяційний ланцюговий дріб для функції однієї змінної. Щоб позбутися цієї вади у [4] уведений новий клас ІЛД вигляду

$$Q_n^I(x(\cdot)) = K_0^I + \prod_{i=1}^n \frac{q_i(x(\cdot))}{1}, \quad (2)$$

де

$$q_m(x(\cdot)) = \int_0^1 \dots \int_{z_{m-1}}^1 K_m^I(z^m) \prod_{i=1}^m |x(z_i) - x_{i-1}(z_i)| dz_i.$$

Нехай функціонал $F(x(\cdot))$ визначено на просторі $Q[0,1]$.

Правильними є наступні теореми [5].

Теорема 1. Для того щоб ІЛД (2) був інтерполяційним для гладкого функціоналу $F(x(\cdot)): Q[0,1] \rightarrow \mathbb{R}^1$ на континуальній множині вузлів (1), необхідно, щоб його ядра визначалися за формулами

$$K_p^I(\xi^p) = (-1)^p \prod_{i=1}^p |x_i(\xi_i) - x_{i-1}(\xi_i)|^{-1} \frac{\partial^p}{\partial \xi_1 \dots \partial \xi_p} \prod_{i=1}^p \frac{q_{p-i}(x^p(\cdot, \xi^p))}{-1},$$

$$q_m(x^p(\cdot, \xi^p)) = \int_0^1 \dots \int_{z_{m-1}}^1 K_m^I(z^m) \prod_{i=1}^m |x^p(z_i, \xi^p) - x_{i-1}(z_i)| dz_i, \quad m = 1, 3, \dots, n, \quad p = 2, 3, \dots, n,$$

$$q_0(x^p(\cdot, \xi^p)) = F(x_0(\cdot)) - F(x^p(\cdot, \xi^p)), \quad K'_0 = F(x_0(\cdot)),$$

$$K'_1(\xi_1) = -[x_1(\xi_1) - x_0(\xi_1)]^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} F(x_0(\cdot) + H(\cdot - \xi_1)(x_1(\cdot) - x_0(\cdot))). \quad (3)$$

Теорема 2. Для того щоб ЛДД (2) з ядрами, що визначаються формулами (3), був інтерполяційним для гладкого функціоналу $F(x(\cdot))$:

$Q[0,1] \rightarrow \mathbb{R}^1$ на континуальній множині вузлів (1), достатньо, щоб функціонал $F(x(\cdot))$ задовольняв правило підстановки

$$\frac{\partial^p}{\partial z_1 \partial z_2 \dots \partial z_p} \left[F(x^{p+1}(\cdot, z^{p+1})) \right]_{z^{p+1}=z_p} = \left[\frac{\partial^p}{\partial z_1 \partial z_2 \dots \partial z_p} F(x^{p+1}(\cdot, z^{p+1})) \right]_{z^{p+1}=z_p} \frac{x_{p+1}(z_p) - x_{p-1}(z_p)}{x_p(z_p) - x_{p-1}(z_p)},$$

$$p = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Правило підстановки (4) накладає суттєві обмеження на функціонал. Метою цієї роботи є побудова та дослідження ЛДД, що інтерполює функціонал $F(x(\cdot)): Q[0,1] \rightarrow \mathbb{R}^1$ і не потребує виконання правила підстановки. Тобто, для ЛДД повинні виконуватись інтерполяційні умови

$$Q'_n(x^n(\cdot, \xi^n)) = F(x^n(\cdot, \xi^n)). \quad (5)$$

При цьому залишається вимога, щоб вузли інтерполяції були континуальними (1).

N – поверховий І ЛДД

Введемо наступні позначення

$$D_{z^j} = \frac{\partial^j}{\partial z_1 \partial z_2 \dots \partial z_j}; \quad dz^j = dz_j dz_{j-1} \dots dz_1;$$

$$f_k(x^n(\cdot, z^n)) = \frac{1}{D} \frac{q_{k-1}(x^n(\cdot, z^n))}{-1};$$

$$q_0(x^n(\cdot, z^n)) = F(x_0(\cdot)) - F(x^n(\cdot, z^n)); \quad k = \overline{1, n}.$$

Розв'язок задачі інтерполювання нелінійних функціоналів ЛДД на континуальній множині вузлів (1) будемо шукати у вигляді (6)

$$q_n(x(\cdot)) = \sum_{s=1}^n \sum_{i=0}^s \int_{z_{i-1}}^1 \dots \int_{z_{i-1}}^1 K'_{i,s}(z_1, z_2, \dots, z_i) \prod_{j=1}^i (x(z_j) - x_{j-1}(z_j)) \prod_{j=i+1}^s (x(z_j) - x_{j-1}(z_j)) dz^i. \quad (9)$$

Саме серед поліномів вигляду (9) і будемо шукати $q_n(x(\cdot))$, що задовольняє умовам (5), тобто $q_n(x^n(\cdot, \xi^n)) = f_n(x^n(\cdot, \xi^n)) - 1$ і не потребує виконання правила підстановки.

Покажемо, що для того, щоб ЛДД (6), (7), (9) був інтерполяційним на континуальній множині вузлів (1) необхідно і достатньо, щоб його поправки визначались формулами (10)

$$Q'_n(x(\cdot)) = K'_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q_i(x(\cdot))}{1}, \quad (6)$$

$$\text{де } K'_0 = F(x_0(\cdot)).$$

$$q_1(x(\cdot)) = \int_0^1 K'_{1,0}(z_1) [x(z_1) - x_0(z_1)] dz_1,$$

$$K'_{1,0}(z_1) = -[x_1(z_1) - x_0(z_1)]^{-1} \frac{\partial}{\partial z_1} F(x^1(\cdot, z_1)). \quad (7)$$

Якщо функціонал $F(x(\cdot))$ задовольняє правило підстановки, тоді $q_n(x(\cdot))$ належить до класу інтегралів

$$q_{n,0}(x(\cdot)) = \int_0^1 \int_{z_1}^1 \dots \int_{z_{n-1}}^1 K'_{n,0}(z^n) \prod_{i=1}^n [x(z_i) - x_{i-1}(z_i)] dz^i. \quad (8)$$

Для розв'язування сформульованої вище задачі треба розширити клас інтегралів (8). У якості такого класу візьмемо (9)

$$q_n(x(\cdot)) = q_{n,0}(x(\cdot)) + q_{n,1}(x(\cdot)) + q_{n,2}(x(\cdot)) \quad (10)$$

При виконанні правила підстановки

$$q_n(x(\cdot)) = q_{n,0}(x(\cdot)),$$

тобто $q_{n,1}(x(\cdot)) + q_{n,2}(x(\cdot))$ містять поправки, які виражаються через правило підстановки

$$[q_{n,0}(x(\cdot)) + q_{n,1}(x(\cdot))]_{x_n(z)=x(z)} = f_n(x(\cdot)) - 1, \quad (11)$$

$$q_n(x(\cdot))|_{x_n(z)=x(z)} = f_n(x(\cdot)) - 1.$$

$$q_{n,0}(x(\cdot))|_{x_n(z)=x(z)} = 0, \quad n = 3, 4, \dots, \quad q_{2,2}(x(\cdot)) = 0. \quad (12)$$

Якщо побудовано такий ІЛД (6), (7), (9), що має властивості (10), (11), (12), то тоді буде мати місце тотожність

Побудова полінома $q_{n,0}(x(\cdot)) + q_{n,1}(x(\cdot))$ не викликає жодних ускладнень. Дійсно маємо

$$\begin{aligned} q_{n,0}(x(\cdot)) + q_{n,1}(x(\cdot)) = & (-1)^n \int_0^1 \int_{z_1}^1 \dots \int_{z_{n-1}}^1 D_x^n f_n(x^n(\cdot, z^n)) \prod_{i=1}^n \frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)} dz' + \\ & + (-1)^{n-1} \int_0^1 \int_{z_1}^1 \dots \int_{z_{n-2}}^1 \left[\frac{x_{n-1}(z_{n-1}) - x_{n-2}(z_{n-1})}{x_n(z_{n-1}) - x_{n-2}(z_{n-1})} D_{x^{n-1}} f_n(x^n(\cdot, (z^{n-1}, z_{n-1}))) - \right. \\ & \left. - D_{x^{n-1}} f_n(x^n(\cdot, z^n)) \right]_{z_n=z_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)} \cdot \frac{x(z_{n-1}) - x_{n-1}(z_{n-1})}{x_n(z_{n-1}) - x_{n-1}(z_{n-1})} dz^{n-1} + \\ & + (-1)^{n-2} \int_0^1 \int_{z_1}^1 \dots \int_{z_{n-3}}^1 \left[\frac{x_{n-2}(z_{n-2}) - x_{n-3}(z_{n-2})}{x_n(z_{n-2}) - x_{n-3}(z_{n-2})} D_{x^{n-2}} f_n(x^n(\cdot, (z^{n-2}, z_{n-2}, z_{n-2}))) - \right. \\ & \left. - D_{x^{n-2}} f_n(x^n(\cdot, (z^{n-2}, z_{n-3}, z_{n-3}))) \right]_{z_{n-2}=z_{n-3}} \prod_{i=1}^{n-2} \frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)} \cdot \prod_{i=n-1}^n \frac{x(z_{n-2}) - x_{i-1}(z_{n-2})}{x_i(z_{n-2}) - x_{i-1}(z_{n-2})} dz^{n-2} + \dots + \\ & + (-1)^1 \left[\frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_n(z_1) - x_0(z_1)} D_{x^1} f_n \left(x^n \left(\cdot, \underbrace{(z_1, \dots, z_1)}_n \right) \right) - D_{x^1} f_n \left(x^n \left(\cdot, \underbrace{(z_1, z_2, \dots, z_2)}_{n-1} \right) \right) \right]_{z_2=z_1} \times \\ & \times \frac{x(z_1) - x_0(z_1)}{x_1(z_1) - x_0(z_1)} \prod_{i=2}^n \frac{x(z_1) - x_{i-1}(z_1)}{x_n(z_1) - x_{i-1}(z_1)} dz_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Тепер треба знайти такий оператор S_n , який з кожного полінома $q_{k,1}(x(\cdot)) + q_{k,2}(x(\cdot))$ утворює поліном n -го степеня

$$S_n(q_{k,1}(x(\cdot)) + q_{k,2}(x(\cdot))) \in \pi_n$$

із властивістю

$$\begin{aligned} S_n(q_{k,1}(x(\cdot)) + q_{k,2}(x(\cdot)))|_{x_n(z)=x(z)} = \\ = q_{k,1}(x(\cdot)) + q_{k,2}(x(\cdot)) \quad k = \overline{2, n-1}. \end{aligned}$$

Можна запропонувати наступний підхід побудови оператора S_n .

Візьмемо довільний доданок з полінома k -го степеня $q_{k,1}(x(\cdot)) + q_{k,2}(x(\cdot))$, $k = \overline{2, n-1}$. Нехай це буде i -кратний інтеграл вигляду

$$I_i^k(x(\cdot)) = \int_0^1 \int_{z_1}^1 \dots \int_{z_{i-1}}^1 M_i^k(z') m_i(x; z') dz', \quad i = \overline{1, k},$$

де ядро $M_i^k(z')$ не містить $x(z)$ і складається з двох доданків, у кожний з яких входить i -та похідна $D_{z^i} = \frac{\partial^i}{\partial z_1 \partial z_2 \dots \partial z_i}$ від f_k обчислена у "точці" $x^k(z; (t_1, \dots, t_k))^T$, (кожне з t_1, \dots, t_k виражаються через одну зі змінних інтегрування безпосередньо або через підстановку), а $m_i(x; z')$ є поліном i -го степеня від $x(z)$. Тоді

$$S_n^{l_i k}(x(\cdot)) = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z_{i+1}} M_i^k \left(z^i; \left(\frac{z_{i+1} \dots z_{i+1}}{(n-i)} \right)^T \right) m_i(x; z^i) \left(\prod_{j=i+1}^n \frac{x(z_{j+1}) - x_{j-1}(z_{j+1})}{x_n(z_{j+1}) - x_{j-1}(z_{j+1})} dz_{j+1} \right) dz^i +$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z_{i+1}} M_i^k \left(z^i; \left(\frac{z_{i+1} \dots z_{i+1}}{(n-i)} \right)^T \right) m_i(x; z^i) dz^i = - \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 M_i^k(z^i) m_i(x; z^i) dz^i. \quad (14)$$

Наведемо декілька прикладів вигляду поліномів $q_n(x(\cdot))$. Маємо

$$q_2(x(\cdot)) = q_{2,0}(x(\cdot)) + q_{2,1}(x(\cdot)) = \int_0^1 \int_0^1 D_{x^2} f_2(x^2(\cdot, z^2)) \prod_{i=1}^2 \frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)} dz^2 +$$

$$+ \int_0^1 \left[D_{x^1} f_2(x^2(\cdot, z^2)) \right]_{z_2=z_1} - \frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_2(z_1) - x_0(z_1)} D_{x^1} f_2(x^2(\cdot, (z_1, z_1)^T)) \prod_{i=1}^2 \frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)} dz^1. \quad (15)$$

$$q_3(x(\cdot)) = q_{3,0}(x(\cdot)) + q_{3,1}(x(\cdot)) + q_{3,2}(x(\cdot)) = - \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 D_{x^3} f_3(x^3(\cdot, z^3)) \prod_{i=1}^3 \frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)} dz_i +$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{x_2(z_2) - x_1(z_2)}{x_3(z_2) - x_1(z_2)} \cdot D_{x^2} f_3(x^3(\cdot, (z_1, z_2, z_2)^T)) - D_{x^2} f_3(x^3(\cdot, (z_1, z_2, z_3)^T)) \right]_{z_3=z_2} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^2 \frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)} \frac{x(z_2) - x_2(z_2)}{x_3(z_2) - x_2(z_2)} dz^2 +$$

$$+ \int_0^1 \left[D_{x^1} f_3(x^3(\cdot, (z_1, t, t)^T)) - \frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_3(z_1) - x_0(z_1)} \cdot D_{x^1} f_3(x^3(\cdot, (z_1, z_1, z_1)^T)) \right] \times$$

$$\times \frac{x(z_1) - x_0(z_1)}{x_1(z_1) - x_0(z_1)} \prod_{i=1}^2 \frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)} dz_1 +$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_2(z_1) - x_0(z_1)} \cdot D_{x^2} f_3(x^3(\cdot, (z_1, z_1, z_2)^T)) - D_{x^2} f_3(x^3(\cdot, (z_1, t, z_2)^T)) \right]_{t=z_1} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^2 \frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)} \frac{x(z_2) - x_2(z_2)}{x_3(z_2) - x_2(z_2)} dz^2 +$$

$$+ \int_0^1 \left[\frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_2(z_1) - x_0(z_1)} \cdot D_{x^1} f_3(x^3(\cdot, (z_1, z_1, t)^T)) - D_{x^1} f_3(x^3(\cdot, (z_1, t, t)^T)) \right]_{t=z_1} \prod_{i=1}^3 \frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)} dz_1. \quad (16)$$

$$q_4(x(\cdot)) = q_{4,0}(x(\cdot)) + q_{4,1}(x(\cdot)) + q_{4,2}(x(\cdot)) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 D_{x^4} f_4(x^4(\cdot, z^4)) \prod_{i=1}^4 \frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)} dz_i +$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left[D_{x^3} f_4(x^4(\cdot, z^4)) \right]_{z_4=z_3} - \frac{x_3(z_3) - x_2(z_3)}{x_4(z_3) - x_2(z_3)} \cdot D_{x^3} f_4(x^4(\cdot, (z_1, z_2, z_3, z_3)^T)) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \prod_{i=1}^3 \frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)} \frac{x(z_3) - x_3(z_3)}{x_4(z_3) - x_3(z_3)} dz^3 + \\
& + \int_0^1 \int_{z_1}^1 \left[\frac{x_2(z_2) - x_1(z_2)}{x_4(z_2) - x_1(z_2)} \cdot D_{z^2} f_4(x^4(\cdot, (z_1, z_2, z_2, z_2)^T)) - D_{z^2} f_4(x^4(\cdot, (z_1, z_2, z_3, z_3)^T)) \right]_{z_3=z_2} \times \\
& \times \prod_{i=1}^2 \frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)} \prod_{i=3}^4 \frac{x(z_2) - x_{i-1}(z_2)}{x_4(z_2) - x_{i-1}(z_2)} dz^2 + \\
& + \int_0^1 \left[D_{z^1} f_4(x^4(\cdot, (z_1, z_2, z_2, z_2)^T)) \right]_{z_2=z_1} - \frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_4(z_1) - x_0(z_1)} \cdot D_{z^1} f_4(x^4(\cdot, (z_1, z_1, z_1, z_1)^T)) \times \\
& \times \frac{x(z_1) - x_0(z_1)}{x_1(z_1) - x_0(z_1)} \prod_{i=2}^4 \frac{x(z_1) - x_{i-1}(z_1)}{x_4(z_1) - x_{i-1}(z_1)} dz_1 + \\
& + \int_0^1 \int_{z_1}^1 \int_{z_2}^1 \left[D_{z^3} f_4(x^4(\cdot, (z_1, t, z_2, z_3)^T)) \right]_{t=z_1} - \frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_2(z_1) - x_0(z_1)} \cdot D_{z^3} f_4(x^4(\cdot, (z_1, z_1, z_2, z_3)^T)) \times \\
& \times \prod_{i=1}^2 \frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)} \prod_{i=3}^4 \frac{x(z_{i-1}) - x_{i-1}(z_{i-1})}{x_i(z_{i-1}) - x_{i-1}(z_{i-1})} dz^3 + \\
& + \int_0^1 \int_{z_1}^1 \left[D_{z^2} f_4(x^4(\cdot, (z_1, t, z_2, z_3)^T)) \right]_{z_3=z_2} - \frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_2(z_1) - x_0(z_1)} \cdot D_{z^2} f_4(x^4(\cdot, (z_1, z_1, z_2, z_3)^T)) \Big|_{z_3=z_2} \times \\
& \times \prod_{i=1}^2 \frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)} \prod_{i=3}^4 \frac{x(z_2) - x_{i-1}(z_2)}{x_4(z_2) - x_{i-1}(z_2)} dz^2 + \\
& + \int_0^1 \int_{z_1}^1 \left[D_{z^2} f_4(x^4(\cdot, (z_1, t, t, z_2)^T)) \right]_{t=z_1} - \frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_2(z_1) - x_0(z_1)} \cdot D_{z^2} f_4(x^4(\cdot, (z_1, z_1, t, z_2)^T)) \Big|_{t=z_1} \times \\
& \times \prod_{i=1}^3 \frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)} \frac{x(z_2) - x_3(z_2)}{x_4(z_2) - x_3(z_2)} dz^2 + \\
& + \int_0^1 \left[D_{z^1} f_4(x^4(\cdot, (z_1, t, t, t)^T)) \right]_{t=z_1} - \frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_2(z_1) - x_0(z_1)} \cdot D_{z^1} f_4(x^4(\cdot, (z_1, z_1, t, t)^T)) \Big|_{t=z_1} \times \\
& \times \prod_{i=1}^4 \frac{x(z_1) - x_{i-1}(z_1)}{x_i(z_1) - x_{i-1}(z_1)} dz_1 + \\
& + \int_0^1 \int_{z_1}^1 \left[\frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_2(z_1) - x_0(z_1)} \cdot D_{z^2} f_4(x^4(\cdot, (z_1, z_1, z_2, z_2)^T)) - D_{z^2} f_4(x^4(\cdot, (z_1, t, z_2, z_2)^T)) \right]_{t=z_1} \times \\
& \times \prod_{i=1}^2 \frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)} \prod_{i=3}^4 \frac{x(z_2) - x_{i-1}(z_2)}{x_4(z_2) - x_{i-1}(z_2)} dz^2 + \\
& + \int_0^1 \left[\frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_2(z_1) - x_0(z_1)} \cdot D_{z^1} f_4(x^4(\cdot, (z_1, z_1, t, t)^T)) \right]_{t=z_1} - D_{z^1} f_4(x^4(\cdot, (z_1, t, t, t)^T)) \Big|_{t=z_1} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \prod_{i=1}^2 \frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)} \prod_{i=3}^4 \frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_4(z_i) - x_{i-1}(z_i)} dz_1 + \\
& + \int_0^1 \int_{z_1}^1 \int_{z_2}^1 \left[D_{x^3 f_4} \left(x^4 \left(\cdot, (z_1, z_2, t, z_3)^T \right) \right) \Big|_{t=z_2} - \frac{x_2(z_2) - x_1(z_2)}{x_3(z_2) - x_1(z_2)} \cdot D_{x^3 f_4} \left(x^4 \left(\cdot, (z_1, z_2, z_2, z_3)^T \right) \right) \right] \times \\
& \times \prod_{i=1}^2 \frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)} \prod_{i=3}^4 \frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)} dz^3 + \\
& + \int_0^1 \int_{z_1}^1 \left[D_{x^2 f_4} \left(x^4 \left(\cdot, (z_1, z_2, t, t)^T \right) \right) \Big|_{t=z_2} - \frac{x_2(z_2) - x_1(z_2)}{x_3(z_2) - x_1(z_2)} \cdot D_{x^2 f_4} \left(x^4 \left(\cdot, (z_1, z_2, z_2, t)^T \right) \right) \Big|_{t=z_2} \right] \times \\
& \times \prod_{i=1}^2 \frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)} \prod_{i=3}^4 \frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)} dz^2 + \\
& + \int_0^1 \int_{z_1}^1 \left[\frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_3(z_1) - x_0(z_1)} \cdot D_{x^2 f_4} \left(x^4 \left(\cdot, (z_1, z_1, z_1, z_2)^T \right) \right) - D_{x^2 f_4} \left(x^4 \left(\cdot, (z_1, t, t, z_2)^T \right) \right) \Big|_{t=z_1} \right] \times \\
& \times \frac{x(z_1) - x_0(z_1)}{x_1(z_1) - x_0(z_1)} \prod_{i=2}^3 \frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_3(z_i) - x_{i-1}(z_i)} \frac{x(z_2) - x_3(z_2)}{x_4(z_2) - x_3(z_2)} dz^2 + \\
& + \int_0^1 \left[\frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_3(z_1) - x_0(z_1)} D_{x^1 f_4} \left(x^4 \left(\cdot, (z_1, z_1, z_1, t)^T \right) \right) \Big|_{t=z_1} - D_{x^1 f_4} \left(x^4 \left(\cdot, (z_1, t, t, t)^T \right) \right) \Big|_{t=z_1} \right] \times \\
& \times \frac{x(z_1) - x_0(z_1)}{x_1(z_1) - x_0(z_1)} \prod_{i=2}^3 \frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_3(z_i) - x_{i-1}(z_i)} \frac{x(z_1) - x_3(z_1)}{x_4(z_1) - x_3(z_1)} dz_1.
\end{aligned} \tag{17}$$

Правильною є така теорема.

Теорема 3. Для достатньо гладкого функціоналу $F(x(\cdot))$ інтегральний ланцюговий дріб (6) з поверхами, що визначаються формулами (13), (14) буде для нього інтерполяційним на континуальній множині вузлів (1), тобто будуть мати місце співвідношення (5).

Доведення. У випадку $n=1$ виконання співвідношень (5) легко перевірити.

Для $n=2$ ядра інтегралів $q_{2,0}(x(\cdot))$ та $q_{2,1}(x(\cdot))$ знаходимо з умови інтерполяційності у вузлі

$$\begin{aligned}
x^2(\cdot, \xi^2) &= x_0 + H(-\xi_1) [x_1(\cdot) - x_0(\cdot)] + \\
&+ H(-\xi_2) [x_2(\cdot) - x_1(\cdot)], \quad 0 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq 1.
\end{aligned}$$

При $n=3$ для побудованого ІЛД (6) з поверхами, що визначаються формулами (7), (15), (16), необхідні умови для знаходження ядер встановлюємо послідовно з умов інтерполяційності у вузлах

$$(x^3(\cdot, \xi^3)), \quad x^3(\cdot, (\xi_1, \xi_2, \xi_2)^T), \quad x^3(\cdot, (\xi_1, \xi_1, \xi_3)^T),$$

$$x^3(\cdot, (\xi_1, \xi_2, \xi_2)^T) \text{ або } x^3(\cdot, (\xi_1, \xi_1, \xi_3)^T),$$

а достатні умови – безпосередньою перевіркою рівності (5) аналогічно, як це було зроблено у [6].

У випадку $n=4$ поступаємо аналогічно, як було зроблено у [7]. Тобто, для побудованого ІЛД (6) з поверхами, що визначаються формулами (7), (15), (16), (17) необхідні умови встановлюємо послідовно з умов інтерполяційності у вузлах

$$\begin{aligned}
& (x^4(\cdot, \xi^4)), \quad x^4(\cdot, (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_3)^T), \quad x^4(\cdot, (\xi_1, \xi_2, \xi_2, \xi_3)^T), \\
& x^4(\cdot, (\xi_1, \xi_1, \xi_2, \xi_3)^T), \quad x^4(\cdot, (\xi_1, \xi_2, \xi_2, \xi_2)^T), \\
& x^4(\cdot, (\xi_1, \xi_1, \xi_2, \xi_2)^T) \quad x^4(\cdot, (\xi_1, \xi_1, \xi_1, \xi_2)^T), \\
& x^4(\cdot, (\xi_1, \xi_1, \xi_1, \xi_1)^T),
\end{aligned}$$

а достатні умови – безпосередньою перевіркою рівності (5).

Отже, теорему 3 доведено для випадків $n=1, 2, 3, 4$. Оскільки, формули за якими одержу-

емо $q_n(x(\cdot))$ є рекурентними, то можна стверджувати, що теорема 3 є вірною при будь-якому n .

Теорему доведено.

Подібно до того, як це робилось у [5] наведемо представлення функціоналу через введенний інтегральний ланцюговий дріб вигляду (6) з поверхами (7), (13), (14). Правильною є така теорема.

Теорема 4. Для гладкого функціоналу $F(x(\cdot))$ справедливостя зображення

$$F(x(\cdot)) = K_0^I + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{q_i(x(\cdot))}{1}, \quad (18)$$

де ядра $q_p(x(\cdot))$, $p = \overline{0, n}$ визначаються за формулами (13), (14), а ядра $q_{n+1}(x(\cdot)) = q_{n+1}^R(x(\cdot))$ одержуються з (13), (14) при $p = n+1$, $x_{n+1}(z) = x(z)$.

На $q_{n+1}^R(x(\cdot))$ слід дивитися, як на залишковий член.

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції. Твердження теореми 4 при $n=1$ та $n=2$ легко перевірити. Вважаємо, що воно вірне для $n=k-1$ і перевіримо для $n=k$. Оскільки ІЛД $Q_k(x(\cdot)) = K_0^I + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{q_i(x(\cdot))}{1}$ побудований за формулами (6), (7), (9) і має властивості (10), (11), (12), тому має місце тотожність

$$\begin{aligned} q_{k+1}(x(\cdot))|_{x_{k+1}(z)=x(z)} &= f_{k+1}(x(\cdot)) - 1 = \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \frac{q_{k+1-i}(x(\cdot))}{-1} - 1. \end{aligned}$$

Одержуємо

$$Q_k(x(\cdot)) = K_0^I - F(x_0(\cdot)) + F(x(\cdot)) = F(x(\cdot)).$$

Пряме твердження доведено. Доведемо обернене. Нехай має місце представлення (18). Тобто, тут

$$\begin{aligned} x^{n+1}(z, \xi^n) &= x_0 + \sum_{i=1}^n H(z - \xi_i) [x_i(z) - x_{i-1}(z)] + \\ &+ H(z - \xi_i) [x(z) - x_n(z)]. \end{aligned}$$

Підставимо у (18) $x(z) = x^n(z, \xi^n)$, $\xi^n \in \Omega_n$ і врахуємо, що $x^{n+1}(t, z^{n+1})|_{x(t)=x^n(t, \xi^n)} = x^n(t, \xi^n)$, якщо

$t \geq \xi_n$. Тоді згідно (13) будемо мати

$$q_{n+1}(x^n(\cdot, z^n)) = q_{n+1}^R(x^n(\cdot, z^n)) = 0, \quad \forall \xi_n^n \in \Omega_n$$

і, отже,

$$F(x^n(\cdot, z^n)) = Q_n(x^n(\cdot, z^n)).$$

Теорема доведена.

Знайдемо тепер, якого вигляду набуває ІЛД (6), (13), (14) коли $x_i(z) = x_i = \text{const}$, $i = \overline{0, n}$, $x(z) = x = \text{const}$.

Після нескладних перетворень одержуємо

$$Q_n(x) = F(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{q_i(x)}{1}, \quad (19)$$

де

$$q_1(x) = (x - x_0)F_{01}, \quad q_2(x) = - \prod_{i=1}^2 \frac{x - x_{i-1}}{x_2 - x_{i-1}} [1 - f_2],$$

$$\dots, \quad q_n(x) = - \prod_{i=1}^n \frac{x - x_{i-1}}{x_n - x_{i-1}} [1 - f_n];$$

$$f_2 = \frac{F_{01}}{F_{02}}; \dots, \quad f_k = \frac{q_{k-1}(x_k)}{1},$$

$$q_0(x_k) = F(x_0) - F(x_k), \quad k = 3, 4, \dots, n. \quad (20)$$

Тут використано позначення

$$F_{0k} = \frac{F(x_k) - F(x_0)}{x_k - x_0}, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Одержаний ІЛД (19), (20) повністю співпадає з ІЛД (16), (17) з [5] для функції $F(x): [a, b] \rightarrow R^1$.

Правильною є наступна теорема.

Теорема 6. Ланцюговий дріб (19), (20) є інтерполяційним для функції $F(x): [a, b] \rightarrow R^1$ з вузлами $x_i \in [a, b]$, $i = \overline{0, n}$.

Доведення здійснюється через перевірку виконання умов інтерполяції

$$F(x_i) = Q_n^I(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

Таким чином поставлена на початку роботи задача про побудову ІЛД такого, щоб він був природним узагальненням інтерполяційного ланцюгового дробу для функції однієї змінної і не використовував правило підстановки розв'язана.

Слід зауважити, що інтерполяційний дріб (19), (20) відрізняється від інтерполяційних ланцюгових дробів, запропонованих у [8], [9].

Для знаходження нулів знаменників ланцюгового дробу (19), (20) можна скористатися рекурентними співвідношеннями (див., наприклад, [9]) і звести його до звичайного дробу. Далі для

заданого n треба знаходити корені алгебраїчного многочлена. Наприклад, для $n = 2$ коренями є

$$x = 0,5(x_1 + x_0) \pm 0,5 \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + 4(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \frac{F_{02}}{F_{02} - F_{01}}}.$$

При $n = 3$ треба розв'язати наступне рівняння

$$(1 - f_3) \prod_{i=1}^3 (x_3 - x_{i-1})^{-1} \prod_{j=1}^3 (x - x_{j-1}) + (1 - f_2) \prod_{i=1}^2 (x_2 - x_{i-1})^{-1} \prod_{j=1}^2 (x - x_{j-1}) = 1,$$

при $n = 4$ – рівняння

$$1 - \sum_{k=2}^4 [1 - f_k] \prod_{i=1}^k \frac{x - x_{i-1}}{x_k - x_{i-1}} + [1 - f_2] \prod_{i=1}^2 \frac{x - x_{i-1}}{x_2 - x_{i-1}} \prod_{j=1}^4 \frac{x - x_{j-1}}{x_4 - x_{j-1}}$$

і т. д.

Список використаних джерел

1. Михальчук Б.Р. Інтерполяція нелінійних функціоналів за допомогою інтегральних ланцюгових дробів / Б.Р. Михальчук // УМЖ. – 1999. – 51. – №3. – С. 364–375.

2. Макаров В.Л. Інтерполяційні інтегральні ланцюгові дробі / В.Л. Макаров, В.В. Хлобистов, Б.Р. Михальчук // УМЖ. – 2003. – 55. – №4. – С. 479–488.

3. Макаров В.Л. Необхідні і достатні умови існування функціонального інтерполяційного полінома на континуальній множині вузлів / В.Л. Макаров, І.І. Демків, Б.Р. Михальчук // Доп. НАН України. – 2003. – № 7. – С. 7–12.

4. Макаров В.Л. Новий клас інтерполяційних інтегральних ланцюгових дробів / В.Л. Макаров, І.І. Демків // Доп. НАН України. – 2008. – №11. – С. 17–23.

5. Макаров В.Л. Зв'язок інтерполяційних інтегральних ланцюгових дробів з інтерполяцій-

ними гіллястими ланцюговими дробами / В.Л. Макаров, І.І. Демків // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51. – №3. – С. 1–8.

6. Демків І.І. Інтерполяційний функціональний многочлен третього степеня, що не використовує правила підстановки / І.І. Демків // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53. – №3. – С. 46–59.

7. Demkiv I.I. Interpolation functional polynomial of the fourth order which does not use substitution rule / I.I. Demkiv // J. Numer. Appl. Math. – 2010. – №99. – P. 1–17.

8. Кучмінська Х.Й. Двовимірні неперервні дробі / Х.Й. Кучмінська. – Львів: ІПШМ ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2010. – 218 с.

9. Скоробогатько В.Я. Теорія ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике / В.Я. Скоробогатько. – Москва: Наука, 1983. – 312 с.

Надійшла до редколегії 16.06.11

УДК 517.929

І.А. Джалладова*, доктор фіз.-мат. наук,
професор КНЕУ ім. В.Гетьмана
А.О. Харламов**, студент V курсу ф-ту
інформаційних систем і технологій КНЕУ ім.
В.Гетьмана

Модель стабільного функціонування валютних операцій банку

У роботі побудовано математичну модель стабільного функціонування валютних операцій банку з врахуванням випадкових коливань, які мають напівмарковський характер. Розглянуто частинний випадок, коли напівмарковський процес набуває трьох станів та побудовано межі нестійкості.

Ключові слова: диференціальні рівняння, напівмарковський процес, області нестійкості, валютні операції банку, валютний ринок.

I. A. Dzhalladova, Doctor of science, Professor
A.O. Harlamov, student, KNEU

Model stability of foreign bank currency transactions

In paper we created a model stability of foreign bank currency transactions with semi-Markov fluctuations. In the special case when the semi-Markov process takes three states, we created the stability bounds of the model.

Key Words: differential equations, semi-Markov process, stability bounds, banking currency transactions, foreign exchange market.

Статтю представив проф. д.ф.-м.н. Хусаїнов Д.Я.

* E-mail: irada-05@mail.ru

**E-mail: harlamov_artemiy@ukr.net

Вступ

Валютний ринок є одним з найбільш ліквідних фінансових ринків, де основними учасниками є банки. Доходи від валютних операцій банків складають значну частку їх доходів.

Валютні ризики, пов'язані з відкритими позиціями, особливо гостро зростають в періоди серйозних коливань обмінних курсів. Основною рисою ризикових випадків, які відносяться до ринкового ризику, є та, що подібні випадки настають внаслідок несприятливої зміни загально-ринкової ситуації. При настанні подібної ситуації вартість активів має тенденцію до зниження протягом короткострокового періоду, що викликає розрив ліквідності.

Валютна криза 2008-2009 року досить негативно вплинула на діяльність більшості українських банків, деякі збанкрутували. Все це свідчить про те, що більшість банків були не готовими до таких високих валютних ризиків або просто не змогли їх передбачити та протидіяти ним. У зв'язку із значною нестабільністю економічного розвитку України, прискореністю змін структури її соціально-економічного середовища та відкритістю економіки, країна постійно відчуває на собі дію зовнішніх та внутрішніх шоків, які і викликають економічні

втрати, заважають стати на шлях стійкого і сталого довгострокового економічного зростання та створюють загрозу виникнення економічної кризи.

Розбалансованість валютного ринку, негативне сальдо торговельного балансу, високі темпи інфляції свідчать про те, що на сьогодні залишається невирішеною проблема проведення ефективної валютно-курсової політики і визначення оптимального рівня валютного курсу.

Нині в Україні діє режим фіксованого курсу, але як практика показала, що він є дієвим лише для невеликих країн з великими валютними резервами. У розвиваючих економіках інфляція набагато вища, ніж у розвинутих: з цієї причини валюта знецінюється швидше, ніж та, до якої вона прив'язана. Але фіксований курс не відображає цієї ситуації, і при першій можливості переоцінена валюта раптово знецінюється. Наприклад, з початку 2001-го по липень 2008 року індекс споживчих цін в Україні зріс більше ніж на 100%, в США – менше ніж на 25%. За цей же період курс долара в Україні знизився з 5,6 до 4,6 гривні. При такій динаміці цін і курсу 60%-а девальвація 2008 року вже не виглядає раптовою. За таких умов особливо важливого значення набуває розгляд банку як цілісної складної динамічної системи, що працює

у нестабільній економіці з наявністю високих валютних ризиків та зумовлює необхідність більш широкого застосування економіко-математичних методів і моделей для дослідження процесів, що протікають у банку, оцінки ефективності його роботи, виявлення напрямків і способів вдосконалення управління банківською діяльністю [7].

Значне наукове напрацювання в галузі банківської справи та побудови моделей здійснено в [3, 4, 5, 6], моделей валютних курсів в [8]. Однак багато питань банківської практики потребують подальшого дослідження та розроблення підходів до їхнього вирішення. І одним з аспектів є побудова моделі стабільного функціонування валютних операцій банку як фактор ефективного функціонування банківської системи в цілому.

1. Економічна постановка задачі. На валютному ринку певний комерційний банк здійснює валютні операції у трьох валютах: доларах США, євро та російський рубль. Банк щомісяця отримує загальні доходи від валютних операцій $x(t)$ гр.од. за весь період T загальні доходи від операцій з валютою становлять X гр.од.

Комерційний банк функціонує на валютному ринку, який може перебувати в трьох станах: стабільний валютний ринок, ринок з кризовими явищами та ринок з валютними обмеженнями. Причому в кожному стані банк перебуває рівний проміжок часу $1/T$.

Побудувати модель стабільного функціонування валютних операцій банку та визначити межі нестійкості моделі.

2. Математична постановка задачі. Нехай модель функціонування валютних операцій банку на ймовірнісному просторі (Ω, F, P) описується наступним лінійним диференціальним рівнянням:

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(\xi(t))x(t), \quad (1)$$

де $\xi(t)$ - випадковий напіварковський процес, що набуває n станів функціонування банку на валютному ринку $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ з інтенсивностями:

$$q_{\theta}(t) = 0, \quad q_{\theta_s}(t) = \begin{cases} \frac{1}{T_{\theta_s}} & \text{при } 0 \leq t < T_{\theta_s}, \\ 0 & \text{при } t \geq T_{\theta_s} \end{cases} \quad (2)$$

$(j, s = 1, \dots, n).$

3. Основні результати розв'язку математичної задачі.

Нехай випадкова величина $a(\xi(t))$ набуває значення $a(\xi(t)) = a_k$ при $\xi(t) = \theta_k$ при $(k = 1, \dots, n)$.

Припускаємо, що в моменти стрибків t_i які викликані збуреннями валютного ринку, розв'язки (1) зазнають випадкових перетворень:

$$x(t_i + 0) = p_i x(t_i - 0), \quad p_i \neq 0 \quad (i = 1, \dots, N) \quad (3)$$

з імовірностями p_i $(i = 1, \dots, N)$.

Згідно з (2) вводимо стохастичні оператори S_{θ_i} $(i = 1, \dots, n)$, які відповідають перетворенням:

$$S_{\theta_i} f(Y) = \begin{cases} f(Y), & r = i, \\ \sum_{s=1}^n \frac{p_s}{p_i} f\left(\frac{Y}{p_i}\right), & r \neq i \end{cases}$$

Введемо рівняння для моментів другого порядку розв'язків лінійного диференціального рівняння (1). Попередньо за формулою обчислимо C_{ks} $(k, s = 1, \dots, N)$:

$$C_{ks} = \begin{cases} 1, & k = s, \\ \sum_{l=1}^n p_l p_l, & k \neq s. \end{cases}$$

Отримано рівняння для моментів другого порядку розв'язків лінійного рівняння (1):

$$W_k(t) = M_2 \left[\sum_{s=1}^n q_{ks}(t) e^{2a_j} ds(0) + \int_0^t \sum_{s=1}^n q_{ks}(t-\tau) e^{2a_j(t-\tau)} W_s(\tau) d\tau \right] \quad (4)$$

$$(k = 1, \dots, n), \quad M_2 = \sum_{l=1}^n p_l^2 p_l = \langle \rho^2 \rangle.$$

Тут M_2 - математичне сподівання квадрата коефіцієнта ρ при випадкових перетвореннях; $d_k(0)$ $(k = 1, \dots, n)$ - моменти другого порядку в момент часу $t=0$; $N_k(t) = e^{a_j t}$ - розв'язок рівняння (1); $W_i(t)$ - моменти другого порядку.

Розв'язуватимемо систему моментних рівнянь (4), використовуючи перетворення Лапласа. Позначимо:

$$f_k(p) \equiv \int_0^{\infty} W_k(t) e^{-pt} dt \quad (k = 1, \dots, n).$$

Помножимо систему рівнянь (4) на e^{-pt} і інтегруємо від 0 до ∞ . Дістанемо систему рівнянь для зображень $f_k(p)$:

$$f_k(p) = M_2 \left[\int_0^n q_{ks} e^{2\alpha s} e^{-p s} ds(0) dt + \right. \\ \left. + \int_0^t \int_{k \neq s} q_{ks}(t-\tau) e^{2\alpha(t-\tau)} e^{-p\tau} W_s(\tau) d\tau d\tau \right] \quad (5)$$

$$(k = 1, \dots, n).$$

Оскільки справджується рівність

$$\int_0^n q_{ks} e^{-p s} ds = \frac{1 - e^{-p T_{ks}}}{T_{ks} p} \quad (k, s = 1, \dots, n; k \neq s),$$

то з урахування властивості запізнення дістанемо:

$$\int_0^n q_{ks} e^{2\alpha s} e^{-p s} ds = \frac{1 - e^{-T_{ks}(p-2\alpha)}}{T_{ks}(p-2\alpha)}$$

$$(k, s = 1, \dots, n; k \neq s)$$

Згідно з властивістю згортки обчислимо:

$$\int_0^t \int_0^n q_{ks}(t-\tau) e^{2\alpha(t-\tau)} e^{-p\tau} W_s(\tau) d\tau d\tau = \\ = \frac{1 - e^{-T_{ks}(p-2\alpha)}}{T_{ks}(p-2\alpha)}$$

Систему рівнянь (5) можна записати у вигляді:

$$f_k(p) = M_2 \left[\sum_{k \neq s} d_s(0) \frac{1 - e^{-T_{ks}(p-2\alpha)}}{T_{ks}(p-2\alpha)} + \right. \\ \left. + \sum_{k \neq s} f_s(p) \frac{1 - e^{-T_{ks}(p-2\alpha)}}{T_{ks}(p-2\alpha)} \right] \quad (k = 1, \dots, n),$$

або

$$f_k(p) = M_2 \left(b_k(p) + \sum_{k \neq s} a_{ks} f_s(p) \right) \quad (k = 1, \dots, n),$$

де

$$b_k(p) = \sum_{k \neq s} d_s(0) \frac{1 - e^{-T_{ks}(p-2\alpha)}}{T_{ks}(p-2\alpha)};$$

$$a_{ks}(p) = \frac{1 - e^{-T_{ks}(p-2\alpha)}}{T_{ks}(p-2\alpha)} \quad (k, s = 1, \dots, n; k \neq s).$$

Розв'яжемо систему рівнянь (6) за теоремою Крамера. Особливі точки розв'язку будуть визначатися коренями рівняння:

$$\det \| 1 - M_2 a_{ks}(p, T_{ks}) \|_{k,s} = 0, \quad (7)$$

$$M_2 a_{kk}(p, T_{kk}) \equiv -1.$$

Нулі рівняння (7) є характеристичними показниками розв'язків системи інтегральних рівнянь (4). Якщо всі корені рівняння (7) мають від'ємні дійсні частини, то розв'язки рівняння (4) асимптотично стійкі. Якщо хоча б один із коренів рівняння (7) має додатну дійсну частину, то розв'язки рівняння нестійкі.

Розв'язавши систему алгебраїчних рівнянь (7) чисельними методами, можна визначити характер залежності між параметрами p і T_{ks} .

4. Результати розв'язку економічної задачі. Нехай випадковий напівмарковський процес набуває трьох станів:

θ_1 – банк функціонує в умовах валютної кризи;

θ_2 – банк функціонує в умовах стабільного валютного ринку;

θ_3 – банк функціонує в умовах ринку з валютними обмеженнями;

з інтенсивностями:

$$q_{11}(t) = q_{22}(t) = q_{33}(t) \equiv 0,$$

$$q_{12}(t) = q_{21}(t) = q_{23}(t) = q_{32}(t) = q_{13}(t) = q_{31}(t) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{при } 0 \leq t < T; \\ 0 & \text{при } t > T. \end{cases}$$

Нехай у моменти стрибків t_i розв'язки рівняння (1) зазнають випадкових перетворень:

$$x(t_i + 0) = p_i x(t_i - 0), \quad p_i \neq 0 \quad (i = 1, \dots, N) \quad (8)$$

з імовірностями p_i ($i = 1, \dots, N$). Зазначимо, що справджуються рівності:

$$S_{ri} f(Y) = S_{pi} f(Y), \quad C_{ri} = C_p \quad (r \neq i, \quad j \neq i).$$

Тоді рівняння (7) набуває вигляду:

$$\begin{vmatrix} 1 & -M_2 \frac{1 - e^{-T(p-2\alpha)}}{T(p-2\alpha)} & -M_2 \frac{1 - e^{-T(p-2\alpha)}}{T(p-2\alpha)} \\ -M_2 \frac{1 - e^{-T(p-2\alpha)}}{T(p-2\alpha)} & 1 & -M_2 \frac{1 - e^{-T(p-2\alpha)}}{T(p-2\alpha)} \\ -M_2 \frac{1 - e^{-T(p-2\alpha)}}{T(p-2\alpha)} & -M_2 \frac{1 - e^{-T(p-2\alpha)}}{T(p-2\alpha)} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

де M_2 – середнє значення доходів банку від валютних операцій за час T .

При $p=0$ розв'язок системи (9) знаходять на межі області нестійкості на площині параметрів a_j, a_s .

Нехай

$$a_{12} = \frac{1 - e^{-T(p-2\alpha)}}{T(p-2\alpha)}, \quad a_{13} = \frac{1 - e^{-T(p-2\alpha)}}{T(p-2\alpha)},$$

$$a_{21} = \frac{1 - e^{-T(p-2a_1)}}{T(p-2a_1)}, \quad a_{23} = \frac{1 - e^{-T(p-2a_3)}}{T(p-2a_3)},$$

$$a_{31} = \frac{1 - e^{-T(p-2a_1)}}{T(p-2a_1)}, \quad a_{32} = \frac{1 - e^{-T(p-2a_2)}}{T(p-2a_2)},$$

тоді маємо наступну систему:

$$\begin{cases} f_1(p) = M_2 b_1(p) + M_2 a_{12} f_2(p) + M_2 a_{13} f_3(p), \\ f_2(p) = M_2 b_2(p) + M_2 a_{21} f_1(p) + M_2 a_{23} f_3(p), \\ f_3(p) = M_2 b_3(p) + M_2 a_{31} f_1(p) + M_2 a_{32} f_2(p). \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(p) - M_2 a_{12} f_2(p) - M_2 a_{13} f_3(p) = M_2 b_1(p), \\ -M_2 a_{21} f_1(p) + f_2(p) - M_2 a_{23} f_3(p) = M_2 b_2(p), \\ -M_2 a_{31} f_1(p) - M_2 a_{32} f_2(p) + f_3(p) = M_2 b_3(p). \end{cases} \quad (10)$$

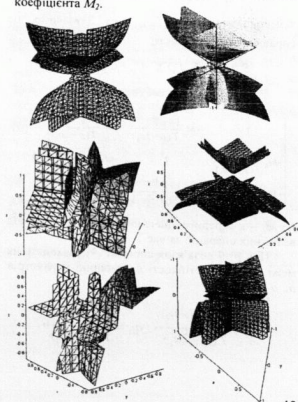
Матимемо наступний визначник системи (10):

$$\begin{vmatrix} 1 & -M_2 a_{12} & -M_2 a_{13} \\ -M_2 a_{21} & 1 & -M_2 a_{23} \\ -M_2 a_{31} & -M_2 a_{32} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

Розкривши визначник (11), дістанемо рівняння:

$$1 - M_2^2 a_{21} a_{32} a_{13} - M_2^3 a_{12} a_{23} a_{31} - M_2^2 a_{13} a_{31} - M_2^2 a_{32} a_{23} - M_2^2 a_{21} a_{12} = 0$$

При $p=0$ побудовано межі області нестійкості розв'язків рівняння (1) на площині параметрів a_1, a_2, a_3 при різних значення коефіцієнта M_2 .



Висновок.

1. В роботі досліджено підхід математичного моделювання стабільності функціонування валютних операцій банку з врахуванням випадкових збурень валютного ринку.

2. Розглянуто частинний випадок, коли напівмарковський процес набуває трьох станів та побудовано при $p=0$ межі області нестійкості моделі функціонування валютних операцій банку при різних значеннях коефіцієнта M_2 .

Література

1. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Оптимізація випадкових процесів: Монографія. – К.: КНЕУ, 2008. – 312 с.
2. Джалладова І.А. Оптимізація стохастичних систем: Монографія. – К.: КНЕУ, 2005. – 284 с.
3. Лебедев В.В., Лебедев К.В. Математическое моделирование нестационарных экономических процессов. – М.: ООО «Тест», 2011. – 336 с.
4. Математические модели трансформационной экономики: учебн. пособие / Клебанова Т.С., Раевнева Е.В., Стриженченко К.А. та ін. – 2-е изд., стереотип. – Харьков: "ИНЖЕК", 2006. – 280 с.
5. Моделі і методи соціально-економічного прогнозування: підручник / В.М. Гесць, Т.С. Клебанова, О.І. Черняк, В.В. Іванов, Н.А. та ін. – Харків: ВД "ИНЖЕК", 2005. – 396 с.
6. Моделювання економічної динаміки: навч. посібн. / Г.В. Лавінський, О.С. Пшенишнюк, С.В. Устенко, О.Д. Шаронов. – К.: Вид-во "Атіка", 2006. – 276 с.
7. Стадник Ю.А. Економіко-математичне моделювання формування основних показників діяльності банківських установ: дис. канд. екон. наук: спец. 08.03.02 / Львівський НУ ім. Івана Франка. – Л., 2004. – 20 с.

Надійшла до редколегії 12.09.11

УДК 519.21

Донченко В.С., д.ф.-м.н., проф.,
Зінко Т.П., аспірант**Побудова векторів ознак на основі
виділення формант для класифікації
мовних сигналів***В статті розглядається побудова векторів
ознак для розпізнавання мовних сигналів на
основі формантних ознак.**Ключові слова: перетворення Фур'є,
псевдообернення, спектрограма, форманти,
розпізнавання мови, вектори ознак.*V.S. Donchenko, Doctor of Science, Prof.,
T.P. Zinko, Postgrad. stud.**Construction of vectors signs based on
formant allocation for speech signals
classification***The construction of speech recognition vectors
signs based on formant characteristics this paper
considers.**Key Words: fourier transform, pseudo inverse,
spectrogram, formants, speech recognition, vector
signs.*

E-mail: voldon@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д. т. н., проф. Гарашенко Ф.Г.

Вступ

Задача групування інформації: чи у вигляді задачі відновлення функції, представленої своїми значеннями, чи у вигляді задачі кластеризації, класифікації чи розпізнавання образів, представляє важливий клас прикладних задач із широким колом застосування [1-4]. Важливим класом задач класифікації та розпізнавання є задача розпізнавання з учителем, коли кожен із класів представлений певним набором «представників» (prototypes) – навчальними вибірками відповідних класів. За великих об'ємів даних, що підлягають розпізнаванню, важливим є забезпечення належної швидкості розпізнавання. Одним із засобів розв'язання проблеми може вважатися дихотомічна класифікація, за якої кількість кроків з проходження розгалужень може бути близької до двійкового логарифму загальної кількості об'єктів, що піддаються розпізнаванню. Стандартний недолік нестійкості дихотомії при великих об'ємах навчальних вибірок в рамках задачі кластеризації, коли важко розрізнити групи класів, перевага у швидкості розпізнавання за проходженням відповідного дерева надає їй конкурентних переваг, особливо, якщо комбінувати її із іншими методами, які можуть компенсувати згаданий недолік. Нижче пропонується двокрокова процедура класифікації, в якій дихотомія застосовується на першому кроці за невеликих навчальних вибірок, які формуються за спеціальним вимог відповідності класам. Так, наприклад, для мовних сигналів, такими спеціальними умовами можуть бути умови чіткого промовляння слів за низького рівня збурень. Цей етап дихотомічної кластеризації з

метою розпізнавання може бути виконаний одним із стандартних методів, наприклад, k -середніх, що використовується стандартним чином: із евклідовими відстанями, чи модифікованими відстанями відповідності [8,9]. На другому етапі навчальні вибірки дихотомічних класів збільшуються ширшим колом представників. На цьому етапі дискримінація класів здійснюватиметься за допомогою техніки, що є узагальненим варіантом лінійної дискримінації [10]. Узагальнення полягає у модифікації вектора ознак, яке реалізує задачу лінійної дискримінації за нелінійними перетвореннями ознак, які формують первісний набір ознак, за якими здійснюється розпізнавання. Зауважимо, що процес зміни ознак через нелінійне перетворення первісних є контрольованим, здійснюється рекурентно та конструктивно і переносить на задачі розпізнавання техніку нелінійних рекурентних регресійних перетворювачів [11-12, 16-18] для задачі відновлення функцій, представлених своїми значеннями. Зауважимо також, що як і випадку першого етапу задач групування інформації (як в задачі відновлення функцій), конструктивність розглядів забезпечується застосуванням розвинутої в роботах М.Ф.Кириченка (див., наприклад, основоположну статтю [5], див. також [6]) техніки псевдообернення за Муром-Пенроузом [13], [14] (див. також [15]).

Ефективність застосування пропонованого двокрокового алгоритму демонструється в задачі розпізнавання мовних сигналів (для задачі Speech Recognition).

Для задачі розпізнавання слів запропонований також спеціальний варіант

формування векторів ознак на основі гістограм формантих характеристик спектрограм слів, які піддаються розпізнаванню. Згадане формування вектору ознак дозволяє досягти стандартизації подання аудіосигналів за оперування із важливими інформаційними їх характеристиками, якими є форманти. Крім того обговорюються можливості використання узагальнених «векторів ознак» об'єктів, що піддаються розпізнаванню.

1. Мовні сигнали

В рамках задач розпізнавання мови аналізуються і розпізнаються фрагменти мови, що відповідають тим чи іншим словам. В подальшому розглядатиметься саме ця задача.

Власне, за будь якого варіанту формалізації, первiсним об'єктом аналізу є запис акустичного сигналу як коливання повітря у вигляді електричного сигналу, що змінюється у часі. Це представлення акустичного об'єкту мови електричним сигналом називають *wave-form*-ю (*wf*) – «хвильовим представленням» мовного сигналу. Зафіксований у вигляді електричного сигналу, що змінюється у часі, мовний сигнал є кінцевим результатом цілої низки перетворень коливань пружного середовища від генерації до його фіксації чи сприйняття. Зважаючи на «генетично» коливальний характер генерації мовного сигналу мовним апаратом людини, а, отже і його реєстрації у вигляді *wf*, природним засобом аналізу відповідних варіантів *wf* представлень мовних сигналів є гармонійний аналіз, тобто представлення відповідного сигналу як функції часу у вигляді суміші гармонік.

Задача розпізнавання мови – проблематика, що охоплюється терміном *Speech Recognition* (в подальшому *SR-задачі*) в англomовній літературі, – є задачею аналізу мовного сигналу у тому вигляді, в якому він зафіксований мікрофоном, тобто *wf* з метою розпізнавання мовної інформації. Такою мовною інформацією може бути запис слова в цілому чи запис тої чи іншої його частини, що може нести вагому інформацію про те, яким є аналізоване слово. У всіх випадках мова йде про те, як за *wf*, що представляє слово чи його частину, відновити відповідний об'єкт мови. Розв'язок такої задачі пов'язаний із виділенням у *wf*-сигналі, аналізованому на предмет ідентифікації, характерних інформаційних ознак, за якими, і здійснюється розпізнавання. Такий набір інформаційних ознак, як правило, представляє собою набір числових характеристик, тобто числовий вектор. Таке

представлення аналізованої *wf*-сигналу є інтерпретаційним припущенням, яке дозволяє використовувати в математичній моделі задачі розпізнавання потужний набір структур евклідового простору числових векторів фіксованої розмірності: того чи іншого варіанту R^n . Зазвичай, таке використання обмежується структурою метричного простору: відстані в евклідовому просторі, хоча такий запас структур (базових структур евклідового простору) – значно ширший. Він включає в себе як множинні структури: лінійні підпростори та гіперплощини, а також слушні еліпсоїди, точніше – еліпсоїдальні циліндри, так і структури «синглового» (від *single* – одиничний) характеру, якими є лінійні оператори та невід'ємно визначені квадратичні форми [19]. Ефективність використання структур (зв'язків між елементами) в евклідовому просторі R^n визначається ефективністю математичного апарату, який забезпечує використання відповідних структур для їхнього конструктивного опису та побудови, а також обчисленням «відстаней відповідності» для таких структур. Такими «відстанями відповідності» можуть бути відстані від відповідних множинних утворень: підпросторів, гіперплощин, еліпсоїдів. Зауважимо, що такі «відстані відповідності» ефективно обчислюються за «сингловими» структурами: лінійними чи нелінійними. Тому принципової ваги набуває питання встановлення взаємної відповідності між множинними та «сингловими» базовими структурами евклідового простору R^n . Як виявляється, адекватним математичним апаратом, який забезпечує встановлення такого зв'язку, є апарат псевдообернення (в подальшому – ПдО) за Муром-Пенроузом ([13],[14], див., наприклад, [8]) та його розвиток в принциповій роботі М.Ф.Кириченка [5]. Детальнішу інформацію про ПдО та його роль для опису базових структур R^n , а також використання згаданих структур в розв'язанні задач групування інформації, можна знайти в роботах [10],[11].

Зауважимо, що «занурення» моделі в евклідовий простір R^n є найпростішим варіантом використання, як правило, – найпростіших (лінійних операцій та відстані), структур евклідового простору R^n . В багатьох прикладних задачах слушним є використання складніших модельних відповідників реальних об'єктів, в даному випадку мовних сигналів, складніших «векторів ознак». Природним поданням мовного сигналу є спектрограма (див. нижче), яка є

матрицею. Так само зображення того чи іншого об'єкту теж є матрицею. Отже, природно було б аналізувати саме матрицю, як модельне втілення аналізованого об'єкту, хоча наразі такі матриці піддаються подальшій обробці, щоб побудувати класичний варіант модельного представника: класичний вектор ознак у вигляді набору числових характеристик (числового вектора), що і фігурує у всіх подальших розглядах, представляючи первинний об'єкт. Зауважимо, що матриці фіксованої $m \times n$ розмірності є лінійним простором із природними покомпонентними лінійними операціями, а слідовий скалярний добуток $\langle A, B \rangle_{tr}$:

$$\langle A, B \rangle_{tr} = \text{tr} A^T B \quad - \text{сума діагональних}$$

елементів матриці AB^T , перетворює цей лінійний простір на евклідов, який у подальшому позначатиметься $R^{m \times n}$. Відсутність уваги до використання цього варіанту евклідових просторів в математичному моделюванні визначається значною мірою недостатньою розвиненістю математичного апарату опису базових структур такого варіанту евклідових просторів. Враховуючи, що в евклідовому просторі R^n основою опису і конструктивного використання базових структур є ПдО, можна зробити висновок про важливість розвинення апарату ПдО для $R^{m \times n}$. В роботі [7] доведена теорема про сингулярний (SVD) розклад матриці як лінійного оператора між двома евклідовими просторами матриць, і конструктивно визначено на цьому ґрунті ПдО-матрицю A_m^* для $m \times n$ матриці A як матричного відображення між слушними евклідовими матричними просторами: $A: R^{m \times p} \rightarrow R^{m \times p}$. В тій же роботі отримано вигляд основних ортогональних проекторів та групуючих операторів, пов'язаних з матричним відображенням, доведені теореми про еквівалентність основних ортогональних проекторів та групуючих операторів для векторного та матричного варіанту використання матриць для задання лінійних операторів: між слушними евклідовими просторами числових векторів та – між евклідовими просторами матриць. Власне, ці результати є основою ПдО теорії для матричних просторів. Нижче наведений розвиток та використання згаданих результатів для опису базових структур матричних евклідових просторів. Зокрема,

наведені формули відстані до лінійного підпростору, гіперплощини.

Крім того, в роботі представлені, з одного боку, огляд основних напрямків та цілей досліджень у зв'язку із мовними сигналами, включаючи стандарти представлення wf -сигналу у цифровому вигляді, базових підходів до формування векторів ознак та можливих варіантів моделей, в яких використовуються вектори ознак.

2. Мовні сигнали та варіант формування векторів ознак на основі формант

Як зазначено вище, мовний сигнал як коливальний процес в пружному середовищі, фіксується у wf , загальний вигляд якої ілюструється Рис.1.

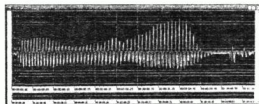


Рис. 1. Приклад wf мовного сигналу: wf -слова «звук».

Першим етапом дослідження мовного сигналу з метою його подальшого розпізнавання є формування векторів ознак. Ця задача розглядатиметься нижче в модельному варіанті: для окремих слів та за забезпечення певної стандартизації умов. В рамках аналізу неперервної мови, етапу формування векторів ознак передусє етап передобробки wf , що включає у себе передобробку з метою усунення шумів, забезпечення необхідної частотної смуговості сигналу, дискретизація та квантування сигналу.

Загалом, в алгоритмах формування векторів ознак використовуються характеристики, що отримуються в результаті гармонійного аналізу: на основі застосування перетворення Фур'є (ПФ) у вигляді швидкого перетворення Фур'є (ШПФ). Як виявила практика застосування гармонійного аналізу у SR -задачах основна інформація, яка може бути використана для розпізнавання, міститься в енергетичному спектрі (власне $-AЧХ$) аналізованого wf -сигналу.

Як зазначено вище, модельність задачі розпізнавання мовних сигналів для відпрацювання техніки формування векторів ознак спеціального вигляду, полягає у тому, що звуковий сигнал промовляється (якомога коректно та правильно) в мікрофон та записується на ПК з частотою дискретизації

(sampling rate), що забезпечує збереження інформації про гармонійні складові з певного інтервалу частот за його подальшої дискретизації. Ця частота дискретизації, як відомо, визначається теоремою Котельникова. За цією теоремою за обмеженого інтервалу частот, представленого у первісному сигналі, частота дискретизації мусить бути двократним значенням максимальної частоти.

3. Математична основа гармонійного аналізу

ПФ може виступати у вигляді прямого та оберненого ПФ. В обох варіантах для функцій дійсного аргументу вони встановлюють відповідність між двома функціями $x(t)$, $X(f)$, $t \in R^1$, $f \in R^1$, які отримуються одна з одної інтегруванням іншої, помноженої на комплексну експоненту.

Функція $x(t)$, $t \in R^1$ описує аналізоване явище, яке формується на основі адитивної комбінації гармонійних коливань, аргумент $t \in R^1$ інтерпретується як час.

Функція $X(f)$, $f \in R^1$ є комплексно значною, в ній аргумент $f \in R^1$ – інтерпретується як частота гармоніки, $|X(f)|$, $f \in R^1$ – амплітуда гармоніки з частотою f : $f \in R^1$, що представлена у функції $x(t)$, $t \in R^1$; $|X(f)|^2$, $f \in R^1$ – енергія відповідної гармоніки.

Обернене ПФ матиме вигляд:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp\{i2\pi ft\} df.$$

Пряме ПФ:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp\{-i2\pi ft\} dt.$$

Функцію $X(f)$ в парі $x(t)$, $X(f)$, називають ПФ функції $x(t)$. Її модуль $|X(f)|$ називають амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ) ПФ функції $x(t)$. Разом з фазою частотною характеристикою ФЧХ $\arg X(f)$ вони однозначно визначають $X(f)$. Часто замість АЧХ розглядається її квадрат, який називають енергетичним спектром аналізованого сигналу $x(t)$.

Природна для прикладних задач обмеженість областей інтегрування в інтегралах,

що визначають пряме та обернене ПФ формально забезпечується припущенням про нульові значення відповідних функцій поза певними інтервалами: $[0, T]$ для $x(t)$, $t \in R^1$ та $[-B, B]$ для $X(f)$, $f \in R^1$, чи припущенням про періодичне їх продовження. Це означає, що відповідні формули прямого та оберненого перетворень матимуть вигляд:

$$x(t) = \int_{-B}^B X(f) \exp\{i2\pi ft\} df \quad (\text{обернене ПФ}),$$

$$X(f) = \int_0^T x(t) \exp\{-i2\pi ft\} dt \quad (\text{пряме ПФ}).$$

Слід зауважити, що у той час, як обмеженість в часовій області є природною для прикладних задач (всі сигнали мають обмежену тривалість), то обмеженість в частотній області в прикладних дослідженнях забезпечується застосуванням спеціальних апаратних засобів, які на рівні перетворення аналогової форми ω -сигналу забезпечують на фізичному рівні: апаратними засобами, вилучення гармонійних складових.

Крім формального звуження областей інтегрування у кожному з видів ПФ, виявляється, що кожен з інтегралів, що представляє той чи інший вид перетворення, може бути замінений рядом за тими самими комплексними експонентами відповідних інтегралів з коефіцієнтами, що визначаються протилежними перетвореннями за певними дискретизаціями відповідних аргументів. Згадані дискретизації за кожним з аргументів: часовим чи частотним, визначаються довжинами «спряжених» інтервалів.

- Якщо обмеження є час: вся числова вісь замінюється інтервалом $[0, T]$, дискретизації піддається частотна область. В ній використовуються точки дискретизації

$$k \frac{1}{T}, k \in Z, \quad \text{тобто довжина інтервалу}$$

$$\text{дискретизації складає } \frac{1}{T}. \quad \text{Ця довжина}$$

називається довжиною коінтервалу Найквіста.

- Якщо обмеженою є частотна область: вся числова вісь частотної області замінюється інтервалом $[-B, B]$, дискретизації піддається час. На часовій вісі

$$\text{використовуються точки: } n \frac{1}{2B}, n \in Z$$

дискретизації в часовій області з довжиною

інтервалу дискретизації $\frac{1}{2B}$. Відповідно, частота дискретизації складає $2B$, тобто є вдвічі більшою максимальної частоти гармоніки, що може бути складовою wf -сигналу. Ця довжина інтервалу дискретизації називається довжиною інтервалу дискретизації Найквіста, а частоту дискретизації $2B$ називають **частотою Найквіста**.

Таким чином, якщо первинною є функція часу, то вона представляється рядом Фур'є за інтегралами комплексних експонент відповідного вигляду (із знаком показника плюс) з дискретизацію $\frac{1}{T}$: точками $k\frac{1}{T}, k \in Z$ в частотній області. Відповідні коефіцієнти ряду $A_k, k \in Z$ є значеннями суміжної функції $X(f)$ – в тих самих точках: $A_k = X\left(\frac{k}{T}\right), k \in Z$.

Так само, якщо первинною є функція частоти $X(f)$, то вона представляється рядом Фур'є за комплексними експонентами відповідного виду (із знаком показника мінус) з дискретизацію $\frac{1}{2B}$ за точками: $n\frac{1}{2B}, n \in Z$ в часовій області. Відповідні коефіцієнти ряду $C_n, n \in Z$ є значеннями суміжної функції $x(t)$ в тих самих точках: $C_n = x\left(\frac{n}{2B}\right), n \in Z$.

Нижче наведені ряди Фур'є для прямого та оберненого ПФ за обмежених областей інтегрування для часової чи для частотної області.

Ряд Фур'є для $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt},$$

$$A_k = \frac{1}{T} X\left(\frac{1}{T}k\right) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \exp\{-i\frac{2\pi}{T}kt\} dt, k \in Z.$$

Ряд Фур'є для $X(f)$:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-j\frac{2\pi}{2B}nf},$$

$$C_n = \frac{1}{2B} x\left(\frac{1}{2B}n\right) =$$

$$= \frac{1}{2B} \int_{-B}^B X(f) \exp\{i\frac{2\pi}{2B}nf\} df, n \in Z.$$

Якщо області інтегрування в часовій і в частотній області обмежені одночасно, то відповідні ряди в розкладі тої чи іншої із суміжних функцій замінюються скінченими сумами, що відповідають тим значенням точок дискретизації, які належать скінченному інтервалу: $[0, T]$ та $k\frac{1}{T} \in [-B, B], k \in Z$, $n\frac{1}{2B} \in [0, T], n \in Z$

$$x(t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} A_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}, \quad (1)$$

$$A_k = \frac{1}{T} X\left(\frac{1}{T}k\right) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \exp\{-i\frac{2\pi}{T}kt\} dt$$

(пряме ПФ за одночасної обмеженості областей інтегрування);

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} C_n e^{-j\frac{2\pi}{2B}nf}, \quad (2)$$

$$C_n = \frac{1}{2B} x\left(\frac{1}{2B}n\right) = \frac{1}{2B} \int_{-B}^B X(f) \exp\{i\frac{2\pi}{2B}nf\} df$$

(обернене ПФ за одночасної обмеженості областей інтегрування).

Формули (1)-(2) свідчать, що за одночасної обмеженості областей інтегрування в часовій та частотній області задача обчислення прямого та оберненого ПФ зводиться до набору векторів

$$A_n, n = -\frac{N}{2}, \frac{N}{2} \text{ чи } C_n, n = 0, N-1.$$

Крім того, коефіцієнти

$$C_n = \frac{1}{2B} x\left(\frac{1}{2B}n\right), n = 0, N-1, \text{ що однозначно}$$

визначаються значеннями $x(t), t \in R^1$ для скінченного набору точок, однозначно визначають функцію $X(f): X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} C_n e^{-j\frac{2\pi}{2B}nf}$. У свою

чергу, скінчений набір значень $A_k = \frac{1}{T} X\left(\frac{1}{T}k\right),$

$$k = -\frac{N}{2}, \frac{N}{2} \text{ однозначно визначає значення}$$

функції $x(t)$ для довільного дійсного $t: t \in [0, T]$. Це означає, що у цьому випадку значення функції $x(t), t \in [0, T]$ для довільного дійсного значення аргументу $t: t \in [0, T]$ однозначно визначається своїми

значеннями на скінченному наборі аргументів

$$\frac{1}{2B}n, n = 0, N-1.$$

Зауважимо, що частота Найквіста вдвічі більше частоти гармоніки B , фізично представленої у сигналі. Отже, наприклад, якщо частота Найквіста складає 8 kHz, то це означає, що частоти гармонік, фізично представлених у аналізованому wf -сигналі, апаратно обмежені смугою $[-4 \text{ kHz}, 4 \text{ kHz}]$.

У випадку обмеженості часової та частотної області формули ПФ зводяться до обчислення зв'язку між чисельним вектором дискретизованих значень функції в часовій області та вектору дискретизованих значень ПФ в частотній області. Очевидно, такий зв'язок є лінійним. Саме ці вектори і є предметом аналізу, коли говорять про пряме та обернене ПФ.

Застосування гармонійного аналізу на основі ПФ можливо як для всього wf -сигналу в цілому так і для обчислення узгодженого набору ПФ за послідовністю ділянок часового інтервалу, який визначає досліджуваний wf -сигнал. Ці ділянки отримуються послідовним зсувом часового вікна фіксованої довжини на однакову величину. Процедура отримання згаданого набору часових ділянок будемо називати процедурою застосування рухомого вікна чи просто рухомих вікном. У випадку гармонійного аналізу за всім інтервалом, результатом застосування ПФ є вектор з комплексними компонентами чи два вектори, що описують дійсну та уявну компоненти ПФ, відповідно. Якщо результат гармонійного аналізу для всього інтервалу в цілому подається у вигляді АЧХ чи енергетичного спектру, то він передається вектором з невід'ємними компонентами, які є модулями чи, відповідно, квадратами модулів відповідних компонент ПФ.

У випадку, коли гармонійний аналіз здійснюється в рамках застосування процедури рухомого вікна, то результатом застосування ПФ є матриця з комплексними числами, кожен стовпчик якої є результатом застосування ПФ до частини wf -сигналу, який потрапив у відповідне вікно. За поданням результатів застосування гармонійного аналізу у вигляді АЧХ чи енергетичного спектру, вони у цьому випадку подаються матрицею, кожен стовпчик якої є АЧХ (чи, відповідно, енергетичним спектром) тої частини wf -сигналу, який потрапив у відповідне вікно. Графічне представлення матриці енергетичних спектрів загалом називається спектрограмою wf -сигналу. Воно може бути

просторовим чи планарним. За просторового подання матриця зображується поверхнею в прямокутній системі координат в тривимірному просторі. Горизонтальною площиною за такого подання є площина fOt , а за вертикальною віссю відкладаються величини енергетичних спектрів. Саме графічне подання матриці енергетичних спектрів у цьому випадку називається просторовою спектрограмою (Рис.2).

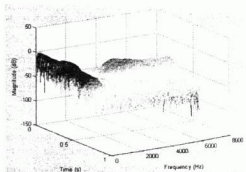


Рис.2. Просторова спектрограма wf слова «звук».

Планарна спектрограма чи просто спектрограма отримується на площині з прямокутною системою координат fOt , коли значення третьої координати передаються на плоскому малюнку чи різними кольорами чи різною інтенсивністю сірого кольору, подібно до того, як на плоских мапах передається рельєф поверхні. Приклад цього варіанту графічного подання матриці енергетичних спектрів представлений на рис.3.

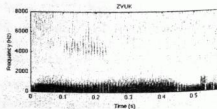


Рис. 3. Спектрограма промовленого слова: "Звук"

Максимальні значення енергетичних спектрів відповідають червоній частині оптичного спектру, синій – мінімальним. Жовтогаряча нижня частина малюнку представляє собою максимальні значення енергетичних спектрів.

Максимуми енергетичних спектрів відповідають основним частотам аудіо-сигналу. Відповідні частоти визначаються геометричними розмірами органів генерації аудіо сигналів людини і називаються формантами. Вони

відповідають максимумам та локальним максимумам спектрів спектрограми.

Форманта характеризується частотою, шириною і амплітудою, а за спрощеного варіанту – частотою та амплітудою. Власне, форманта – це деякий амплітудний «сплеск» на графіку спектра потужності, а його частота – частота піку цього «сплеску».

Загалом, форманти визначаються геометричними розмірами голосової щільності людини та швидкістю повітря, яке через неї проходить. Передаточна функція голосової щільності визначається функцією

$$H(\omega) = \frac{1}{\cos(\omega x / v)},$$

де x – довжина щільності (m), v – швидкість повітря під час продукування звуку (m/sec). Полоси передаточної функції дають максимуми передаточної функції, які називаються формантами. Перераховані у кругову частоту ці полюси (значення ω , для яких знаменник обертається на нуль) мають значення:

$$F_1 = v / 4x, F_2 = 3v / 4x, F_3 = 5v / 4x.$$

За нормальної температури тіла в середньому $x = 0.17 m$, $v = 354 m/sec$. Зокрема, для чоловіків $F_1 = 180-800 Hz$, $F_2 = 600-2500 Hz$, $F_3 = 1200-3500 Hz$, $F_4 = 2300-4000 Hz$. Значення формант для жінок в середньому на 20% вища.

Середня відстань між формантами 1000 Hz. Ширина формантної смуги варіюється досить широко і зазвичай складає $B_n = 50(1 + F_n / 1000) Hz$.

У гармонійному аналізі через застосування ПФ до всього сигналу в цілому, форманти дозволяють розрізнити чоловічі та жіночі голоси.

4. Формування векторів ознак мовного сигналу на основі формант

Використання формантних характеристик за спектрограмою дає можливість побудови векторів ознак на основі таких важливих інформативних характеристик якими є максимуми спектру сигналу.

Інтегральне, за всіма вікнами спектрограми, використання формант m -сигналу пропонується здійснювати на основі гістограми для формантних значень спектрограми, за динамічним діапазоном сигналу, що аналізується (рис. 4а). Для реалізації такого підходу динамічний діапазон значень кожного спектру спектрограми квантується: розбивається на послідовні відрізки однакової довжини. Кількість інтервалів розбиття є параметром алгоритму

формування вектору ознак і може варіюватися в широкому діапазоні: від десятків до сотень. За точками дискретизації будуються послідовні інтервали, що і складають основу для побудови гістограми. Власне, побудова гістограми за формантами спектрів спектрограми, полягає у підрахунку того, скільки формант різних спектрів спектрограми потрапляє у той чи інший інтервал розбиття динамічного діапазону значень спектрограми (рис. 4б). Останнє означає, що для кожного інтервалу можливих значень фіксується, для скількох вікон форманти потрапляють у досліджуваний інтервал можливих значень з динамічного діапазону.

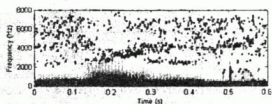


Рис. 4а. Спектрограма слова «Банк» з виділеними формантами (чорні точки) на спектрограмі

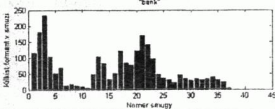


Рис. 4б. Гістограма – вектор ознак

Висновки

В роботі, що є першою частиною з двох статей, представлена концепція двокрокової процедури класифікації, одною із складових якої є дихотомія та побудова дерева класифікації за еталонними об'єктами, а другим – є дискримінація розширених навчальних вибірок класів, побудованих за дихотомічним розбиттям набору еталонних об'єктів першого етапу процедури. Застосування запропонованої двокрокової процедури ілюструється на задачі розпізнавання слів для мовних сигналів. Для згаданої предметної області наведені основи гармонійного аналізу сигналів та запропонований спеціальний варіант формування вектору ознак мовного сигналу на основі таких важливих характеристик подання мовного сигналу у розкладі за гармонійними складовими, якими є форманти. В роботі також запропонований і розглядатиметься у її другій

частині варіант узагальнення «векторів ознак» до представлення сигналу матрицею в рамках математичної моделі на основі гармонійного аналізу. Запропоновані засоби обробки та оперування з такими узагальненими представниками на основі застосування техніки псевдообернення за Муром-Пенроузом. Запропоновані підходи реалізовано в середовищі Matlab R2010b.

Список використаних джерел

- Kohonen T. Self-Organizing Maps / Kohonen T. – [3-d ed]. – Tokyo: Springer, 2001. – 501 p.
- Vapnik, V.N. Statistical Learning Theory / Vapnik, V.N. – New York: Wiley, 1998.
- Simon Haykin. Neural Networks. A Comprehensive Foundation / Simon Haykin. – Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 1999. – 842 p.
- Ивахненко А.Г. Самоорганизующиеся системы распознавания и автоматического управления / Ивахненко А.Г. – К.: Техника, 1969. – 395 с.
- Кириченко Н.Ф. Аналитическое представление возмущений псевдообратных матриц / Кириченко Н.Ф. // Кибернетика и системный анализ. – К. – 1997. – №2. – С.98–107.
- Кириченко Н.Ф. Применение псевдообратных и проекционных матриц к исследованию задач управления, наблюдения и идентификации / Н.Ф. Кириченко, Н.П. Лепеха // Кибернетика и системный анализ. – К. – 2002. – №4. – С. 107–124.
- Донченко В.С. Евклидовы пространства числовых векторов и матриц: конструктивные методы описания базовых структур и их использование / Донченко В.С. // International Journal "Information technologies & Knowledge. – 2011. – Vol. 5, №3. – P. 203–216.
- Кириченко Н.Ф. Псевдообращение в задачах кластеризации / Н.Ф. Кириченко, В.С. Донченко // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – №4. – С. 98–122.
- Кириченко Н.Ф. Гиперплоскости в «множествах и расстояниях соответствия»: кластеризация / Н.Ф. Кириченко, В.С. Донченко // Artificial Intelligence and Decision Making. – International book series "INFORMATION SCIENCE & COMPUTING". – Sofia. – 2008. №7. – P. 25–36.
- Кириченко Н.Ф. Синтез систем нейрофункциональных преобразователей в решении задач классификации / Н.Ф. Кириченко, Ю.Г. Кривонос, Н.П. Лепеха // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – №3. – С. 47–57.
- Кириченко Н. Ф. Псевдообратные и проекционные матрицы в задачах синтеза функциональных преобразователей / Н.Ф. Кириченко, Ю.В. Крак, А.А. Полищук // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – №3. – С. 116–129.
- Кириченко Н.Ф. Нелинейные рекурсивные регрессионные преобразователи: динамические системы и оптимизация / Н.Ф. Кириченко, В.С. Донченко, Д.П. Сербаяв // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – №3. – С. 58–68.
- Moore E.H. On the reciprocal of the general algebraic matrix / Moore E.H. // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1920. – P. 394–395.
- Penrose R. A generalized inverse for matrices / Penrose R. // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. – 1955. – P. 406–413.
- Алберт А. Перспекция, псевдоинверсия, рекуррентное оценивание; [пер. з англ.]. – М.: Наука, 1977. – 305 с.
- Donchenko V.S. Recursive regression transformation and dynamical systems / V.S. Donchenko, M.F. Kirichenko, D.P. Serbaev // Proceedings: of the Seventh International Conference "Computer Data analysis and Modeling: robustness and computer intensive methods". – September 6-10. – Minsk, 2004. – Vol. 1. – P. 147–151.
- Донченко В.С. Представление нейронных сетей динамическими системами / В.С. Донченко, Д.П. Сербаяв // Proceedings of the XI-th International Conference "Knowledge-Dialogue-Solution". – June 20-30. – Varna, 2005. – Vol. 2. – P. 605–608.
- Donchenko V. Generalizing of neural nets: Functional nets of special type / V. Donchenko, M. Kirichenko, Yu. Krivonos // International Journal Information Theories and Applications. – 2007. – №3. – Vol.14. – P. 259–266.
- Донченко В. Базовые структуры евклидовых пространств: конструктивные методы описания и использования / В. Донченко, Ю. Кривонос, В. Омардибиров // New Trends in Classification and Data Mining. – ITHEA, Sofia, Bulgaria. – 2010. – P. 155–170.

Надійшла до редколегії 25.10.11

УДК 004.75:004.272.26:004.032.26:519.1

Катеринич Л.О., к.ф.-м.н., Галкін О.В., к.ф.-м.н.

**Функціональні особливості реалізації
нечіткої специфікації логічного
виведення в експертній системі
Н-Гомеопат**

У статті розглядається представлення та організація знань в ЕС Н-Гомеопат, а також засоби і управління представленням знань. Розглянуто приклад застосування нечіткої специфікації логічного виведення в ЕС Н-Гомеопат, описані основні інтерфейсні можливості користувача.

Ключові слова: інтелектуальні системи, експертні системи, нейронні мережі.

L.O. Katerynych, PhD., O. V. Galkin, PhD.

**Functional specifics of the realization of
fuzzy specification of logical output in
ES N-Homeopat**

In the paper we show the representation and the organization of the knowledge in ES N-Homeopat. We also describe the means of the knowledge representation. We present the example of applying of fuzzy specification of logical output in ES N-Homeopat. The main features of the user interface are also considered.

Key Words: intellectual systems, expert systems, neural networks.

*E-mail: katerinich@rambler.ru, galkin@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д-р. техн. наук Заславський В.А.

Вступ

Протягом останніх десятиліть у рамках досліджень зі штучного інтелекту сформувався самостійний напрямок - експертні системи (ЕС). Величезний інтерес до ЕС з боку користувачів викликаний наступними причинами [1]:

- вони орієнтовані на розв'язання широкого кола задач у неформалізованих областях, які донедавна вважалися недосяжними для обчислювальної техніки;
- за допомогою ЕС можна розробляти додатки не використовуючи програмування, що дає змогу розширити сферу використання ЕОМ;
- ЕС при розв'язанні практичних завдань досягають результатів, що не поступаються, а іноді переважають можливості людей - експертів.

Розробка ЕС зазвичай включає шість наступних етапів, а саме ідентифікація, концептуалізація, формалізація, виконання, тестування, дослідну експлуатацію [1]:

- на етапі ідентифікації - визначаються завдання, які підлягають рішенню, виявляються цілі розробки, визначаються експерти і типи користувачів;
- на етапі концептуалізації - проводиться змістовний аналіз проблемної області, виявляються поняття, що використовуються і їх взаємозв'язки, визначаються методи вирішення завдань;

- на етапі формалізації - вибираються інформаційні системи (ІС) і визначаються способи представлення всіх видів знань, формалізуються основні поняття, визначаються способи інтерпретації знань, моделюється робота системи, оцінюється адекватність цілям системи;
- на етапі виконання - здійснюється наповнення експертної бази знань (БЗ). У зв'язку з тим, що основою ЕС є знання, даний етап є найбільш важливим і найбільш трудомістким етапом розробки ЕС. Процес придбання знань розділяють на знання, що надає експерт, організацію знань, що забезпечує ефективну роботу системи, і представлення знань у вигляді, зрозумілому ЕС. [1,2]

У даний статті розглядається представлення знань та архітектура ЕС Н-Гомеопат, яка має наступне функціональне призначення:

- визначення діагнозу за введеними лікарем симптомами;
- ведення історії захворювання пацієнта;
- визначення препаратів для лікування захворювання пацієнта.

Представлення знань в ЕС Н-Гомеопат

Добре відомо, що нейронні мережі працюють з даними представленими у числовому вигляді [3], але з іншого боку лікар отримує інформацію про симптоми хвороби у словесному вигляді, наприклад, пацієнт може повідомити, що в нього сильна нежить. Тому ЕС повинна формалізувати

симптоми у числовому вигляді, а потім передати їх на вхід спеціалізованої нейронної мережі (СНМ) (тобто мережі, яка була навчена на прикладах певного наукового розділу медицини, наприклад, кардіології). Таким чином, при розробці ЕС Н-Гомеопат постало питання представлення знань у числовому вигляді.

Основні питання, які треба вирішити при представленні знань, - це питання визначення структури та представлення знань у вибраному формалізмі. Ці дві проблеми не є незалежними. Також слід зазначити що, обраний формалізм може виявитися непридатним в принципі або неефективним для відображення деяких знань.

Розглянемо простий приклад представлення знань в ЕС Н-Гомеопат. Дані (табл. 1), що подаються на вхід СНМ можуть мати наступний вигляд:

Таблиця 1

Приклад даних, що подаються на вхід СНМ

Симптом1	Симптом2	Симптом3
1	0	2

В даному випадку значення з таблиці свідчать про те, що у пацієнта є симптом1, відсутній симптом2, та присутній симптом3, але виражений сильніше ніж, наприклад, симптом1. Звичайно така шкала відображення симптомів у числову форму є доволі груба, про створення більш точної шкали йдеться нижче.

При проектуванні ЕС Н-Гомеопат вирішувались наступні питання про представлення знань:

- визначення складу знань, що представляються;
- організація знань;
- представлення знань.

Склад знань ЕС Н-Гомеопат визначався наступними факторами:

- проблемним середовищем;
- архітектурою ЕС;
- потребами та цілями користувачів (лікар або лікар-експерт);
- мовою спілкування.

Організація знань в базі даних ЕС Н-Гомеопат

Наступною проблемою після представлення знань, яка вирішувалась при створенні ЕС Н-Гомеопат була проблема організації знань в БД.

Відомо, що показником інтелектуальності системи, з точки зору представлення знань, вважається здатність системи використовувати в потрібний момент необхідні (релевантні) знання. Системи, що не мають засобів для визначення

релевантних знань, неминуче стикаються з проблемою «комбінаторного вибуху» [2].

Таким чином, організація та зв'язність знань в ЕС є дуже важливим аспектом проектування. Зв'язність або агрегація знань є також основним способом, що забезпечує прискорення пошуку релевантних знань. У ЕС Н-Гомеопат знання організовані навколо найбільш важливих об'єктів (сутностей) предметної області, а саме симптоми, діагноз, препарат для лікування. Інакше кажучи, знання в БД ЕС Н-Гомеопат організовані у вигляді наступних п'яти зв'язних інформаційних таблиць:

1) таблиця "діагноз" - описує можливі діагнози та посилання на препарати для лікування даного діагнозу;

2) таблиця "захворювання" - подає перелік галузей до яких належать, ті чи інші захворювання;

3) таблиця "пацієнт" - наводить перелік пацієнтів та встановлені для них системою діагнози;

4) таблиця "препарат" - це перелік препаратів для лікування пацієнтів визначених у системі та їх опис;

5) таблиця "симптоми" - це перелік можливих симптомів для певного захворювання.

Варто також зауважити, що БД ЕС Н-Гомеопат насправді складається з декількох баз даних. По-перше, це БД Гомеопат, яка складається з п'яти інформаційних таблиць (вони були описані вище). Крім основної БД Гомеопат в ЕС Н-Гомеопат є службові БД, кожна з яких складається з одинадцяти таблиць які використовуються для роботи спеціалізованих нейронних мереж та комутаційного елемента (KE) [4], а також ці БД необхідні в процесі навчання відповідних НМ.

Всі знання, що характеризують деяку сутність, зв'язуються і представляються у вигляді окремого об'єкта. При подібній організації знань, якщо системі потрібна інформація про деяку сутність, наприклад, ліки якими можна вилікувати хворобу пацієнта, то вона шукає об'єкт (тобто запис з таблиці Діагноз), що описує цю сутність, а потім вже всередині об'єкта відшукує необхідну інформацію. Наприклад, якщо пацієнту було встановлено діагноз - гострий тонзиліт, тоді система в таблиці діагноз знаходить посилання на препарати, що описані в таблиці «Препарат».

При роботі з створенною базою знань ЕС Н-Гомеопат постала також проблема пошуку знань, релевантних розв'язуваній задачі

(встановлення діагнозу за введеними симптомами). Тому загальна задача пошуку релевантного діагнозу, в ЕС Н-Гомеопат, розбивалась на більш прості задачі. По-перше, вирішувалось до якої галузі належить захворювання пацієнта, яке описується введеними симптомами (що задачу вирішував так званий КЕ). По-друге, після встановлення галузі захворювання, симптоми передавались на вхід спеціалізований НМ, яка і встановлювала відповідний діагноз.

Для того щоб ЕС Н-Гомеопат могла керувати процесом пошуку рішення, була здатна набувати нові знання і пояснювати свої дії, вона повинна вміти не тільки використовувати свої знання, а й мати здатність розуміти і досліджувати їх, тобто ЕС повинна мати знання про те, як представлені її знання про проблемне середовище [5]. Якщо знання про проблемне середовище назвати знаннями нульового рівня подання, то перший рівень уявлення містить метазнання, тобто знання про те, як представлені у внутрішньому світі системи знання нульового рівня. Перший рівень містить знання про те, які засоби використовуються для представлення знань нульового рівня. Знання першого рівня відіграють істотну роль при управлінні процесом рішення, при придбанні та поясненні дій системи. У зв'язку з тим, що знання першого рівня не містять посилань на знання нульового рівня, знання першого рівня незалежні від проблемного середовища.

Кількість рівнів подання може бути більше двох. Другий рівень представлення містить відомості про знання першого рівня, тобто знання про подання базових понять першого рівня. Поділ знань за рівнями подання забезпечує розширення області застосування системи.

Виділення рівнів детальності дозволяє розглядати знання з різним ступенем деталізації. Кількість рівнів детальності визначається специфікою завдань, що розв'язуються, обсягом і способом їх подання. Як правило, виділяється не менше трьох рівнів детальності, що відбивають відповідно загальну, логічну і фізичну організацію знань. Введення декількох рівнів детальності забезпечує додатковий ступінь гнучкості системи, тому що дозволяє робити зміни на одному рівні, не зачіпаючи інші. Зміни на одному рівні деталізації можуть призводити до додаткових змін на цьому ж рівні, що виявляється необхідним для забезпечення узгодженості структур даних і програм. Проте

наявність різних рівнів перешкоджає поширенню змін з одного рівня на інший.

Процес навчання в ЕС Н-Гомеопат

Таким чином, організація БД ЕС Н-Гомеопат, яка була описана вище та вимоги до керування процесом пошуку рішення привела до того, що в ЕС Н-Гомеопат був використаний КЕ [4]. Більш того, використання КЕ дало можливість розбити одну велику задачу на певну кількість більш простих задач. Інакше для розв'язання задачі встановлення діагнозу потрібно використовувати доволі довгий процес навчання НМ методом оберненого розповсюдження похибки [3]. Але добре відомо, що цей метод має досить суттєві вади, а саме [3]:

- «Параліч» мережі. В процесі навчання, ваги можуть стати дуже великими. Це може призвести до того, що більшість нейронів будуть працювати при дуже великих вихідних значеннях, в зоні, де подісна стискувальної функції дуже мала. Як результат процес навчання може припинитися.
- Локальні мінімуми. Мережа може потрапити в локальний мінімум, в той час коли поряд є більш глибокий мінімум. В точці локального мінімуму усі напрямки ведуть в гору, тому мережа не може з нього вийти.
- Розмір шага навчання. Очевидно, що розмір шага повинен бути скінченним, але якщо його вибрати досить великим, то може виникнути «параліч», або нестійкість. Тобто існує проблема оптимального розміру шага навчання.

З огляду на вище описані проблеми, які виникають при використанні довгого процесу навчання, розбиття початкової задачі на декілька більш простих задач, за допомогою КЕ виправданно.

Зауважимо, що для доступу до БД ЕС Н-Гомеопат та пошуку в ній була використана технологія ADO.NET [9]. Технологія ADO.NET – це частина Microsoft .NET framework. ADO.NET відрізняється від інших подібних технологій доступу до даних тим, що дозволяє взаємодіяти з БД автономно, тобто за допомогою кеша даних. Така автономна взаємодія з БД дуже важлива при роботі з НМ, особливо при навчанні НМ (тобто при роботі ЕС Н-Гомеопат в режимі експерта, в якому відбувається навчання НМ). Важливим елементом автономного доступу до даних є контейнер для табличних даних. Такий автономний контейнер в технології ADO.NET

реалізований на основі класу DataSet. Цей клас був використаний в ЕС Н-Гомеопат для доступу до даних.

Нечіткі специфікації логічного виведення в ЕС Н-Гомеопат

При поданні знань в ЕС Н-Гомеопат використовуються спеціалізовані твердження типу «атрибут – значення» і приватні правила (визначені наперед). Для побудови відповідних значень використовувались нечіткі специфікації логічного виведення.

Розглянемо приклад побудови нечітких специфікацій для діагностування пацієнта в ЕС Н-Гомеопат. Нехай $X_1 = \{5, 10, 15, 20\}$, $X_2 = \{5, 10, 15, 20\}$, $X_3 = \{35, 36, 37, 38, 39, 40\}$ – простори для визначення значень елементів терм-множин “Кашель” = {“слабкий”, “помірний”, “сильний”}, “Насморк” = {“слабкий”, “помірний”, “сильний”} і “Температура” = {“нормальна”, “підвищена”, “висока”, “дуже висока”} відповідно. Елементи просторів X_1 , X_2 , X_3 визначаються експертом, наприклад елементам простору X_3 ставиться у відповідність можлива температура організму людини. У визначенні елементів терм-множин присутній «нечіткий компонент», який відображає відношення ступені ймовірності значення елемента простору до елементу терм-множини. Наприклад, елементи цих терм-множин визначимо наступним чином:

“Кашель”: “слабкий” = $\{1/5; 0.5/10\}$;
“помірний” = $\{0.5/5; 0.7/10; 1/15\}$;
“сильний” = $\{0.5/10; 0.7/15; 1/20\}$.
“Насморк”: “слабкий” = $\{1/5; 0.5/10\}$;
“помірний” = $\{0.5/10; 1/15\}$;
“сильний” = $\{0.7/15; 1/20\}$.

“Температура”:
“нормальна” = $\{0.5/35; 0.8/36; 0.9/37; 0.5/38\}$;
“підвищена” = $\{0.5/37; 1/38\}$;
“висока” = $\{0.5/38; 1/39\}$;
“дуже висока” = $\{0.8/39; 1/40\}$.

Нехай $Y = \{6, 12, 24, 30, 48, 96\}$ – простір для визначення значень елементів терм-множини “Ангирипін” = {“низьке”, “середнє”, “високе”}. При цьому “Ангирипін”:
“низьке” = $\{1/6; 0.5/12\}$;
“середнє” = $\{1/24; 1/30\}$;
“високе” = $\{0.8/48; 1/96\}$.

Тоді залежність розведення препарату від симптомів пацієнта може бути описана наступною системою специфікацій:

вхід (x_1, x_2, x_3) ;

якщо $x_1 \in \text{“слабкий”} \wedge x_2 \in \text{“слабкий”} \wedge x_3 \in \text{“підвищена”}$ то $y \in \text{“низьке”}$;

якщо $x_1 \in \text{“слабкий”} \wedge x_2 \in \text{“помірний”} \wedge x_3 \in \text{“висока”}$ то $y \in \text{“середнє”}$;

якщо $x_1 \in \text{“слабкий”} \wedge x_2 \in \text{“помірний”} \wedge x_3 \in \text{“дуже висока”}$ то $y \in \text{“високе”}$;

вихід (y) ,

де x_1, x_2, x_3 – вхідні лінгвістичні змінні, що приймають значення із терм-множин “Кашель”, “Насморк” і “Температура” відповідно, y – вихідна лінгвістична змінна. Якщо на вхід x_1 алгоритму подати величину $A'_1 = \{1/5; 0.7/10\}$, на

вхід x_2 – величину $A'_2 = \{1/5; 0.5/10\}$, на вхід x_3 – величину $A'_3 = \{1/36; 0.9/37\}$, то у відповідності з процедурою виконання цього алгоритму одержимо:

1. Рівень істинності першого правила
 $\alpha_1 = \min[\max(1 \wedge 1, 0.7 \wedge 0.5), \max(1 \wedge 1, 0.5 \wedge 0.5), \max(1 \wedge 0, 0.9 \wedge 0.5)] = \min[\max(1, 0.5), \max(1, 0.5), \max(0, 0.5)] = \min(1, 1, 0.5) = 0.5$.

2. Рівень істинності другого правила
 $\alpha_2 = \min[\max(1 \wedge 1, 0.7 \wedge 0.5), \max(0.5 \wedge 0.5), \max(1 \wedge 0, 0.9 \wedge 0)] = \min[\max(1, 0.5), \max(0.5, 0.5), \max(0, 0)] = \min(1, 0.5, 0) = 0$.

3. Рівень істинності третього правила
 $\alpha_3 = \min[\max(1 \wedge 1, 0.7 \wedge 0.5), \max(0.5 \wedge 0.5), \max(1 \wedge 0, 0.9 \wedge 0)] = \min[\max(1, 0.5), \max(0.5, 0.5), \max(0, 0)] = \min(1, 0.5, 0) = 0$.

Обчислюємо індивідуальні виходи B'_i кожного правила: $B'_1 = \{\min(0.5, 1)/6; \min(0.5, 0.5)/12\} = \{0.5/6; 0.5/12\}$; $B'_2 = \{0\}$, $B'_3 = \{0\}$.

Агрегація індивідуальних виходів приводить до виходу алгоритму:

$$B' = \{0.5/6; 0.5/12\}.$$

В зв'язку з тим, що в багатьох прикладних задачах вимагається оперувати зі звичайними чіткими значеннями, моделювання процесу діагностики за допомогою нечітких специфікацій складається з декількох етапів.

1. Специфікації (зведення до нечіткості);
2. Логічного виведення на основі заданих специфікацій (за допомогою розглянутих вище механізмів);
3. Дефазифікації (зведення до чіткості).

На етапі фазифікації відбувається перетворення чітких вхідних даних в нечіткі множини. Для цього, як правило, використовуються синглетонні моделі. При використанні синглетонів, механізм логічного

виведення спрощується внаслідок спрощення процедури знаходження рівнів істинності специфікацій (правил).

Дефазифікація використовується, коли результат (нечітка множина) необхідно перетворити до чіткого значення y^* . В ЕС Н-Гомеопат використовується наступний метод дефазифікації (в дискретному варіанті):

$$y^* = \frac{\sum_{i=1}^m y_i B(y_i)}{\sum_{i=1}^m B(y_i)}.$$

Наприклад, при дефазифікації одержаної раніше нечіткої множини B' одержимо:

$$y^* = (0.5 \cdot 6 + 0.5 \cdot 12) / (0.5 + 0.5) = 9.$$

Цей результат може бути інтерпретований як "Антигрипін" дев'ятого розведення.

Таким чином, процес діагностики в системі забезпечується нейронними мережами не складної архітектури в умовах чіткої симптоматики і гібридні нейро-нечіткі системи у випадку нечіткої симптоматики. При цьому, базуючись на фундаментальному результаті Фунахаші про те, що з допомогою НС можна апроксимувати з будь-якою заданою точністю будь-яку неперервну на компактній функцію, з'являється можливість використання нечітких специфікацій для розв'язання задач чіткої діагностики [5-8]. Відкритим залишається питання про ефективність такого використання.

Інтерфейс з кінцевим користувачем

ЕС Н-Гомеопат може функціонувати в двох режимах: в режимі навчання (придбання знань) і в робочому режимі (діагностування). У першому режимі лікар-експерт з предметної області засобами діалогових вікон вводить в БЗ опис конкретних навчаючих виборок, а також іншу службову інформаційну складову у термінах мови представлення знань ЕС Н-Гомеопат.

Після завантаження системи лікар має можливість обрати область захворювання. Ця область визначається лікарем при зверненні пацієнта з відповідним до цієї області захворюванням. Також це діалогове вікно дозволяє лікарю-користувачу за вимогою обрати один з режимів роботи з ЕС Н-Гомеопат, а саме режим «Експерта» та режим «Лікаря».

Режим «Експерта» (рис. 1) надає можливість роботи з таблицями БД «діагноз», «симптоми», «перепарат». Як зазначено вище ці таблиці беруть участь у навчанні спеціалізованої НМ та КЕ.

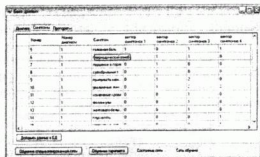


Рис. 1 Режим «експерт»

Кнопка "Обучение специализированной нейронной сети" використовується для навчання спеціалізованих нейронних мереж, приклади для навчання беруться з відповідних службових баз даних (кожної спеціалізованої нейронної мережі відповідає службова база даних). Перед початком процесу навчання НМ лікар-експерт має задати кількість ітерацій. Навчання закінчується, або якщо було досягнуто необхідної точності, або якщо було проведено задану кількість ітерацій. Є також можливість повернути мережу у початковий стан (до початку навчання). Для цього призначена кнопка "Сделать сеть не обученной".

Кнопка "Обучение терапевта" (рис. 2) призначена для навчання НМ з КЕ. Як вже було зазначено вище КЕ визначає до якої області медицини належать захворювання яке визначається введеними симптоми. В даному випадку лікар-експерт має можливість сформувати приклади для навчання. Для цього існує кнопка "сформировать таблицу выборки". Також лікар-експерт має вести кількість ітерацій. Як і у випадку з СНМ, лікар-експерт має можливість «перенавчати» НМ.

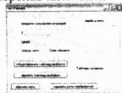


Рис. 2 Навчання «терапевта» (комутаційного елемента)



Рис. 3 Режим «лікар»

У режимі «лікаря» (рис. 3) відбувається введення інформації про нового пацієнта, перегляд карти пацієнта (наявна, якщо пацієнт раніше користувався ЕС Н-Гомеопат), видалення

пацієнта з БД ЕС Н-Гомеопат, введення симптомів пацієнтів для можливості діагностування.

Після введення інформації про пацієнта лікар-експерт співставляє у відповідність зі скаргам пацієнта симптоми БД ЕС Н-Гомеопат та отримує попередній діагноз пацієнту (рис. 4).



Рис. 4 Введення симптомів

Діагноз є попереднім оскільки на наступному етапі лікар-експерт може скорегувати результат, оскільки, як відомо, при навчанні НМ існує похибка навчання і відповідно є ймовірність того, що діагноз може бути не коректно встановлений. Якщо таке трапилось, на цьому етапі лікар-експерт, змінює вихідні дані і система «перенавчається» з урахуванням зауважень лікаря-експерта.

Висновок

Розроблена ЕС Н-Гомеопат реалізована виходячи з основних етапів розглянутих у вступі, що висуваються до розробки ЕС.

Основні результати даної статті є:

- Розроблені методи діагностування на нейромережах в системі Н-Гомеопат.
- Розроблена нейромережева архітектура (з комутаційним елементом) реалізації логічного виведення в ЕС.
- Запропоновані нейромережева модель аналізу нечітких даних.
- Показано, що задачу встановлення діагнозу та вибору засобів лікування можна розділити на декілька більш простих задач, а саме задачу встановлення області медицини до якої можливо належить захворювання та встановлення точного діагнозу захворювання.

При розробці системи Н-Гомеопат для роботи з базами даних та реалізації нечіткої специфікації логічного виведення була використана

технологія ADO.NET. Використання цієї технології обумовлено тим, що ця технологія має декілька переваг, а саме:

- ADO.NET дозволяє працювати з різними джерелами даних.
- Наявність автономних об'єктів дозволяє істотно підвищити ефективність та знизити навантаження на СУБД.

Список використаних джерел

1. *Элли Дж., Кумбс М.* Экспертные системы: концепции и примеры. М.: Финансы и статистика, 1987. – 191 с.
2. *Уинстон П.* Искусственный интеллект. – М.: Мир, 1980. – 519с.
3. *Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л.* Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. – М.: Горячая линия – Телеком, 2006. – 452с.
4. *Катеринич Л.О.* Керування синтезом нейронних мереж // Проблеми програмування. – 2009. – Вип.1. – С.53–59
5. *Андои Ф.И., Балабанова А.С.* Выявление знаний и изыскания в базах данных: подходы, модели, методы и системы //Проблемы программирования. –2000. – N1-2. – С.513–526.
6. *Круглов В. В., Дли М. И., Голунов Р. Ю.* Нечеткая логика и искусственные нейронные сети: Учеб. пособие. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2001. – 224 с.
7. *Jacek Leski.* Systemy neuronowo-rozmyte. – Warszawa: Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 2008. – 686 s.
8. *Hall L.O.* The choice of ply operator in fuzzy intelligent systems. Fuzzy Sets and Systems. – 1990. –V. 34, 135-144.
9. *Сахил Малик.* Microsoft ADO.NET 2.0 для профессионалов –2006. – Вильямс. – С.560.

Надійшла до редколегії 06.12.11

УДК 517.7

Коляденко М.А., аспірант

**Дослідження алгоритмічних систем
торгівлі цінними паперами**

У даній роботі проведено дослідження фондового ринку в розрізі програмних систем управління капіталом. Подана класифікація основних стратегій торгових роботів та представлені найпоширеніші алгоритми управління великими пакетами акцій. Також розглянуті практичні схеми підключення комп'ютерних систем до біржових торгів.

E-mail: mak_kol@ukr.net

Статтю представив доктор фізико-математичних наук Буй Д. Б.

Koliadenko M.A. Postgrad. Stud.

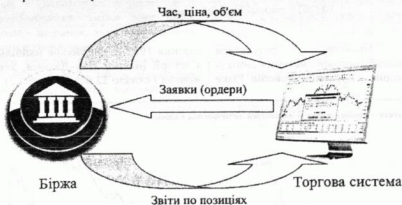
**Research of using algorithmic trading
systems in stock market**

The current paper is a research on the topic of how capital management software systems integrate into the stock exchange market. The paper classifies the key strategies used by trader software and lists the most common algorithms of managing large share holdings. The paper also examines the practices of using software systems in stock exchange auctions.

Алгоритмічна торгівля – формалізований процес здійснення торгових операцій на фінансових ринках відповідно до заданого алгоритму з використанням спеціалізованих комп'ютерних систем (торгових роботів).

Торгова система (ТС) – це програма, призначена для повної або часткової автоматизації торгових процесів. Рівень

автоматизації може бути різним – від допомоги учаснику торгів у прийнятті рішень, до автономного виставлення та відміни ордерів на біржі. Також, можливе виконання програмою додаткових функцій – контроль відправлених ордерів, моніторинг угод, аналіз торгівлі з наданням графіків і звітів (див. рис. 1).

**Рис. 1. Схема роботи ТС**

Відповідно до дослідження індустрії фінансових послуг, яке було проведене консалтинговою фірмою Aite Group, третина усіх угод, зафіксованих на фінансових ринках США та Євросоюзу в 2006 р., була здійснена автоматичними ТС. У 2009 р. на фондових ринках США вже 73% угод були керовані алгоритмічними системами управління капіталом [1]. Індустрія розвивається галопуючими

темпами і в майбутньому людський фактор в біржових торгах буде мінімізований.

Огляд класичних торгових систем

Ідея розробки формалізованої системи прийняття рішень на фондовому ринку виникала ще в середині XX століття, проте цілком завершені ефективні торгові системи почали з'являтися тільки з 80-х років. За відсутності належного рівня автоматизації торгів реалізовувати розроблені моделі та алгоритми

спочатку доводилося в ручному режимі, що призводило до частих збоїв та зберігало залежність від людського фактору. Проте результативність таких систем була настільки очевидною, що багато дослідників фондового ринку відразу переключилися на освоєння цього

напрямку, що і поклало початок ери алгоритмічної торгівлі.

Розглянемо деякі характеристики торгової системи "Turtles", яка зі змінним успіхом використовувалася на різних ринках більше 20 років [2] (див. табл. 1).

Таблиця 1. – Огляд ТС "Turtles"

Назва системи	"Turtles"
Розробники	Річард Денніс, Уільям Екхард
Період використання	З 1980-х років до 2006р.
Ринки	Ф'ючерсні контракти на товарних біржах США та ін.
Стратегія	Трендослідуюча, на основі технічного аналізу
Точки входу	Пробиття 20 (55) - денного каналу Донч'яні
Розмір позиції	Розраховувався на основі волатильності активу з урахуванням корельованості ринків. Діяв алгоритм значного збільшення позиції при відповідних умовах
Ризик-менеджмент	Максимальна допустима втрата – 2%. Величина стоп-лосу визначалася за формулою, яка враховує розмір позиції та волатильність активу
Точки виходу	10 (20) - денний high (low) ціни.

Приведемо фінансові результати використання описаної торгової системи одним із послідовників авторів – Куртісом Фейсом. Різке

падіння 1987 р. викликане найбільшим падінням в історії індексу Доу-Джонса, яке відбулося 19 жовтня і склало 22.6% (див рис. 2).



Рис. 2. Прибутковість торгової системи "Turtles" у 1984-1987 рр.

90-і роки відзначилися діяльністю масштабної якої функціонував один з найбільших хедж-торгової системи арбітражного типу, на основі фондів світу [3] (див. табл. 2).

Таблиця 2. – Огляд ТС "LTCM"

Назва системи	"Long-Term Capital Management" (LTCM)
Розробники	Джон Мирівезер, Майрон Шоулз та Роберт Мертон (лауреати Нобелівської премії з економіки 1997р.)
Період діяльності	1994 - 1998рр.
Ринки	Цінні папери фондових ринків США, Європи та Японії
Стратегія	Арбітраж (статистичний, парний, з фіксованою доходністю...)
Технологія торгівлі	Велика кількість короткострокових угод на різних ринках з використанням маржинальної торгівлі
Вибір позицій	На основі власних математичних методів визначення вартості цінних паперів (у тому числі моделі Блека-Шоулза)
Ризик-менеджмент	Хеджування позицій
Припинення діяльності	Внаслідок аномальної поведінки активів після російського дефолту 1998 року

Волатильність – швидкість і діапазон, у межах яких відбувається зміна ціни акції. Волатильний ринок – це ринок, який вирізняється крупними і різкими коливаннями цін [4].

Майже 4 роки середня річна прибутковість LTCM складала більше 40%, проте абсолютне підпорядкування стратегій суто математичним

моделям під час аномально волатильного ринку призвело, здавалось, ідеальні торгові системи до банкрутства. На графіку зображена зміна вартості одного долара, інвестованого в LTCM, індекс Доу-Джонса та казначейські облігації США (рис. 3).

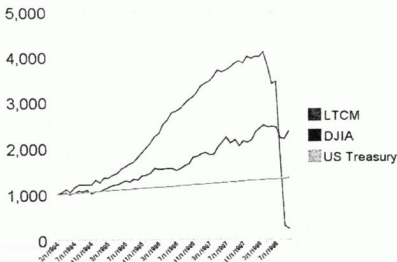


Рис. 3. Порівняльна прибутковість LTCM у 1994-1998 рр.

На сьогоднішній день формальне дослідження поведінки фінансових активів та розробка ТС відбувається як серед інституціональних інвесторів (пенсійних фондів, страхових компаній, банків) так і в стінах спеціально створених інститутів фондового ринку. Зважаючи на цінність та пряму практичну застосовність знань у цій сфері, будь-які результати таких досліджень знаходяться у вкрай обмеженому доступі, а подальші напрацювання проводяться розрізнено.

Класифікація алгоритмічних стратегій

З постійним ростом технічних характеристик комп'ютерів найбільшого розмаху набули торгові системи, які здатні постійно

відслідковувати тисячі фінансових інструментів та миттєво приймати рішення і здійснювати торгові операції.

Система високочастотної торгівлі (ВЧТ) цінними паперами – це повністю автоматизована ТС, стратегія управління капіталом якої характеризується надзвичайно коротким періодом утримання фінансових активів (до одного дня) та великою кількістю угод. При ВЧТ програми, запущені на найсучасніших комп'ютерах, аналізують дані біржових торгів на основі алгоритмів, які здатні миттєво використовувати торгові можливості, доступність яких вимірюється секундами. Основні стратегії систем ВЧТ розділяються на 6 базових напрямків (див. рис. 4).

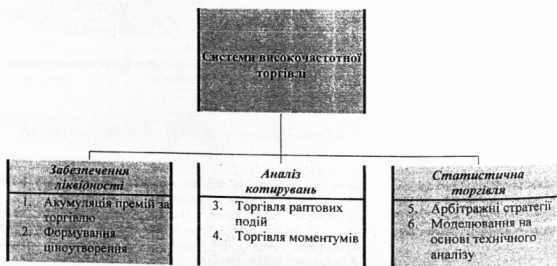


Рис. 4. Напрямки високочастотної торгівлі

1. Акумуляція премій за торгівлю. Забезпечення ліквідності акцій шляхом виставлення заявок на купівлю чи продаж з метою збору премій, які надаються біржею за активну участь у торгах. Стратегія застосовується для акцій з високим денним об'ємом торгів і низькою волатильністю. Різниця в цінах між купівлею-продажем не є вирішальною, тому в кінцевому рахунку прямує до 0.

2. Формування ціноутворення. Прибуток генерує спред – різниця між поточними заявками на купівлю та продаж фінансового активу, також отримуються додаткові надходження від бірж, як у випадку 1. Цей напрямок розвивається серед акцій з низьким або нестабільним об'ємом торгів.

3. Торговля раптових подій. Відбувається постійний моніторинг акцій та здійснюється

відбір таких, у яких за дуже короткий проміжок часу відбувся стрімкий стрибок ціни і/або об'єму торгів. Таким чином миттєво фіксується вихід важливих новин, оголошень, чуток і навіть інсайдерської інформації. ТС, користуючись перевагою у швидкості, можуть, наприклад, здійснювати купівлю (продаж) активу в напрямку першого імпульсу та покривати позиції, коли вже усі учасники ринку освоюють нову інформацію і встановлять рівноважну ціну.

4. Торговля моментумів. Визначається тимчасовий дисбаланс попиту-пропозиції і здійснюється короткострокове відкриття позицій до відновлення стабільності ціни. Реалізується шляхом дуже швидкої торгівлі з невеликими, але чітко прогнозованими прибутками. Розвиваються алгоритми ідентифікації крупного інвестора,

який тільки починає скуповувати чи покривати велику позицію.

5. Арбітражні стратегії. Спочатку визначаються та класифікуються акції та ринки з високим показником кореляції цін. Потім фіксуються ситуації, коли розбіжність у цінах тимчасово виходить за межі звичного коридору (при необхідності перевіряється наявність критичних новин), і здійснюється торгівля активу у напрямку врівноваження цін (для мінімізації ризику часто проводиться додаткове хеджування). Напрямки, в яких застосовується арбітраж:

- ✓ залежність між похідними фінансовими інструментами та базовими активами (ціна акції – вартість опціонів)
- ✓ сильнокорельовані акції з одного сектору, країни, території чи з іншим об'єднуючим чинником
- ✓ компанії, бізнес яких тісно прив'язаний до певних ресурсів (нафта – нафтопереробні заводи – авіатранспорт)

✓ залежність ціни кожної компанії від ринку в цілому (бета-кофіцієнт).

6. Моделювання на основі технічного аналізу. Основою слугують технічні індикатори та паттерни для оцінки поточної ситуації та кількісного прогнозування майбутньої динаміки. За відправну точку беруться принципи технічного аналізу. Проводиться детальний аналіз історичної статистичної інформації, на основі якого будуються торгові правила. Досліджується та порівнюється прибутковість різних алгоритмів з метою максимізації співвідношення винагорода-ризик.

Підключення торгових роботів

Для більшості алгоритмічних систем швидкість отримання ринкових даних і швидкість виставлення заявок є найважливішими факторами, що впливають на ефективність роботи системи. Історично виділилось шість основних варіантів підключення роботів до біржових електронних систем (рис. 5).

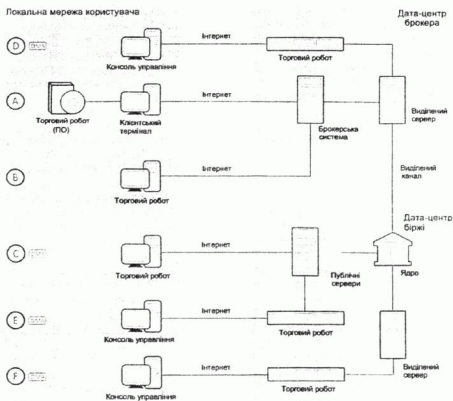


Рис. 5. Типові схеми підключення торгових роботів

Варіант А – найекономічніший з існуючих, доступу є непередбачувані затримки в отриманні ринкових даних і низька швидкість відправлення заявок. Причиною є велика кількість проміжних інфраструктури. Недоліками цього варіанту

ланок між торговим роботом і ядром біржової електронної системи. Крім того, існує цілий ряд зовнішніх ризиків, які можуть призвести до нестабільної роботи алгоритмічної торгівлі, наприклад, проблеми інтернет-з'єднання або збій брокерської системи. У зв'язку з цим, даний варіант доступу не рекомендується застосовувати для високочастотної торгівлі.

Варіант В – практично ідентичний попередньому, з тією лише різницею, що для підключення торгового робота до брокерської системи не потрібна наявність клієнтського терміналу. Незважаючи на виключення однієї проміжної ланки, даний варіант доступу за величиною затримки даних, швидкістю роботи із заявками, і зовнішніми ризиками практично не відрізняється від Варіанта А, що також робить його непридатним для високочастотної торгівлі.

Варіанти С, D, E і F відносяться до групи варіантів прямого доступу до ринків (англ. Direct Market Access, DMA) і характеризуються підключенням торгового робота безпосередньо до ланки біржової торгової інфраструктури – (виділеного або публічного сервера). У зв'язку з мінімальною кількістю ланок DMA є оптимальним рішенням для алгоритмічних систем високочастотної торгівлі.

Варіант С – найпростіший у реалізації та найекономічніший варіант DMA. У цьому випадку всі інфраструктурні витрати обмежуються платою за доступ до серверу, через який торговий робот отримує ринкові дані і виставляє заявки. Цей варіант доступу істотно перевершує за всіма характеристиками варіанти А та В, однак у нього є один суттєвий недолік, пов'язаний із використанням інтернет-з'єднання для взаємодії з біржовою торговою інфраструктурою. Підключення через Інтернет не гарантує якості передачі даних, оскільки на шляху від торгового робота до біржі існує безліч маршрутизаторів, на кожному з яких можуть виникати черги пакетів даних, які призводять до істотного зниження швидкості передачі або взагалі до втрати цих даних.

Варіант D – дозволяє усунути ризики, пов'язані з інтернет-з'єднанням, за допомогою передачі торгових даних через виділений канал зв'язку, що забезпечує стабільну швидкість передачі з мінімальними втратами. Для цього торговий робот має бути розміщений в дата-центрі брокера, що передбачає додаткові витрати на придбання апаратного забезпечення (сервера) для торгового робота і на оплату послуги розміщення сервера в дата-центрі (колокейшн). Незважаючи на всі переваги цього варіанта, у

нього залишається ряд зовнішніх ризиків, обумовлених загальним використанням виділеного каналу і сервера всіма клієнтами брокера, що може призвести до повної загрози каналу або перевантаження сервера.

Варіант E – дозволяє виключити ризик, пов'язаний з виділеним каналом зв'язку і досягти мінімальних затримок в отриманні ринкових даних за допомогою розміщення торгового робота в дата-центрі біржі. Однак максимальна близькість до біржової торгової інфраструктури вимагає додаткових витрат, серед яких оренда місця, оплата отримання даних з локальної мережі біржі і оплата доступу в Інтернет для можливості віддаленого управління торговим роботом.

Варіант F – по праву вважається найбільш надійним та ефективним зі всіх існуючих варіантів доступу завдяки виключенню останнього зовнішнього ризику, обумовленого використанням публічного сервера багатьма учасниками торгів. Для реалізації цього варіанта необхідні витрати на придбання апаратного забезпечення для виділеного сервера, оплату ліцензії та інсталяції програмного забезпечення для нього, а також на оплату послуги його розміщення в дата-центрі біржі [5].

Список використаних джерел

1. Rob Iati. The Real Story of Trading Software [Електронний ресурс] AdvancedTrading.com – 2009, July 10.
2. Curtis M. Faith. Way of the Turtle. – McGraw-Hill, 2007 (ISBN 0-07-148664-X). – P. 95-96.
3. MacKenzie, Donald. Long-Term Capital Management and the Sociology of Arbitrage // Economy and Society. – 2003. – №32 – P. 349–380.
4. Герчик А., Быченко С. Курс активного трейдера. – Нью-Йорк, 2007 – С. 98.
5. Серебренников Д. Введение в алготрейдинг // Futures & Options. – 2011. – №04. – С. 70-75.

Надійшла до редколегії 25.09.2011

УДК 681.3

Олександр О. Костюк, аспірант

Розробка моделі й прототипу програмного забезпечення для управління документообігом віртуального підприємства

У статті розглянутий підхід до побудови системи управління електронним документообігом віртуального підприємства, що дозволяє автоматизувати процес керування потоками документів. У якості основи побудови пропонується використовувати апробований апарат, що добре зарекомендував себе, CBR-метод. Концептуальні положення цієї статті можуть бути використані для вирішення теоретичних проблем електронного документообігу й створення на їхній основі відповідного прикладного програмного забезпечення.

Ключові слова: віртуальне підприємство, CBR-метод, управління електронним документообігом.

E-mail: kostyuk@ukma.kiev.ua,

Статтю представив д.т.н., проф. Заславський В.А.

Загальна постановка проблеми

Однією з найважливіших характеристик ВП є гнучка динамічна мережева структура, яка створюється шляхом інтеграції ресурсів партнерів в інформаційному просторі на обмежений період часу, управління яким базується на сумісному документообігу, що є однією з основних частин системи управління, особливо в зв'язку з територіальною розташованістю партнерів [2]. Аналіз діяльності ВП показує, що не приділяється достатньої уваги раціоналізації системи електронного документообігу в напрямку пошуку оптимального функціонування засобів зберігання й передачі інформації [1, 9]. Відповідно, виникає необхідність у розробці моделей електронного документообігу ВП, що дозволять оптимізувати структуру системи документообігу за різноманітними критеріями.

Постановка задач дослідження

Структурно ВП - це група підприємств, доволіно віддалених один від одного, орієнтованих на створення нових товарів і послуг шляхом інтеграції ресурсів партнерів. В основі створення віртуального підприємства лежить

Oleksandr O. Kostyuk, Postgraduate Student
Oleksandr O. Kostyuk, Postgraduate Student**Development of model and prototype software for document management virtual enterprise**

The paper considers the approach to construction management of virtual enterprise electronic document management to automate the process flow control documents. As the foundation of building is proposed to use the unit tested, well proven, CBR-method. Conceptual provisions of this article can be used to solve theoretical problems of electronic document and create on their basis of relevant application software.

Key words: virtual enterprise, CBR-method, electronic document management.

принцип активної інтеграції ресурсів його учасників.

Для керування системою електронного документообігу віртуального підприємства(ЕДОВП), необхідно:

1. Дослідити й з'ясувати характеристики руху документів у віртуальному підприємстві.

2. Розробити алгоритми та моделі управління ЕДОВП, що дозволить ефективно керувати потоками документів в безперервній адаптації віртуального підприємства до мінливої кон'юнктури ринку [9].

Вирішення задач дослідження

ЕДОВП є об'єктом, який погано формалізується, бо його якості суттєво невідомі та змінюються в процесі функціонування. Тому у силу недостатності знань про об'єкт і середовище, у якому він функціонує, спроби одержати точну модель поведінки такого об'єкта не представляються можливими. Останнім часом для таких задач активно розвивається "некласичний" підхід теорії управління, пов'язаний із застосуванням алгоритмів і методів

інтелектуального управління на основі нечіткої логіки, нейронних мереж і генетичних алгоритмів. З цим же підходом пов'язані ситуаційне управління на основі ієрархічних моделей з нечіткими предикатами. Але в управлінні документообігом пропонується застосувати висновок по аналогіям [8] - метод прийняття рішень, в якому використовуються знання про ситуації, що виникали раніше. При розгляді нової ситуації (поточного випадку) відшукується схожа аналогія. Замість того щоб щораз шукати рішення спочатку, можна спробувати використовувати рішення, прийняте в схожій ситуації, можливо, адаптувавши його до поточної нагоди.

У ситуації, коли відомих параметрів об'єкта управління та навколишнього середовища недостатньо для однозначного визначення поведінки цього об'єкта, управління необхідно здійснювати не за параметрами об'єкта, а по його стану, який більш повно визначає тенденцію його подальшої поведінки. Виникає задача ідентифікації стану об'єкта управління на його піднаглядним (відомим) параметрами. Для цього потрібно вміти сформувати на основі апіорної інформації узагальнені образи - класи станів об'єкта.

Процес документообігу може бути представлено у вигляді трьох кінцевих множин і зв'язків елементів цих множин між собою, що означає, що документообіг — це множина дій вироблених множиною учасників над множиною станів документів. $D = \{M, A, S\}$, де D — формальна модель документообігу; M — множина учасників; A — множина дій; S — множина станів документів.

Множина M визначається як кінцева множина ролей, які можуть бути призначені фактичним учасникам документообігу. Множина A визначається як кінцева множина дій, виконання яких припустимо в межах розглянутої системи документообігу. S — кінцева множина станів, які можуть приймати документи після виконання дій з множини A учасником з множини M .

В нашому випадку замість точного виду математичної моделі ДОВП доступна тільки апіорна інформація про його стани, керуючі впливи на нього і результати впливів. У термінах висновку за аналогіями інформація про стан об'єкта - це опис проблеми, а видача керуючого впливу є рішенням проблеми; тоді результат керуючого впливу необхідно розглядати як результат застосування рішення.

У цьому підході стан об'єкта управління порівнюється зі станами з заздалегідь накопиченої бази даних. На основі якоїсь міри близькості вибирається одна зі схожих аналогій. Керуючий вплив, пов'язаний з нею, використовується безпосередньо або адаптується до поточної нагоди, виходячи зі ступеня близькості випадків. Результат впливу також може прогнозуватися по аналогії. Підсумок впливу заноситься в базу аналогій для подальшого використання. Одночасно ставиться і завдання вибору міри близькості для визначення схожості керуваного об'єкта з прецедентами. Шукана міра повинна сприяти обмеженню перебору можливих варіантів, їх ранжирування при виборі керуючих впливів, а також полегшення адаптації керуючого впливу від аналогії для поточного стану об'єкта управління [6].

У ситуації, коли відомих параметрів ОУ та навколишнього середовища недостатньо для повного та однозначного визначення його поведінки, не можна виробити керуючі дії на об'єкт, знаючи тільки його вхідні параметри. Ми будемо ближче до знання поведінки об'єкта, коли управління буде здійснюватися не за його параметрами, а за його станами. Якщо владість сформувати на основі апіорної інформації узагальнені, або агреговані образи - класи станів ОУ з відомою реакцією об'єкта кожного класу, то керуючий вплив можна розглядати як відображення ОУ з класу в клас (в тому числі - у вихідний клас). Розіб'ємо стани ОУ на групи, стани в кожній з яких еквівалентні один одному з точки зору управління, і назвемо їх класами станів об'єкта. При такому підході поведінку ОУ, як за наявності керуючого впливу, так і без нього, являє собою дискретний процес, кожен крок якого, в загальному випадку, - це перехід об'єкта з одного класу станів в інший, тобто наші знання про об'єкт управління і про середовище, в якій він функціонує, є невизначеними. Відома лише приналежність об'єкта до певного класу станів. Мета - досягнення оптимального поведіння об'єкта, що виражається у вигляді послідовності певних класів станів. Необхідно знайти алгоритм управління (адаптивний регулятор), що забезпечує досягнення мети за кінцеве число керуючих впливів [6].

Дослідження такого підходу до вирішення проблем, заснованого на досвіді минулих ситуацій, призвело до появи технології виведення, заснованого на прецедентах (Case-Based Reasoning, або CBR), і, в подальшому - до

створення програмних продуктів, що реалізують цю технологію. CBR-методи базуються на тезі, що подібні завдання (проблеми) вирішуються подібним чином.

Поведінка учасника документообігу (співробітники партнерів-учасників віртуального підприємства, що роблять генерування, рух і термінування документів) може бути презентовано у вигляді послідовності станів документів. Сукупність усіх станів документів представляє кінцеву множину, яка повністю описує всі можливі сценарії поведінки учасників, з урахуванням функцій переходів для прийняття рішень про вибір наступного стану. Ці функції реалізуються з допомогою аналізу дій учасників документообігу. Вироблена дія визначає результуючий стан, для якого вхідними даними для визначення вибору є поточний стан документа й учасник процесу, тобто реалізується документообіг, у якому на кожному кроці відбувається дія на підставі процесу, і на підставі аналізу поточного стану документа (виконавця) приймається рішення про наступний стан документа.

У процесі документообігу необхідно накопичувати знання, вміння, навички для своєчасного прийняття рішень. Одним з аспектів цього процесу є накопичення в пам'яті системи стандартних, типових, тобто тих, що часто зустрічаються (повторюваних) ситуацій й відповідних їм ефективних рішень. Ефективність забезпечується вирішенням завдань оптимізації евристичними методами «проб і помилок», результатами моделювання, експериментів. В цілому, це дозволяє для стандартних або близьких до них, ситуацій, що зустрічалися раніше, формувати ефективні рішення, пропускаючи або мінімізуючи проміжні операції, пов'язані з витратами часу, інтелектуальних і матеріальних ресурсів. У зв'язку з цим пропонується формалізація досвіду управління ДОВП і на цій основі автоматизації процесу формування стандартних рішень.

Проблеми, з якими стикається ця методологія: пошук найбільш придатних аналогій і подальша адаптація знайденого рішення. В основі всіх підходів до відбору аналогій лежить той чи інший спосіб вимірювання ступеня близькості аналогії і поточного випадку. За таких вимірів обчислюється чисельне значення деякої міри, що визначає склад множини аналогій, які потрібно обробити для досягнення задовільної класифікації або прогнозу.

В зв'язку зі складністю ДОВП як об'єкту управління (ОУ) й недостатності знань про середовище, в якому він функціонує, не представляється можливим отримати точну модель поведінки об'єкта. При цьому є тільки апріорна інформація про стани, керуючих впливів на нього і результати впливів.

Пропонується наступна структура аналогії для управління ДОВП:

- стан ОУ до впливу опис об'єкту (набір ознак, приналежність до класу станів);
- керуючий вплив - опис впливу (тут можлива формалізація, зокрема, класифікація керуючих впливів), як окремий випадок, можливо відсутність впливу;
- стан після впливу - опис об'єкту (набір ознак, приналежність до класу станів);
- вихід (позитивний результат / негативний / спірне).

Після застосування регулюючого впливу і оцінки підсумку цього впливу поточна ситуація перетворюється в аналогію, яка заноситься в базу аналогій. Негативний результат також є інформативним і заноситься до бази.

При реалізації приведенного алгоритму однією з найважливіших є проблема вибору відповідної аналогії. Після того, як аналогії вилучені, потрібно вибрати "найбільш підходящу" з них. Це визначається порівнянням ознак об'єкта в поточній ситуації і в вибраних прецедентах. Визначення методу, на якому буде ґрунтуватися знаходження міри схожості прецедентів, вирішується під час створення системи її розробниками. Найбільш популярним і часто використовуваним є метод "найближчого сусіда" [5, 7]. У його основі лежить той чи інший спосіб вимірювання ступеня близькості аналогії і поточного випадку за кожною ознакою (будь це текстовий, числовий або булевський), який вважається корисним для досягнення мети, тобто вводиться метрика на просторі всіх ознак, в цьому просторі визначається точка, що відповідає поточній нагоді, і в рамках цієї метрики знаходиться найближча до неї точка з точок, що представляють аналогії. Зазвичай прогноз робиться на основі декількох найближчих точок, а не однієї.

Такий метод більш стійкий, оскільки дозволяє згладити окремі викиди, випадковий шум, завжди присутній в даних. Кожної ознаки призначається вага, що враховує його відносну цінність.

Повністю ступінь близькості аналогії за всіма ознаками можна обчислити, використовуючи узагальнену формулу виду:

$$\frac{\sum_j W_j * \text{sim}(x_{ij}, x_{kj})}{\sum_j W_j}$$

де w_j - вага j -ї ознаки, sim - функція подібності (метрика), x_{ij} та x_{kj} - значення ознаки x_j для поточного випадку і аналогії, відповідно.

Найменування метрики	Тип ознак	Формула для оцінки міри близькості (метрики)
Евклідова відстань	Кількісні	$d_{ik} = \left(\sum_{j=1}^N (x_{ij} - x_{kj})^2 \right)^{1/2}$
Манхеттенська метрика	Кількісні	$d_{ik}^l = \sum_{j=1}^N x_{ij} - x_{kj} $
Міра подібності Хеммінга	Номинальні (якісні)	$\mu_{ij}^H = \frac{n_{ik}}{N}$ де n_{ik} - число співпадаючих ознак у зразків X_i й X_k .
Міра подібності Роджерса-Танімото	Номинальні шкали	$\mu_{ij}^{R-T} = n_{ik}'' (n_i' + n_k' - n_{ik}'')$ де n_{ik} - число співпадаючих одиничних ознак у зразків X_i й X_k ; n_i, n_k - загальне число одиничних ознак у зразків X_i й X_k відповідно;.
Відстань Махалонобиса	Кількісні	$d_{ik}^M = (x_{ij} - x_{kj})^T W^{-1} (x_{ij} - x_{kj})$ W - ковариаційна матриця виборки $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
Відстань Журавльова	Змішані	$d_{ik} = \sum_{j=1}^N I_{ik}^j \quad \text{де}$ $I_{ik}^j = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_{ij} - x_{kj} < s \\ 0 & \text{інакше} \end{cases}$

Формально, необхідно ввести метрику на просторі параметрів (ознак, властивостей) для опису прецедентів і поточної ситуації, а потім, визначити на основі обраної метрики відстань між точками, відповідними прецедентів, і точкою, що відповідає поточній ситуації, в підсумку слід вибрати найближчу точку (прецедент) до поточної ситуації. Безумовно, ефективність методу найближчого сусіда багато в чому залежить від вибору метрики, основні з яких приведені в таблиці. [4].

Вибір відповідної метрики трудомістке завдання, від успішного вирішення якого безпосередньо залежить результативність пошуку рішення.

Після обчислення ступенів близькості всі аналогії вишиковуються в єдиний ранжируваний список.

У вказаному методі використовуються тільки ознаки поточного випадку і прецеденту. Але в управлінні документообігом віртуального підприємства з урахуванням його специфіки й поставленої задачі керування документообігом важливий ще й результат впливу, а саме, наскільки він наближає до мети. При введенні метрики можна врахувати і цей критерій. Вважаючи, що мета повинна бути досягнута за кінцеве число кроків, можна вважати більш близьким прецедент, що дозволяє досягнути мети за менше число кроків. Для цього необхідно створювати багаторівневу метрику, де аналогії порівнюються по наступним параметрам: станом до впливу; самому впливу; станом після впливу.

У разі якщо знайдений аналогія не має повного збігу з поточною ситуацією, необхідно виконувати адаптацію - модифікацію рішення, яке є у вибраній аналогії і спрямоване на вирішення цільової проблеми. Якщо існують алгоритми адаптації, вони зазвичай припускають наявність залежності між ознаками аналогії і ознаками рішень, що містяться в них. Процес модифікації рішення може включати ряд кроків, від простої заміни деяких компонентів в наявному рішенні, коригування або інтерполяції (числових) ознак або зміни порядку операцій до більш істотних дій.

- модифікація рішення, яке є у вибраної аналогії і спрямоване на вирішення цільової проблеми. Алгоритми адаптації припускають наявність залежності між ознаками аналогії і ознаками рішень, що в них містяться. Такі залежності можуть задаватися людиною при побудові бази аналогій чи виявлятися в базі автоматично методами видобутку знань. Процес модифікації

рішення включає ряд кроків, від простої заміни деяких компонентів в наявному рішенні, коригування або інтерполяції (числових) ознак або зміни порядку операцій до більш істотних дій.

Для створення на базі даної моделі програмного прототипу системи управління ДОВП був проведений аналіз параметрів різних прототипів і сформовані вимоги до його створення. Існують прототипи активні і пасивні, точні і неточні, горизонтальні і вертикальні. Горизонтальний прототип - це поверхнєве зображення інтерфейсу, за яким майже нічого або зовсім нічого не варто. Навіть активний горизонтальний прототип зазвичай характеризується лише мінімальною активністю. Горизонтальні прототипи відображають зовнішній вигляд інтерфейсу, але у край малюю мірою моделюють поведінку. Вертикальний прототип. Описує досить повно один сегмент інтерфейсу і стоять за ним функції. Даний термін частіше всього застосовується до активних прототипам, хоча і пасивні прототипи можуть відповідати такому вертикальному сегменту. В активній формі вертикальний прототип моделює всі контексти взаємодії, цілком симулює поведінку, пов'язана з одним або декількома елементами. Активні прототипи, звані також функціональними, або робітниками. Мають такі види: програмні експериментальні моделі, імітаційні моделі. Експериментальна модель - прототип, що володіє обмеженою точністю і функціональністю, створений в середовищі програмування, що відрізняється від повноцінного мови або від того середовища, в якій буде реалізована система. Для створення таких моделей часто використовуються кошти загального призначення, включаючи PowerPoint і Macromedia Director. Електронні експериментальні моделі повинні демонструвати загальну логіку програми і частково моделюють її поведінку, відображаючи, зміни зовнішнього вигляду і співвідношення між компонентами інтерфейсу. Поведінка імітаційних моделей більшою мірою нагадує реальні програми, демонструє їх можливості. Їх можна створювати навіть за допомогою відносно простих засобів, таких як PowerPoint або інші пакети для створення презентацій, але можна для цих цілей скористатися і традиційними мовами програмування. Прототип, що розроблявся в якості першого етапу створення програмної системи, дозволив перевірити реалізованість технічних ідей.

Висновки

У статті проведено дослідження функціонування системи електронного документообігу у віртуальних підприємствах з метою побудови системи керування цим документообігом на базі концепції висновків по аналогіях та класифікації станів. Суттєвою характеристикою методу є можливість накопичення знань про можливу поведінку системи документообігу віртуального підприємства в разі виникнення будь-яких ситуацій і постійно зростаюча ймовірність вірного прогнозу поведінки в ситуаціях, які раніше не зустрічалися або раніше не розпізнавалися. У результаті складні процеси

документообігу можуть бути формально представлені у вигляді моделі.

Реалізація моделі документообігу у вигляді системи прийняття рішень по аналогіях дозволяє застосувати до керування процесом документообігу апробований апарат. У результаті з'являється можливість, що дозволяє автоматизувати складні процеси управління потоками документів й поліпшити якість управління за рахунок повторного використання накопиченої інформації про ефективні рішення, які зустрічалися раніше. Також реалізован прототип системи управління.

Список використаних джерел

1. Рамзанов С. К., Организация виртуальных предприятий / Тимашова Л. А., Рамзанов С. К., Бондар С. А., Лещенко В. А. – Луганськ: Вид-во СНУ ім. В. Даля, 2004. – 368 с.
2. Самтон М. Дж. Корпоративный документооборот / Майкл Дж. Д. Самтон. – М.: Азбука, 2002. – 448 с. – ISBN 5-267-00509-6.
3. Круковский М. Ю. Методология построения композитных систем документооборота. Математичні машини і системи. – 2004. – № 1. – К. ИПММС НАНУ 101 – 114 с.
4. Варшавский П. Р., Еремеев А. П. Методы правдоподобных рассуждений на основе аналогий и прецедентов для интеллектуальных систем поддержки принятия решений // Новости искусственного интеллекта. – 2006. – №3. – С.39-62.
5. Anand S.S., Hughes J.G., Bell D.A. and Hamilton P. "Utilising Censored Neighbours in Prognostication", Workshop on Prognostic Models in Medicine, Eds. Ameen Abu-Hanna and Peter Lucas, Aalborg, (AIMDM'99), Denmark, pp15-20, 1999.
6. Карнов Л.Е., Юдин В. Н. Адаптивное управление по прецедентам, основанное на классификации состояний управляемых объектов. Стр. 37-58. Труды Института системного программирования РАН, том 13, 2007 г. Часть 2.
7. Kolodner J.L. "Maintaining Organization in a Dynamic Long-term memory". Cognitive Science, 7(4): 243-280, 1983.
8. Костюк О.О. Концепція побудови математичної моделі документообігу віртуального підприємства. //Наукові записки НаУКМА Т.112. Комп'ютерні науки. – К., 2010. – С.49-54.
9. Костюк О.О. Віртуальне підприємство: задачі побудови системи електронного документообігу// Наукові праці ДонНТУ, Випуск 171. – Донецьк, 2010. – С.153-160.

Надійшла до редколегії 29.10.11

УДК 004.89

Лялецький О.В., с.н.с.

**Принципи обробки логіко-математичних
знань в комп'ютерних системах**

Стаття присвячена аналізу принципів обробки логіко-математичних знань, які ведуть до побудови комп'ютерних систем з можливостями виконання логічних міркувань в середовищі формальної природної мови.

Ключові слова: логіко-математичні знання, комп'ютерна система, логічні міркування, формальна природна мова.

E-mail: lav@unicyb.kiev.ua

Статтю представив чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф. Анисимов А.В.

Термін "система обробки логіко-математичних знань" (система ОЛМЗ) використовується нижче для позначення будь-якого завершеного програмного продукту або комп'ютерної системи, що надають у розпорядження користувача можливості проводити числові викладки та/або символічні перетворення та/або логіко-математичні міркування, включаючи в це поняття, крім алгоритмічного, також декларативний аспект представлення математичних знань.

1. Існує багато принципів керування та обробки комп'ютерних логіко-математичних знань (див., наприклад, інформацію на сайті "<http://www.mkm-ig.org/index.html>" групи МКМ), серед яких найбільш важливими є числовий, символічний, дедуктивний та інтеграційний.

Чисельний принцип відображає засоби і методи приближеного або точного рішення задач чистої або прикладної математики, що базується на побудові скінченної послідовності дій над скінченими множинами чисел.

Аналітичний принцип базується на можливості ЕОМ проводити складні символічні перетворення, робити числові викладки, будувати графіки функцій, задавати математичні моделі визначених процесів тощо. Він орієнтований на побудову та використання систем комп'ютерної алгебри і виникла в середині 1960-х рр. в якості альтернативи обчислювальній парадигмі в зв'язку з появою ЕОМ такої швидкодії, інформаційної ємності і гнучкості, що стало можливим програмування складних інтелектуальних процесів.

A.V.Lyaletski, PhD.

**Principles of logical-mathematical
knowledge processing in computer systems**

The paper is devoted to the analysis of principles of logical-mathematical knowledge processing leading to the construction of computer systems having capabilities for logical reasoning in formal natural language.

Key Words: logical-mathematical knowledge, computer system, logical reasoning, formal natural language.

Дедуктивний принцип, який також з'явився в середині 1960 рр., спирається на комплексну обробку логіко-математичних знань, що, як правило, ґрунтується на тому, що існуючі знання представляються у декларативному вигляді як певні формалізовані тексти (що містять аксіоми, визначення, твердження, теореми і т. д.), а додаткові знання беруться з наявних шляхом деяких умовиводів, що звичайно мають вигляд правил побудови (виводу) нових тверджень¹.

Системи представлення та обробки знань, обґрунтовані на цьому принципі, отримали назву систем автоматизації міркувань, значна частина яких існує у вигляді систем верифікації/доведення теорем, оскільки саме логіко-математичний підхід виявляється найбільш релевантним та ефективним при рішенні задач на проведення логічних побудов і використовується в багатьох прикладних областях.

Інтеграційний принцип "об'єднує" усі вищезазначені парадигми. Його можна поділити на два типи: інтегрування на етапі проєктування, тобто ще під час розробки системи передбачається наявність у ній систем різного роду, можливості її ієрархічного нарощування та підключення до неї вже наявних комп'ютерних служб, та інтегрування на етапі експлуатації, тобто комбінування в одну систему вже готових комп'ютерних служб (особливе зацікавлення до

¹ Також потрібно відмітити індуктивний принцип, яка базується на формальному переході від часткових спостережень до висновків; деякий опис його можливого використання в роботі відсутній.

розробки таких служб визвало широке застосування мережі Internet для передачі необхідних даних, що, у свою чергу, привело до створення відповідних стандартів).

Інтегрування на етапі експлуатації дає найбільш простий засіб об'єднання вже маючихся комп'ютерних систем. Воно практично зводиться до встановлення "шлюзів" передачі даних відповідно існуючим протоколам з урахуванням топології з'єднання систем.

При створенні ж нової системи ОЛМЗ, що об'єднує можливості різних комп'ютерних систем у рамках деяких особливостей, головна увага повинна уділятися її архітектурі, тобто засобам інтеграції на етапі проєктування. Для систем верифікації міркувань в математиці це, у свою чергу, передбачає вибір стилю формалізації математичних тверджень, стилю доведення, який використовується, і "гранульованості" доведень, що сприймаються [1].

На стиль формалізації впливають предметна область, попередні відомості, вид визначень (чи є вони комп'ютеризованими), спосіб міркування (чи є він конструктивним, строго типізованим чи заснованим на тому чи іншому численні) і т.д. Очевидно, що на цей стиль впливають, насамперед, використовувана базова логіка і фундаментальні теорії, що втягнуті в формалізацію.

2. У даний час існує два основних стилі формалізації: один орієнтований на застосування логік вищих порядків (з теорією типів як основи), а інший - на логіки першого порядку (з теорією множин як основи).

Типи застосовуються в більшості добре відомих асистуючих систем, таких, як Isabelle [2], Coq [3], Automath [4], Theorema [5], Lambda-Clam [6] та інших. Перевага в застосуванні теоретико-типового підходу віддається у випадках звертання до індуктивно-визначуваних областей і рекурсивних визначень, і він добре підходить для проведення формалізації програмістських й інженерних концепцій. Однак, цей підхід не є ідеальним для формалізації традиційної математики, хоча в більшості згаданих систем використовуються різноманітні набори чисто математичних теорій.

Як приклад другого стилю можна згадати добре відому систему Mizar [7], що використовує логіку першого порядку і теорію множин Тарського-Гротендіка. Така орієнтація добре відповідає традиційному способу побудови математики, й існує більший набір математичних тверджень, перевірених системою Mizar.

Система SAD [8], яка розробляється на факультеті кібернетики КНУ сумісно з французькими дослідниками із університетів Париж 11 і Париж 12, не адаптована до якої-небудь теорії множин (чи іншої фундаментальної теорії), що дає загальну основу для формалізації. Замість цього, при розв'язанні тієї чи іншої задачі пропонується задати необхідний набір попередніх відомостей, виражаючи базові концепції на спеціальній формальній мові, транскльованій в певний різновид мови першого порядку.

3. Іншою важливою властивістю систем надання допомоги в автоматизації міркувань є вид їхніх вхідних даних. Так звані інтерактивні системи (першого типу) найчастіше є тактико-керованими, що означає, що задане твердження доводиться за допомогою послідовності інструкцій, що вводяться в систему. Ці інструкції (тобто тактики) можуть бути примітивними, тобто такими, що являють собою одноразове застосування правила виведення, чи більш складними, подібними до плану доведення або залучення до обробки розглянутої цілі деякого зовнішнього (відносно системи) прувера. До систем такого типу відносяться Isabelle, Coq, Lambda-Clam і ряд інших систем. Робота з системою такого роду виявляється легкою у випадку, коли вона забезпечує витончений набір могутніх тактик, яких є досить, щоб вирішити поставлену задачу.

Другий тип систем орієнтований на декларативне представлення розв'язуваної задачі, коли твердження, що доводяться, і, при необхідності, їхні докази записуються на деякій формальній мові, що повинна бути розширеною засобами (логічного) структурування тексту. Верифікуюча система такого роду повинна мати здатність до перевірки правильності кожного кроку доведення. Найбільш типовими представниками цього підходу є системи Theorema і SAD [9]. Система Isabelle, розширена засобами Isar (яка включає мову для запису структурованих доведень, що імітує мову звичайних математичних доведень) [10], також може бути віднесена до систем, керованих доведеннями.

Різниця між двома типами вхідних даних не є сильно істотною. Якщо можна побудувати доведення теорем тактико-керованою системою, що використовує проміжне введення цілей і автоматичне закриття підцілей, то така система може розглядатися як керована доведенням. Навпаки, якщо кроки доведення, які

сприймаються деякою системою, керованою доведенням, містять детальні підказки про способи верифікації, то така система може розглядатися як тактико-керована, для якої підказки відіграють роль тактик.

4. Дедуктивна потужність систем допомоги в автоматизації міркувань може змінюватися залежно від вимог, що виставляються користувачем. Тому можна вважати, що назва таких систем коливається між системами верифікації доведень та системами пошуку доведень (хоча цей розподіл і є умовним). Перші приймають на вхід тільки кроки доведення, що мають вигляд застосувань правил виведення, і, отже, повинні бути деталізовані з точністю до правил виведення. Mizar є прикладом такої системи, хоча сам набір її правил виведення досить великий.

Системи пошуку доведень містять методи пошуку виведення і/або планувальники доведень і намагаються заповнити "відсутні" місця доведення. Системи SAD, Mizar і Theorema є представниками систем такого роду.

Тактико-керовані системи типу Isabelle та Coq звичайно мають вичерпні (для проведення доведень) набори тактик, так що їхня "дедуктивна потужність" може і не мати принципового значення. І в цьому зв'язку вони можуть розглядатися як системи пошуку доведень. Однак, деякі експерименти з Isabelle і Coq показують, що наступне твердження може виявитися критичним для них: "При всякій спробі "одразу ж" довести теорему "діалог" про побудову доведення відразу стає складним, сильно гіллястим і таким, що важко відслідковується без попереднього виділення лем, без застосування спеціальних тактик і без використання існуючих бібліотек."

5. Продемонструємо переваги і особливості інформаційного підходу на прикладі системи SAD.

Мовні засоби системи SAD. Розроблена англійська версія формальної мови, що має назву ForTheL (FORmal THEory Language) [11], що представляє собою формалізовану підмножину англійської мови.

З синтаксичної токи зору усякий ForTheL-текст являє собою набір розділів. Усякий розділ може містити у собі фрази та розділи більш низького рівня. Певні розділи, наприклад, теореми, докази і означення, грають ту особу роль в ForTheL-текстах, яка є присутній у звичайних математичних текстах.

Мова ForTheL містить у собі мову першого порядку як власну підмножину. Ця властивість

дозволяє представляти усякі формули логіки першого порядку у вигляді ForTheL-фраз. ForTheL також містить так звані концепції та допускає дослідівне написання мовних одиниць.

Концепція є аналог терму мови першого порядку, що допускає розглядання множини об'єктів як його значення.

Дієслівне написання у мові ForTheL дає можливість конструювати ForTheL-фрази, використовуючи підмети, предикати, об'єкти та атрибути.

Логічні зв'язки разом з предикатами та концепціями являють собою неподільні одиниці мови ForTheL. Інші синтаксичні одиниці можуть буту введені через означення.

Далі дається приклад замкнутого ForTheL-тексту з теорії множин.

Definition. Let S be a set. A subset of S is a set X such that every element of X is in S .

Definition. Let S be a set. S is empty iff S has no elements.

There exists an empty set.

Proposition. Let S be a set. S is a subset of every set iff S is empty.

Пошук логічних висновків в системі SAD. Як говорилося раніше, логічні методи САД базуються на секвенціальному формалізмі, що дозволяє конструювати логічні методи, які здійснюють пошук доведень у сигнатурі початкової теорії (див., наприклад, [12]). Цей вибір пояснюється тим фактом, що секвенціальні виведення мають вигляд "природних" доведень більш, чим виведення, які отримані, наприклад, резолюційною технікою. Ця властивість секвенційного формалізму стає важливою, коли передбачається взаємодія людини з комп'ютером, а також при використанні інтерактивного режиму обробки даних, що містяться в інформаційному середовищі.

Інформаційне середовище системи SAD. У поточний час розробниками SAD розрізняються три види інформаційного середовища (ІС) системи SAD, що можуть бути використані для представлення й обробки математичних знань: зовнішнє, резидентне і внутрішнє.

Зовнішнє ІС представляє собою розподілені віртуальні дані, які існують у вигляді сучасних комп'ютерних математичних служб. Доступ до неї може здійснюється, наприклад, через інтелектуального Internet-агента або через звичайні канали зв'язку. Вона використовується для пошуку відповідей на запитання в зовнішньому світі, використовуючи вже існуючі засоби отримання відповідей та добування математичних знань.

Резидентна ІС містить усю сукупність математичних знань, що накопичуються, про предметні області, у яких працював і/або працює SAD. Вона представляє собою сукупність ієрархічно упорядкованих "страт" з онтологічними зв'язками [13]. Страти формуються в процесі еволюційного розвитку SAD і повинні використовуватися як для видачі відповідей (з різними рівнями деталізації) на математичні питання з "зовнішнього" світу, так і для створення різних середовищ доведення SAD, що відбивають поточні дедуктивні можливості SAD щодо розв'язуваної задачі і які можуть бути реалізовані в комп'ютері.

Основна функція внутрішнього ІС - це формування і підтримка динамічного середовища доведення для процедур пошуку логічного висновків в системі SAD, зокрема, апарата розкриття визначень та пошуку допоміжних тверджень. ІІ інформаційною базою служить резидентна ІС.

Інтерфейсні засоби системи SAD. Розробка секвенційного формалізму на базі ForTheL1-модифікації з урахуванням перелічених вище принципів система САД дозволяє будувати методи пошуку доведення в рамках сигнатури вихідної теорії. Це, у свою чергу, дає можливість генерувати достатні твердження й одержувати наслідки в досить звичному для людини вигляді, що може послужити відправною точкою для створення дуже гнучких інтерфейсних засобів. У даний час користувач системи SAD має можливість задавати різні рівні логічної обробки формальних текстів.

Виходячи зі всього, що сказано вище, можна сказати, що подальший розвиток засобів обробки логіко-математичних знань є орієнтованим на одночасне проведення досліджень у напрямку розробки формалізованих мов для запису математичних текстів у найсприятливішій для користувача формі, у напрямку еволюційного розвитку поняття машинного кроку доведення, у напрямку створення інформаційного середовища, яке впливає на очевидність машинного кроку доведення, і в напрямку побудови засобів інтерактивної обробки математичних текстів.

Проведене дослідження демонструє, що сучасний етап розвитку систем ОЛМЗ характеризується підвищеною увагою к інтегруванню різноманітних підходів, вимог і стилів подання необхідної інформації. Таки системи можуть бути корисними у багатьох важливих прикладних галузях, таких як: пошук доведень у різних математичних теоріях,

автоматизація міркувань, верифікація програм та апаратури, пошук логічних висновків з урахуванням певних умов або вимог (так званих constraints), дистанційне навчання, перевірка коректності математичних текстів, здобування знань з математичних статей, побудова баз знань для математичних теорій.

Список використаних джерел

1. Konstantin Verchinine, Alexander V. Lyaletski, Andrey Paskevich, Anatoly Anisimov. On Correctness of Mathematical Texts from a Logical and Practical Point of View // Lecture Notes in Computer Science (Intelligent Computer Mathematics: AISC/MKM/Calculemus 2008).— Springer, Berlin / Heidelberg.— 2008.— Volume 5144.— P. 583-598.
2. <http://www.cl.cam.ac.uk/research/hvg/isabelle>
3. <http://coq.inria.fr/>
4. <http://www.cs.ru.nl/~freek/aut/>
5. <http://www.risc.jku.at/research/theorema/>
6. <http://dream.inf.ed.ac.uk/software/lambda-clam/>
7. <http://mizar.org/>
8. <http://nevidal.org/>
9. Анисимов А., Джебелян Е., Лялешкий А., Попов Н. Системи Theorema и САД: сравнительный анализ // Управляющие системы и машины".— 2011.— No.4.— С. 59-63.
10. <http://isabelle.in.tum.de/Isar/>
11. Vershinin K., Paskevich F. ForTheL - the Language of Formal Theories. // II Information Theories and Applications. - 2000. - V. 73. - P. 121-127.
12. Degtyarev A., Lyaletski A., Morokhovets M. Evidence Algorithm and Sequent Logical Inference Search. // Lecture Notes in Artificial Intelligence. - 1999. - V. 1705. - P. 44-61.
13. Paskevich, A., Verchinine, K., Lyaletski, A., and Anisimov, A. Reasoning inside a formula and ontological correctness of a formal mathematical text // Calculemus/MKM 2007. - Work in Progress (Hagenberg, Austria, June 2007). - No. 07-06 in RISC-Linz Report Series, Austria. - 2007. - P. 77-91.

Надійшла до редколегії 29.10.2011

УДК 510.649

Лялецький О.О., м.н.с.

**Про можливість побудови моделей не
типізованої теорії λ на базі поняття
(θ)-неперервності функцій**

Стаття присвячена дослідженню щодо
можливості побудови, за допомогою методу
Койманса, λ -моделей на базі поняття
(θ)-неперервності функцій.

Ключові слова: неперервна функція, λ -модель,
декартово замкнена категорія.

Lyaletsky A.A., researcher

**On possibility of construction a model for
the untyped theory λ by means of the notion
of a (θ)-continuity of a function**

The paper is devoted to investigations on what
concerns a possibility of construction, with the help
of the K.Koymans method, of a λ -model on the base
of a notion of (θ)-continuity of a function.

Key Words: continuous function, λ -model,
Cartesian closed category.

E-mail: forola@ma.ru

Статтю представив чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф. В.Анісімов

В 1968 р. Д.Скотт [1,2] побудував перші
нетривіальні несинтаксичні моделі нетипізованої
теорії λ . Центральне місце в його побудові
займає наступний результат. Кожну повну
решітку L можна вкласти в таку повну решітку
 \bar{L} , що $\bar{L} \cong [\bar{L} \rightarrow \bar{L}]_T$, де $[\bar{L} \rightarrow \bar{L}]_T$ позначає
повну решітку, яка складається з поточною
впорядкованої множини всіх унарних операцій
на \bar{L} , що є неперервними відносно топології T ,
причому T однозначно визначається за стру-
ктурую \bar{L} .

Пізніше на базі, зокрема, й інших ідей, було
побудовано інші несинтаксичні λ -моделі, але – як
це виявилось пізніше – ці інші λ -моделі також
можна побудувати за допомогою тих самих
конструкцій, які запропонував Д.Скотт. Тому й
на поточний час λ -моделі Д.Скотта розгля-
даються в якості "канонічних" несинтаксичних
 λ -моделей.

В 1983 р. К.Койманс, використовуючи апарат
теорії категорій, в явному вигляді інкапсулював
конструкції, запропоновані Д.Скоттом, та
створив свій загальний метод побудови λ -алгебр
і λ -моделей [2,3]. Згідно з його методом, кожна
(мала) декартово замкнена категорія з так званим
рефлексивним об'єктом U природним чином
індукує відповідну λ -алгебру, причому ця
 λ -алгебра в тому і тільки тому раз є λ -моделлю,
коли цей рефлексивний об'єкт U має достатньо
багато точок. Більш того, К.Койманс довів
універсальність свого методу, тобто що з
точністю о ізоморфізму кожному λ -алгебру (а

тому й кожному λ -модель) можна отримати, за
своїм методом, з відповідної декартово замкненої
категорії з рефлексивним об'єктом.

В 1980-х рр. Ф.Хонзеллом, Е.Енгелером,
Д.Скоттом та іншими за допомогою різних
методів був отриманий результат, що кожний
групоїд можна вкласти в (екстенсіональну)
 λ -модель [2]. Отже, клас всіх λ -моделей можна
бачити як такий, що є дуже "широким" та
"різноманітним".

Топологічні простори на повних решітках, які
використав Д.Скотт при побудові своїх
 λ -моделей, є дуже екзотичними з точки зору
"класичної" топології: зокрема, в невідроджених
випадах вони не задовольняють навіть аксіомі
відокремлення T_1 , рівно як й жодній з умов типу
компактності. З викладеного вище випливає, що
можна обґрунтовано сподіватись побудувати за
методом К.Койманса нетривіальні λ -моделі на
базі інших понять неперервності функцій.

Але для побудови λ -моделей на базі деякого
поняття неперервності функцій більш зручною є
не загальне теоретико-категорне формулювання,
а його спеціальна теоретико-множинна версія.
Вона базується на напів-формальному понятті
"теоретико-множинної структури" (з "носієм") і
має наступний вигляд.

Нехай задано деякий клас K теоретико-
множинних структур та поняття P неперервності
функцій, які задовольняють умовам:

- i) K містить хоча б одну одноелементну
структуру;
- ii) K є замкненим відносно скінчених прямих
добуток;

© О.О.Лялецький, 2011

iii) P співставляє кожній парі A_0, A_1 K -структур нову K -структуру $[A_0 \rightarrow A_1]_P \subseteq A_1^{A_0}$, яка складається з деяких P -неперервних функцій; причому виконуються такі властивості:

I) композиція двох P -неперервних функцій є неперервною функцією;

II) якщо функція $f: A_0 \times A_1 \rightarrow B$ є P -неперервною за кожним аргументом, то вона є P -неперервною за обома аргументами;

III) проєкції $p_0: A_0 \times A_1 \rightarrow A_0$ і $p_1: A_0 \times A_1 \rightarrow A_1$ є P -неперервними;

IV) аплікація $\alpha_A: [A_0 \rightarrow A_1]_P \times A_0 \rightarrow A_1$ є P -неперервною функцією для кожних $A_0, A_1 \in K$;

V) K містить рефлексивну структуру M , тобто існують такі два P -неперервних відображення $\varphi: [M \rightarrow M]_P \rightarrow M$ та $\psi: M \rightarrow [M \rightarrow M]_P$, що $\varphi \circ \psi = id_{[M \rightarrow M]_P}$, де $id_{[M \rightarrow M]_P}$ – тотожне відображення на $[M \rightarrow M]_P$.

Тоді за цим поняттям P неперервності функцій на M можна встановити структуру λ -моделі.

Зауважимо, що умови i)-iii) разом з I)-IV) фактично гарантують, що категорія, об'єктами якої є K -структури, а морфізмами – P -неперервні функції, є декартово замкнутою; умова ж V) постулює існування рефлексивного об'єкту цієї категорії. Щодо умови про те, що рефлексивний об'єкт M має містити достатньо багато точок, то вона виконується автоматично, оскільки їй задовольняє кожний об'єкт будь-якої конкретної (тобто "теоретико-множинної") категорії.

Автор поставив за мету побудувати λ -моделі за методом К.Койманса на базі такого поняття неперервності функцій, яке на дійсній прямій \mathbb{R} є еквівалентним загальноприйнятому поняттю неперервності дійсної операції. Слід відмітити, що, оскільки звичайне поняття неперервності дійсної операції не задовольняє умові II), можна розраховувати, в найкращому разі, знайти таке поняття неперервності функцій, яке є еквівалентним звичайному поняттю неперервності для операцій вигляду $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, але для операцій вигляду $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, де $n > 1$, – ні.

Намагаючись знайти саме таке поняття неперервності функцій, в [4] було запропоновано оригінальне поняття (θ) -збіжності спрямованості, яку задано на біповній ч.у.м. Це поняття збіжності природно індукує поняття (θ) -неперервності функцій, яка діє на біповних

ч.у.м. Для унарних операцій на розширеній дійсній прямій $\overline{\mathbb{R}}$ це поняття (θ) -неперервності такі є еквівалентним звичайному поняттю неперервності функції. Там же, в [4], було доведено, що поняття (θ) -неперервності задовольняє умовам I)-III). З іншого боку, умова iii) виконується не завжди: в багатьох випадках, якщо A_0, A_1 є біповними ч.у.м., то $[A_0 \rightarrow A_1]_{(\theta)}$ не є біповною відносно поточкового впорядкування функцій; зокрема, біповною не є множина функцій $[\overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}]_{(\theta)}$.

Для того, щоб знайти вихід з цієї ситуації, автор пропонує розширити поняття (θ) -неперервності на функції, які діють на довільних (не обов'язково повних) решітках, за допомогою наступного прийому. За теоремою Макнейла, кожну частково впорядковану множину A (зокрема, решітку) можна ізоморфно вкласти в так зване її поповнення за Макнейлом – повну решітку \bar{A} , яка містить A та задовольняє наступним двом властивостям: по-перше, \bar{A} зберігає існуючі точні верхні та нижні границі; по-друге, для кожного елемента $x \in \bar{A}$ існують множини $A_0, A_1 \subseteq A$, для яких $x = \sup A_0 = \inf A_1$ в \bar{A} . Використовуючи другу властивість, можна кожній функції $f: A_0 \rightarrow A_1$, де A_0, A_1 – довільні решітки, співставити всюди визначене на \bar{A}_0 бінарне відношення $\bar{f} \subseteq \bar{A}_0 \times \bar{A}_1$; тоді з першої властивості буде випливати, що $f \subseteq \bar{f}$. Отже, ми можемо вважати, що f в тому і тільки тому разі є (θ) -неперервною, якщо бінарне відношення \bar{f} є функціональним та \bar{f} , яке розглядається як функція $\bar{f}: \bar{A}_0 \rightarrow \bar{A}_1$, є (θ) -неперервною.

Список використаних джерел

1. Scott D. Models for the λ -calculus (manuscript) // 1969.–53 p.
2. Барендрегт Х. Лямбда-исчисление. Его синтаксис и семантика (русский перевод) / М.: Мир, 1981.–606 с.
3. Koymans K. Models of the lambda calculus // Information & Control.–1982.–52.–P.306-332.
4. Лялецкий О.О. Базові властивості (θ) -неперервних функцій, які діють на біповних частково впорядкованих множинах // Вісник КНУ.–2011.–3.–С.187-192.

Надійшла до редколегії 09.11.11

Мічута О.Р., аспірант, Власюк А.П., д.т.н.,
професор, Мартинюк П.М., к.ф.-м.н., доцент.

Математичне моделювання впливу хімічної суфозії на фільтраційну консолідацію засоленних ґрунтів в неізотермічних умовах в двовимірному випадку

Вдосконалено математичну модель
консолідації ґрунтів з урахуванням їх
засоленості та неізотермічних умов.
Використано кінематичну граничну умову на
верхній рухомій межі масиву засоленого ґрунту
з урахуванням хімічної суфозії. Чисельний
розв'язок відповідної двовимірної крайової
задачі знайдено безсітковим методом
радіальних базисних функцій. Проведено ряд
чисельних експериментів. Досліджено вплив
хімічної суфозії на розподіл надлишкових
напорів в засоленому масиві ґрунту та на
просідання верхньої межі ґрунту в
неізотермічних умовах.

Ключові слова: консолидація, хімічна суфозія,
неізотермічні умови, безсітковий метод
радіальних базисних функцій.

*E-mail: michuta@ukr.net

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ. Основна мета досліджень задачі
фільтраційної консолидації полягає у
прогнозуванні просідання верхньої межі ґрунту
під впливом прикладеного зовнішнього
навантаження або його (ґрунту) власної ваги.
Основи класичної теорії фільтраційної
консолідації ґрунтів викладено в роботах [16, 9].
В роботі [5] вперше звернули увагу на
можливість значного впливу переносу солей на
розподіл надлишкових напорів в масиві ґрунту,
який консолидується. В роботах [6, 8] дані
дослідження набули подальшого розвитку. Крім
того, було враховано вплив неізотермічних умов.
В роботах [1, 2] досліджено консолидацію ґрунтів
в умовах солепереносу з урахуванням
релаксацийних ефектів.

Засоленість ґрунту ускладнює процес
будівництва, оскільки деформації споруд можуть
проявлятися як в процесі зведення будівель, так і
при їх експлуатації [11, 12, 15]. Це пояснюється,
тим що засолені ґрунти володіють специфічними

O.R. Michuta, PhD student, A.P. Vlasyuk,
Doctor of science, prof., P.M. Martyniuk, PhD,
assoc. prof.

Mathematical modeling of filtration consolidation and chemical erosion of saline soils in nonisothermal conditions in two- dimensional case

Mathematical model of consolidation of saline
soil in nonisothermal conditions has been improved.
Kinematic boundary condition for moving the top of
the array of saline soils including chemical erosion
has been used. The numerical solution of
corresponding two-dimensional boundary value
problems has been found by radial basis functions
method. The influence of chemical erosion on the
excess heads in array of saline soil in
nonisothermal conditions was explored.

Key words: consolidation, chemical erosion, non-
isothermal conditions, meshless method of radial
basis functions.

фізико-хімічними властивостями, які змінюються
в результаті зволоження, в процесі
вилугування солей та при зміні теплового
стану.

Якщо засолений ґрунт перебуває в стані
фільтраційної консолидації, то просідання ґрунту
можливе не лише за рахунок розсіювання
надлишкових напорів, але і за рахунок
розчинення солей. В роботах [6, 8] побудовано
математичні моделі консолидації ґрунтів в умовах
впливу тепло-солепереносу. Однак впливу
хімічної суфозії в цих роботах не враховано. Це і
є ціллю даної статті.

**Математична модель процесу
фільтраційної консолидації.** Враховуючи
результати робіт [6-8], математичну модель
двовимірної задачі фільтраційної консолидації
засоленого ґрунту з урахуванням хімічної суфозії
в неізотермічних умовах під впливом
прикладеного зовнішнього навантаження
інтенсивністю $q(x)$ (рис. 1) можна описати
наступною крайовою задачею:

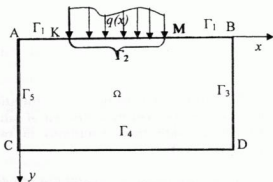


Рис. 1. Фільтраційна консолідація засоленого масиву ґрунту в двовимірному випадку

$$\frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a} \times \\ \times \nabla \cdot [(K_h(\bar{n}, T, N) \nabla h - K_c(c) \nabla c - K_T \nabla T] + (1) \\ + \frac{\varepsilon(1+e)(1+\xi)}{2\gamma \rho_s a} \left(\frac{\partial(n\bar{n})}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right) = \frac{\partial h}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot (D \nabla c) + \nabla \cdot (D_T \nabla T) - (u, \nabla c) = n \frac{\partial \bar{n}}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho_c (u, \nabla T) = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_m (C_m - c) N^\alpha, \quad (4)$$

$$u = -K_h(c, T, N) \nabla h + K_c(c) \nabla c + K_T \nabla T, \quad (5)$$

$$h(x, y, 0) = H_0(x, y), \quad c(x, y, 0) = C_0(x, y),$$

$$T(x, y, 0) = T_0(x, y), \quad N(x, y, 0) = N_0(x, y), \quad (6)$$

$$(u, n)|_{\Gamma_2} = (u, n)|_{\Gamma_4} = 0, \quad h(x, y, t)|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_5} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial c}{\partial y}|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_4} = 0, \quad c(x, y, t)|_{\Gamma_2} = C_1, \quad \frac{\partial c}{\partial x}|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_5} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_5} = \frac{\partial T}{\partial y}|_{\Gamma_4} = 0, \quad (9)$$

$$T(x, y, t)|_{\Gamma_2} = T_1, \quad T(x, y, t)|_{\Gamma_1} = T_2,$$

$$\frac{dl(t)}{dt} = - \int_{l(t)}^1 \frac{1}{(\rho_s - (1+e)N)(1+e)} \times \\ \times \left(\frac{2\gamma \rho_s a}{1+\xi} \frac{\partial h(x, z, t)}{\partial t} - \gamma_m (1+e) \times \right. \\ \left. \times (C_m - c(x, z, t)) N^\alpha(x, z, t) \right) dz, \quad (10)$$

$$\text{де } \bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma, \quad \Gamma = \bigcup_{i=1}^5 \Gamma_i, \quad \bigcap_{i=1}^5 \Gamma_i = \emptyset, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$t \in (0; t_0]$. Тут використані такі позначення: h – надлишковий напір; c – концентрація солей в рідкій фазі; N – концентрація солей у твердій

фазі; T – температура; n – пористість ґрунту; e – коефіцієнт пористості; ρ_s – густина солей у твердій фазі; c_p – питома теплоємність порового розчину, c_T – об'ємна теплоємність ґрунту, C_m – концентрація граничного насичення в рідкій фазі; γ_m – коефіцієнт швидкості масобміну; $K_h(c, T, N) = \{k_{hj}(c, T, N)\}$, $i, j = 1, 2$ – коефіцієнт (тензор) фільтрації; $K_c(c) = \{k_{cj}(c)\}$, $i, j = 1, 2$ – коефіцієнт (тензор) хімічного осмосу; $K_T = \{k_{Tj}\}$, $i, j = 1, 2$ – коефіцієнт (тензор) термічного осмосу; $D = \{D_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$ – коефіцієнт (тензор) хімічної дифузії; $D_T = \{(D_T)_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$ – коефіцієнт (тензор) термодифузії; $\lambda = \{\lambda_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$ – коефіцієнт (тензор) теплопровідності; $u = (u_1, u_2)$ – вектор швидкості фільтрації соляового розчину; α – коефіцієнт засолення, що залежить від характеру засолення солей у твердій фазі. Для об'ємного засолення ґрунту, при якому солі у вигляді кристаліків дискретно розсіяні в об'ємі ґрунту, $\alpha = 1/2$. При $\alpha = 0$ маємо плівкове, поверхнєве засолення [3]. Параметр ε набуває значення 0, якщо наявність солей не враховується і 1 якщо наявність солей враховується. [6].

Оскільки швидкість руху твердих частинок ґрунту значно менша за швидкість фільтрації, то в узагальненому законі Дарсі-Герсеванова (5) знехтувано швидкістю руху твердої фази ґрунту.

Чисельне розв'язання крайової задачі. Чисельний розв'язок крайової задачі (1)–(10) знайдено методом радіальних базисних функцій [8, 18, 19]. Для цього покрито замикання $\bar{\Omega}$ області вузловими точками (x_j, y_j) , $j = \overline{1, z}$.

Наближені розв'язки крайової задачі (1)–(10) шукаємо у вигляді

$$h(x, y, t) \approx h_n(x, y, t) = \sum_{j=1}^z h_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_h), \quad (11)$$

$$c(x, y, t) \approx c_n(x, y, t) = \sum_{j=1}^z c_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_c), \quad (12)$$

$$T(x, y, t) \approx T_n(x, y, t) = \sum_{j=1}^z T_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_T), \quad (13)$$

$$N(x, y, t) \approx N_n(x, y, t) = \sum_{j=1}^z N_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_N), \quad (14)$$

де $\varepsilon_h > 0$, $\varepsilon_c > 0$, $\varepsilon_T > 0$, $\varepsilon_N > 0$ – параметри форми; $\varphi_j(r_j, \varepsilon)$ – радіальні базисні

функцій; $h_j(t), c_j(t), N_j(t), T_j(t)$ – невідомі коефіцієнти, які залежать від часу;

$$r_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}, \quad j = \overline{1, z}.$$

Покриємо замикання області $\overline{\Omega}$ колокаційними точками (x_i, y_i) , $i = \overline{1, s}$, де s^Ω – множина номерів точок, які лежать в області Ω ; s^{Γ_j} – множина номерів точок, які лежать на відповідних частинах Γ_j , $j = \overline{1, 5}$, межі Γ ,

$$s = \bigcup_{j=1}^5 s^{\Gamma_j} \cup s^\Omega. \quad \text{Введемо позначення}$$

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \quad j = \overline{1, z}, i = \overline{1, s}, s \geq z.$$

Підставляючи (11)–(14) в рівняння (1)–(4), початкові умови (6) та граничні умови (7)–(9), і використовуємо метод колокації в точці [4], отримаємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно векторів невідомих $H(t) = \{h_j(t)\}_{j=1}^z$, $C(t) = \{c_j(t)\}_{j=1}^z$,

$$N(t) = \{N_j(t)\}_{j=1}^z, \quad T(t) = \{T_j(t)\}_{j=1}^z:$$

$$M^{(1)} \frac{dH(t)}{dt} + L^{(1)}(C(t), N(t), T(t))H(t) =$$

$$= K^{(1)} \frac{dN(t)}{dt} + S^{(1)} \frac{dC(t)}{dt} + S^{(1)}C(t) + R^{(1)}T(t) + F^{(1)}, \quad (15)$$

$$M^{(2)} \frac{dC(t)}{dt} + L^{(2)}(C(t), N(t), T(t))C(t) =$$

$$= K^{(2)} \frac{dN(t)}{dt} + R^{(2)}T(t) + F^{(2)}, \quad (16)$$

$$M^{(3)} \frac{dT(t)}{dt} + L^{(3)}(C(t), N(t), T(t))T(t) = F^{(3)}, \quad (17)$$

$$M^{(4)} \frac{dN(t)}{dt} = L^{(4)}(C(t), N(t)), \quad (18)$$

$$\tilde{M}^{(1)} H_0(t) = \tilde{F}^{(1)}, \quad \tilde{M}^{(2)} C_0(t) = \tilde{F}^{(2)}, \quad (19)$$

$$\tilde{M}^{(3)} T_0(t) = \tilde{F}^{(3)}, \quad \tilde{M}^{(4)} N_0(t) = \tilde{F}^{(4)},$$

де

$$M^{(k)} = \{m_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^z, \quad \tilde{M}^{(k)} = \{\tilde{m}_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^z,$$

$$\tilde{F}^{(k)} = \{\tilde{f}_i^{(k)}\}_{i=1}^z, \quad L^{(k)} = \{l_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^z, \quad k = \overline{1, 4};$$

$$S^{(1)} = \{s_{ij}^{(1)}\}_{i=1, j=1}^z, \quad S^{(1)} = \{s_{ij}^{(1)}\}_{i=1, j=1}^z,$$

$$R^{(k)} = \{r_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^z, \quad K^{(k)} = \{k_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^z,$$

$$k = 1, 2; \quad F^{(k)} = \{f_i^{(k)}\}_{i=1}^z, \quad k = \overline{1, 3};$$

$$m_{ij}^{(1)} = -\varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_h), \quad m_{ij}^{(2)} = -n\varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_c),$$

$$m_{ij}^{(3)} = -\tilde{n}_T \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), \quad i \in s^\Omega;$$

$$m_{ij}^{(4)} = \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_N), \quad i = \overline{1, s},$$

$$k_{ij}^{(1)} = \frac{\varepsilon e(1 + e)(1 + \xi)}{2\gamma \rho_s a} \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_N),$$

$$k_{ij}^{(2)} = \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_N), \quad i \in s^\Omega;$$

$$l_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{(1 + e)(1 + \xi)}{2\gamma a} \nabla \cdot (K_h(c, N, T) \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_h)), & i \in s^\Omega, \\ K_h(c, T, N) \frac{\partial \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_h)}{\partial y}, & i \in s^{\Gamma_2} \cup s^{\Gamma_4}, \\ \frac{\partial \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_h)}{\partial x}, & i \in s^{\Gamma_3} \cup s^{\Gamma_5}, \\ \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_h), & i \in s^{\Gamma_1}; \end{cases}$$

$$\nabla \cdot (D \nabla \cdot \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_c)) - (u, \nabla \cdot \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_c)), \quad i \in s^\Omega,$$

$$\varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_c), \quad i \in s^{\Gamma_2},$$

$$l_{ij}^{(2)} = \begin{cases} \frac{\partial \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_c)}{\partial y}, & i \in s^{\Gamma_1} \cup s^{\Gamma_4}, \\ \frac{\partial \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_c)}{\partial x}, & i \in s^{\Gamma_3} \cup s^{\Gamma_5}; \end{cases}$$

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla \cdot \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)) - \rho \tilde{n}_a (u, \nabla \cdot \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)), \quad i \in s^\Omega,$$

$$\varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), \quad i \in s^{\Gamma_1} \cup s^{\Gamma_2},$$

$$l_{ij}^{(3)} = \begin{cases} \frac{\partial \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)}{\partial y}, & i \in s^{\Gamma_4}, \\ \frac{\partial \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)}{\partial x}, & i \in s^{\Gamma_3} \cup s^{\Gamma_5}; \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(4)} = \gamma_m \left(\sum_{j=1}^z C_j(t) \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_c) - C_m \right) \times$$

$$\times \left(\sum_{j=1}^z N_j(t) \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_N) \right), \quad i = \overline{1, s};$$

$$s_{ij}^{(1)} = -\frac{\varepsilon n(1 + e)(1 + \xi)}{2\gamma \rho_s a} \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_c), \quad i \in s^\Omega,$$

$$f_i^{(2)} = C_1, \quad i \in s^{\Gamma_2}; \quad f_i^{(3)} = \begin{cases} T_1, & i \in s^{\Gamma_2}, \\ T_2, & i \in s^{\Gamma_1}; \end{cases}$$

$$s_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{(1 + e)(1 + \xi)}{2\gamma a} \nabla \cdot (K_c(c) \nabla \cdot \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)), & i \in s^\Omega, \\ K_c(c) \frac{\partial \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_c)}{\partial x}, & i \in s^{\Gamma_2} \cup s^{\Gamma_4}; \end{cases}$$

$$r_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{(1 + e)(1 + \xi)}{2\gamma a} \nabla (K_T \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)), & i \in s^\Omega, \\ K_T \frac{\partial \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)}{\partial x}, & i \in s^{\Gamma_2} \cup s^{\Gamma_4}; \end{cases}$$

$$r_{ij}^{(2)} = \nabla \cdot (D_T \nabla \cdot \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)), \quad i \in s^\Omega;$$

$$\begin{aligned}\tilde{f}_i^{(1)} &= H_0(x, y, t), \quad \tilde{f}_i^{(2)} = C_0(x, y, t) \\ \tilde{f}_i^{(3)} &= T_0(x, y, t), \quad \tilde{f}_i^{(4)} = N_0(x, y, t) \\ i &= \overline{1, s}, \quad j = \overline{1, z}.\end{aligned}$$

Відмітимо наступне. Якщо при деякому набору індексів коефіцієнт будь-якої матриці в задачі Коші (15)–(19) згідно вищенаведених формул не визначений, то він покладається рівним нулю. Для дискретизації рівнянь (15)–(17) по часу можна використати лінеаризовану повністю неявну різницеву схему [6, 8].

Для дискретизації системи нелінійних диференціальних рівнянь (18) в часі використаємо метод Ньютона [13]

$$\begin{aligned}M^{(k)} \frac{N^{(k+1)} - N^{(k)}}{\tau} &= \alpha L^{(k)}(C^{(k)}, N^{a-1}(t_k)) \times \\ &\times (N^{(k+1)}(t) - N^{(k)}(t)) + L^{(k)}(C^{(k)}, N^a(t_k)).\end{aligned}$$

Оскільки за умовою кількість колокаційних точок є більшою за кількість вузлових точок, то отримана після дискретизації задачі Коші (15)–(19) СЛАР є перевизначеною. Для її розв'язання можна використати метод найменших квадратів [10].

В процесі консолідації розміри області Ω змінюються. Тому на кожному часовому шарі необхідно перераховувати координати вузлових та колокаційних точок. Для цього використаємо кінематичну умову (10), згідно якої маємо

$$\begin{aligned}&\frac{y^{(k+1)} - y^{(k)}}{\tau} = \\ &= - \int_{y^{(k)}}^l \left(\frac{1}{\rho_s - (1+e) \sum_{j=1}^z N_j^{(k+1)} \varphi_j(r_j, \varepsilon_N)} \right) \times \\ &\times \left(2\gamma \rho_s a \left(\sum_{j=1}^z \frac{H_j^{(k+1)} - H_j^{(k)}}{\tau} \varphi_j(r_j, \varepsilon_N) \right) - \right. \\ &\left. - \gamma_m (1+e) \left(C_m - \sum_{j=1}^z C_j^{(k+1)} \varphi_j(r_j, \varepsilon_N) \right) \right) \times \\ &\times \left(\sum_{j=1}^z N_j^{(k+1)} \varphi_j(r_j, \varepsilon_N) \right)^\alpha dm,\end{aligned}$$

де τ - крок по часу; $(x, y^{(k)})$ - координати деякої точки області консолідації при $t = t^{(k)}$, $(x, y^{(k+1)})$ - координати даної точки на наступному часовому шарі. Змінна інтегрування m пробігає вертикальний відрізок від початкового положення точки $y^{(k)}$ до нижньої межі $y = l$ масиву ґрунту.

Початковий розподіл надлишкових напорів $h_0(x, y)$ залежить від властивостей ґрунту, а також від зовнішнього навантаження. Нехай маємо довільний закон розподілу навантаження $q(x)$. Початкове значення надлишкового напору для точки, що лежить в області прикладання навантаження, визначаємо за формулою [9]

$$h_0(x, y) = \frac{q(x)}{\gamma} + h_p,$$

де h_p - значення напору в точці (x, y) до прикладання навантаження.

Для довільної точки $X = (x, y)$ області консолідації Ω , що не належить до області прикладання навантаження, значення надлишкових напорів у початковий момент часу визначаємо за формулою [9]

$$h_0(X) = \frac{\Theta(X)}{2\gamma},$$

де $\Theta(X)$ - сума головних напружень у точці X і

$$\Theta(X) = \int_{l_1}^{l_2} \frac{2q(\xi)}{\pi} \frac{y}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}} d\xi,$$

$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}$; $[l_1; l_2]$ - відрізок прикладання навантаження.

Результати чисельних експериментів. Розглянемо двохвимірну задачу фільтраційної консолідації шару заселеного глинистого ґрунту прямокутної форми довжиною $l = 2l$ м, товщиною $b = 10$ м з такими вхідними даними:

$$n = 0.4, \quad e = 0.7, \quad \alpha = 0.5, \quad a = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с},$$

$$\rho_s = 2000 \text{ кг/м}^3, \quad C_m = 350 \text{ кПа/м},$$

$$D_{11} = D_{22} = 0.02 \text{ м}^2/\text{доба},$$

$$D_{12} = D_{21} = 0 \text{ м}^2/\text{доба}, \quad \gamma = 10^4 \text{ кПа/м}^3 \cdot \text{доба}^2,$$

$$\gamma_m = 6.5 \cdot 10^{-4} \text{ доба}^{-1},$$

$$K_{\eta 1} = K_{\eta 2} = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/(\text{кПа} \cdot \text{доба}), \quad C_1(t) = C_m,$$

$$\xi = 0.75, \quad T_1(t) = 50^\circ \text{C},$$

$$K_{\epsilon 12} = K_{\epsilon 21} = 0 \text{ м}^3/(\text{кПа} \cdot \text{доба}),$$

$$c_p = 4.2 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{град)},$$

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = 108 \text{ кДж/(м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба)},$$

$$\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0 \text{ кДж/(м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба)},$$

$$c_T = 2137 \text{ кДж/(м}^3 \cdot \text{град)},$$

$$K_{T 11} = K_{T 22} = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/(\text{доба} \cdot \text{град}),$$

$$K_{T 12} = K_{T 21} = 0 \text{ м}^3/(\text{доба} \cdot \text{град}),$$

$$N_0(x) = 240 \left(-\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{x}{l} \right) + 40.$$

$$T_2(t) = 17 + 13 \cos\left(\frac{\pi t}{180}\right), \quad C_0(t) = \begin{cases} C_m, & y = 0, \\ 8 \bar{a} / \bar{e}, & y \neq 0; \end{cases}$$

$$T_0(t) = \begin{cases} T_1, & y = 0, \\ 4^{\circ} C, & y \neq 0. \end{cases}$$

Коефіцієнт фільтрації чистої води покладалася рівним 0,002 і / а і а а а. Значення коефіцієнта фільтрації, який залежить від концентрації солей в рідкій та твердій фазах і температури знаходили за формулою [6, 14]

$K_h(c, N, T) = k_0(c, T) e^{-\gamma_m \frac{N}{C_m}}$. Для апроксимації залежності $k_0(c, T)$ використовувався метод РБФ з експериментальними даними, взятими із монографії [6].

На верхній межі ґрунту на відріжку КМ прикладається зовнішнє навантаження інтенсивністю $q = 20 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^2 \text{ доба}^2$.

Кількість вузлових точок покладалася рівною 121, а колокаційних – 484. Крок по часу $\tau = 30 \text{ діб}$. Кількість часових проміжків 12. Параметр форми становив 1 для всіх невідомих функцій.

При вказаних даних були знайдені значення напору, концентрації солей у твердій та рідкій фазах, температури на кожному часовому проміжку з використанням мультіквадратичної РБФ $\varphi(r) = \sqrt{1 + (r\epsilon)^2}$ і побудовані відповідні графіки (рис. 2–6).

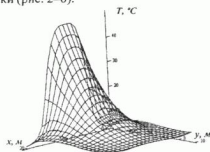


Рис. 2. Розподіл температури ($t = 270 \text{ діб}$, $K_h = K_h(c, N, T)$)

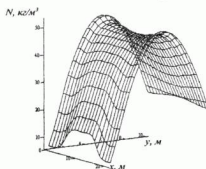


Рис. 3. Розподіл концентрації солей у твердій фазі ($t = 270 \text{ діб}$, $K_h = K_h(c, N, T)$)

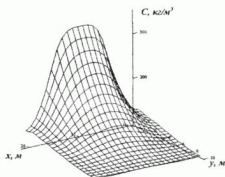


Рис. 4. Розподіл концентрації солей у рідкій фазі ($t = 270 \text{ діб}$, $K_h = K_h(c, N, T)$)

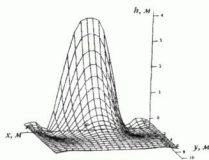


Рис. 5. Розподіл надлишкових напорів ($t = 270 \text{ діб}$, $K_h = K_h(c, N, T)$)

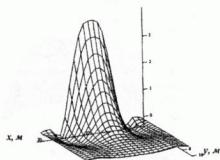


Рис. 6. Різниця розподілів надлишкових напорів засоленого і незасоленого ґрунту при врахуванні просідання ($t = 270$ діб, $K_h = K_h(c, N, T)$)

Таблиця.

Величина максимального просідання верхньої межі ґрунту при $t = 330$ діб

№	Параметри	Величина просідань ґрунту			
		$K_h = K_h(c, N, T)$			$K_h = const$
			за рахунок зміни напорів	за рахунок хімічної суфозії	
1	$\varepsilon = 1$	55 см	39 см	16 см	55,1 см
2	$\varepsilon = 0$	40,6 см	40,6 см	-	40,6 см
3	Ізотермічний режим	50,3 см	34,5 см	15, 8 см	55,1 см

Концентрація солей у рідкій фазі з часом збільшується, а в твердій зменшується (рис 3, 4). В околі верхньої межі (поза областю прикладення навантаження) ґрунт переходить в переувільнений стан (напори стають меншими нуля). Це пояснюється урахуванням явищ хімічного та термічного осмосів. Просідання ґрунту найбільше в області прикладення навантаження.

Порівнюючи розподіл надлишкових напорів при врахуванні факторів просідання та засоленості ґрунту бачимо, що напори розсіюються повільніше, ніж у випадку незасоленого ґрунту (рис. 6). Це пояснюється залежністю $K_h(c, N, T)$. Концентрація солей у рідкій фазі $c(x, y, t)$ стає більшою за 60 г/л і коефіцієнт фільтрації різко зменшується.

Надлишкові напори розсіюються швидше при врахуванні неізотермічних умов на верхній межі і просідання ґрунту є більшим, ніж у випадку ізотермічних умов (див. табл., експерименти №1 та 3, де величини просідань становлять 55 та 50,3 см відповідно).

Величина просідань збільшується при врахуванні цього фактору неізотермічних умов, як при $K_h = K_h(c, N, T)$ так і при $K_h = const$ (див. табл., експерименти №1 та 2, де величини просідання становлять 55 та 40,6 см відповідно). Як видно з експерименту №1 (див. табл.), просідання за рахунок хімічної суфозії становить 29,1% від загального просідання, а за рахунок

зміни надлишкових напорів – 70,9 %. Отже, просідання за рахунок впливу хімічних факторів на засолених ґрунтах є значним і нехтувати їм не можна.

Отже, в процесі фільтраційної консолідації і наявності хімічної суфозії в неізотермічних умовах здійснюється значне вилугування сольового комплексу, яке сприяє порушенню структури та стійкості ґрунту, зменшенню його міцності, внаслідок чого відбувається суфозійне осідання поверхні ґрунту і виникають значні деформації будівель, що розміщені на них.

Висновки. В статті побудовано математичну модель двовимірної задачі фільтраційної консолідації засоленого ґрунту із врахуванням хімічної суфозії в неізотермічних умовах. Чисельний розв'язок відповідної крайової задачі знайдено безсітковим методом, що базується на методі колокацій в точці з використанням якості базисних радіальних функцій. Для відшукування чисельного розв'язку відповідної крайової задачі розроблено алгоритм. Здійснено програмну реалізацію алгоритму. При проведенні та аналізі чисельних експериментів виявлено суттєвий вплив хімічної суфозії на процес просідання ґрунту та на розподіл надлишкових напорів. В подальшому планується дослідження тривимірної задачі консолідації засолених ґрунтів.

Список використаних джерел

1. Булавацький В.М. Системний похід к проблеме математического моделирования процесса фильтрационной консолидации / В.М. Булавацький, В.В. Скопечкий // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – №6. – С. 71-79.
2. Булавацький В.М. Математичне моделювання динаміки консолідаційних процесів з урахуванням релаксаційних ефектів / В.М. Булавацький, В.В. Скопечкий // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – №6. – С. 59-66.
3. Веригин Н.Н. Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород / Н.Н. Веригин, С.В. Васильев, В.С. Саркисян, Б.С. Шержуков. – М.: Недра, 1977. – 271с.
4. Власова Е. А. Приближенные методы математической физики / Е. А. Власова, В. С. Зарубин, Г. Н. Кувыркин // М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. – 700 с.
5. Власюк А. П. Фільтраційна консолідація глинистих ґрунтів при наявності масо переносу солей / А. П. Власюк, О.В. Жеребят'єв // Вісник Укр. держ. акад. водн. госп-ва. – 1998. – Вип.1. Част.1. – С. 40-43.
6. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне: НУВГП, 2008. – 416 с.
7. Власюк А. П. Числові розв'язання одновимірної задачі фільтраційної консолідації засолених ґрунтів в неізотермічному режимі / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк, О. Р. Фурсович // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, № 1. – С. 197-204.
8. Власюк А. П. Чисельне розв'язання задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепломасопереносу методом радіальних базисних функцій / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне: Вид-во НУВГП, 2010. – 277 с.
9. Иванов П. Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. Механика грунтов / П. Л. Иванов. – М.: Высшая школа, 1991. – 447 с.
10. Исаев В.И. Развитие метода коллокаций и наименьших квадратов / В.И. Исаев, В.П. Шапеев // Труды Ин-та математики и механики. – 2008. – Т.14, №1. – С. 41-60.
11. Мустафаев А. А. Расчёт суффозионной осадки сооружений на засоленных грунтах с использованием центробежного моделирования / А. А. Мустафаев // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1984. – № 3. – С. 26-29.
12. Петрухин В. П. Строительные свойства засоленных и загипсованных грунтов / В. П. Петрухин. – М.: Стройиздат, 1980. – 120 с.
13. Самарский А. А. Численные методы математической физики / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Научный мир, 2003. – 316 с.
14. Тугай А. М. Визначення динаміки зміни рівнів води свердловин при їх кольматації сполуками заліза / А. М. Тугай // Вісник Рівненського державного технічного ун-ту. – 2002. – №1(14). – С. 107-115.
15. Ухов С. Б. Механика грунтов, основания и фундаменты / С. Б. Ухов. – М.: АСВ, 1994. – 525 с.
16. Флорин В. А. Основы механики грунтов Т.2. / В. А. Флорин. – М.: Госстройиздат, 1961. – 560 с.
17. Флорин В. А. Теория уплотнения земляных масс. В 2т. Т.2. / В. А. Флорин. – М.: Госстройиздат, 1961. – 544 с.
18. Least – squares collocation meshless method / X. Zhang, X. – H. Liu, K. – Z. Song, M. – W. Lu // Int. J. Numer. Methods Engin. – 2001. – Vol. 51. – Pp. 1089 – 1100.
19. Liu X. Radial point collocation methods for solving convection – diffusion problems / X. Liu // J. Zhejiang Univ. SCIENCE A. – 2006. – Vol. 7(6). – Pp. 1862-1875.

Надійшла до редколегії 06.06.2011

УДК 004.42:510.69

Нікітченко М.С., д. ф.-м. н., проф.,
Шкільняк С.С., д. ф.-м. н., доц.

Першопорядкові композиційно-номінативні логіки

Вивчаються чисті першопорядкові композиційно-номінативні логіки часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних квазіарних предикатів. Описано мови та досліджено семантичні властивості таких логік. Розглянуто різні формалізації відношення логічного наслідку та досліджено їх властивості в різних семантиках.

Ключові слова: композиційно-номінативний підхід, логіка, семантика, логічний наслідок.

E-mail: ttp@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б.

Розширення сфери застосування математичної логіки в інформатиці та програмуванні зумовило створення низки різноманітних логічних систем. В їх основі, як правило, лежить класична логіка предикатів. Водночас така логіка має принципові обмеження, що істотно ускладнює її застосування. Найперше це те, що для програмування характерне використання часткових неоднозначних відображень над складними даними, а класична логіка базується на традиційних математичних структурах однозначних тотальних скінченно-арних відображень. Обмеження класичної логіки предикатів роблять вельми актуальною проблему побудови нових логічних формалізмів на спільній для логіки і програмування основі. Такою природною основою є композиційно-номінативний підхід [1] до побудови моделей програм і орієнтованих на них логік. На його базі розроблено [2] низку різноманітних логічних систем, що знаходяться на різних рівнях абстрактності й загальності. Логіки, збудовані на основі композиційно-номінативного підходу, названо композиційно-номінативними (КНЛ). Передумовою їх виникнення стала необхідність посилення можливостей класичної логіки для розв'язання нових задач інформатики й програмування. КНЛ базуються на загальних класах часткових відображень, заданих на довільних наборах іменованих значень. Такі відображення названо квазіарними.

Метою даної роботи є дослідження семантичних властивостей нових класів КНЛ квазіарних

M.S.Nikitchenko, Doctor of Sciences (Phys.-Math.),
Professor, S.S.Shkiliuk, Doctor of Sciences (Phys.-
Math.), Ass. Professor.

First-order composition-nominative logics

Pure first-order composition-nominative logics of partial single-valued, total multi-valued, and partial multi-valued quasiary predicates are investigated. Languages of such logics are defined and their semantic properties are studied. Various formalizations of logical consequence relation are defined and their properties in different semantics are investigated.

Key words: composition-nominative approach, logic, semantics, logical consequence.

предикатів. В роботі вивчаються чисті першопорядкові КНЛ часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних предикатів. Описано мови і семантичні моделі таких логік, розглянуто різні формалізації відношення логічного наслідку, зокрема, спеціальні X - Y -значені відношення. Досліджено властивості цих відношень в різних семантиках для загального випадку логік квазіарних предикатів, для логік еквітонних і логік антитонних предикатів. На цій основі для розглянутих класів КНЛ планується побудова числень секвенційного типу.

Поняття, які тут не визначаються, будемо тлумачити в сенсі робіт [2, 3].

1. Квазіарні предикати та їх композиції. Мови КНЛ

Під предикатом на множині D розумітимемо довільну (часткову неоднозначну, взагалі кажучи), функцію вигляду $P : D \rightarrow \{T, F\}$, де $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень.

Областю істинності та областю хибності предиката P на D назвемо множини

$$T(P) = P^{-1}(T) = \{d \in D \mid T \in P(d)\} \text{ та}$$

$$F(P) = P^{-1}(F) = \{d \in D \mid F \in P(d)\}.$$

$P(d)$ розуміємо як повний образ d при функції P .

Якщо P однозначний, то $T(P) \cap F(P) = \emptyset$.

Якщо P тотальний, то $T(P) \cup F(P) = D$.

Предикат P на D назвемо:

– тотально істинним, якщо $T(P) = D$;

– тотально хибним, якщо $F(P) = D$;

- тотожно істинним, якщо $T(P) = D$ і $F(P) = \emptyset$;
- тотожно хибним, якщо $T(P) = \emptyset$ і $F(P) = D$;
- тотожно насиченим, якщо $T(P) = F(P) = D$;
- неспростовним, або частково істинним, якщо $F(P) = \emptyset$;

– виконуваним, якщо $T(P) \neq \emptyset$.

Згідно з композиційно-номінативним підходом, побудову КНЛ починаємо з гранично абстрактних рівнів, поступово їх конкретизуючи.

На пропозиційному рівні предикати мають вигляд $P: D \rightarrow \{T, F\}$, де D – сукупність абстрактних даних. Композиції пропозиційного рівня називають логічними зв'язками, найпоширенішими з них є заперечення \neg , диз'юнкція \vee , кон'юнкція $\&$, імплікація \rightarrow , еквіваленція \leftrightarrow .

Предикати $\neg(P)$, $\vee(P, Q) \rightarrow (P, Q)$, $\&(P, Q)$, $\leftrightarrow(P, Q)$ далі позначимо $\neg P$, $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$, $P \& Q$, $P \leftrightarrow Q$. Зазначені предикати задаємо так.

$$T(\neg P) = F(P); F(\neg P) = T(P).$$

$$T(P \vee Q) = T(P) \cup T(Q); F(P \vee Q) = F(P) \cap F(Q).$$

$$T(P \& Q) = T(P) \cap T(Q); F(P \& Q) = F(P) \cup F(Q).$$

$$T(P \rightarrow Q) = F(P) \cup T(Q); F(P \rightarrow Q) = T(P) \cap F(Q).$$

$$T(P \leftrightarrow Q) = (T(P) \cap T(Q)) \cup (F(P) \cap F(Q));$$

$$F(P \leftrightarrow Q) = (T(P) \cap F(Q)) \cup (F(P) \cap T(Q)).$$

На номінативних рівнях складні дані будуються із простіших на основі відношень іменування (номінативних відношень), такі дані називають номінатами. Цей рівень розпадається на низку підрівнів, основним з яких є підрівень однозначних номінатів (іменних множин), на ньому далі виділяємо реномінативний та першопорядковий рівні. Визначальною особливістю першопорядкових рівнів є наявність потужних композицій квантифікації. Базовим першопорядковим рівнем є кванторний, який можна назвати за аналогією з класичною логікою рівнем чистих першопорядкових КНЛ. Саме КНЛ кванторного рівня (КНЛК) вивчаються в даній роботі.

Іменними множинами називають множини пар "ім'я-значення". Формальне визначення таке.

V -іменна множина (V -IM) над A – це однозначна функція вигляду $\delta: V \rightarrow A$.

V -IM подасмо у вигляді $\{v_i \mapsto a_1, \dots, v_n \mapsto a_n, \dots\}$.

Тут $v_i \in V$, $a_i \in A$, $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$.

Множину всіх V -IM над A позначимо ${}^V A$.

Вводимо функцію $asn: {}^V A \rightarrow 2^V$ так:

$$asn(\delta) = \{v \in V \mid v \mapsto a \in \delta \text{ для деякого } a \in A\}.$$

Визначимо $\delta \parallel X = \{v \mapsto a \in \delta \mid v \in X \subseteq V\}$.

Замість $\delta \parallel X$ та $\delta \parallel (V \setminus \{x\})$ пишемо $\delta \parallel_{-x}$ та $\delta \parallel_{-x}$.

Операцію накладки вводимо так:

$$\delta_1 \nabla \delta_2 = \delta_2 \cup (\delta_1 \setminus \{v \mid asn(\delta_2)\}).$$

Операцію реномінації $\gamma_{x_1, \dots, x_n}^v: {}^V A \rightarrow {}^V A$ задаємо

наступним чином:

$$\gamma_{x_1, \dots, x_n}^v(\delta) = \{v_i \mapsto \delta(x_i), \dots, v_n \mapsto \delta(x_n)\} \cup (\delta \setminus \{v \mid v \in \{x_1, \dots, x_n\}\}).$$

Замість y_1, \dots, y_n також скорочено пишемо \bar{y} .

V -квазіарний предикат на A – це предикат вигляду $P: {}^V A \rightarrow \{T, F\}$. Множину таких предикатів позначимо P^A .

Ім'я $x \in V$ строго неістотно для V -квазіарного предиката P , якщо для довільних $d \in {}^V A$ та $a \in A$ маємо $P(d \nabla x \mapsto a) = P(d \parallel_{-x})$.

Дамо визначення 1-арних параметричних композицій реномінації $R_{\bar{x}}^v$ та квантифікації $\exists x$ і $\forall x$.

Предикати $R_{\bar{x}}^v(P)$, $\exists x P$ та $\forall x P$ задаємо так:

$$T(R_{\bar{x}}^v(P)) = \gamma_{\bar{x}}^v(T(P));$$

$$F(R_{\bar{x}}^v(P)) = \gamma_{\bar{x}}^v(F(P));$$

$$T(\exists x P) = \{d \in {}^V A \mid T(P(d \nabla x \mapsto a)) \text{ для деякого } a \in A\};$$

$$F(\exists x P) = \{d \in {}^V A \mid F(P(d \nabla x \mapsto a)) \text{ для всіх } a \in A\};$$

$$T(\forall x P) = \{d \in {}^V A \mid T(P(d \nabla x \mapsto a)) \text{ для всіх } a \in A\};$$

$$F(\forall x P) = \{d \in {}^V A \mid F(P(d \nabla x \mapsto a)) \text{ для деякого } a \in A\}.$$

Базовими композиціями КНЛК є \neg , \vee , $R_{\bar{x}}^v$, $\exists x$.

Фундаментальною властивістю відображень, які використовуються в програмуванні, є монотонність щодо розширення даних новими компонентами. Окремим випадком монотонності є еквітонність [1] – збереження прийнятого значення при розширенні даних.

Предикат $P: D \rightarrow \{T, F\}$ еквітонний, якщо з умови $P(d) \neq \emptyset$ та $d \subseteq d'$ випливає $P(d') = P(d)$.

Для тотальних еквітонних предикатів розширення даних фактично веде до зменшення "інформативності" предиката. Тому прийнятною для тотальних предикатів є дуальна до монотонності властивість антитонності. Проте для однозначних предикатів поняття антитонності малозмістоване.

Предикат $P: D \rightarrow \{T, F\}$ антитонний, якщо з умови $d \subseteq d'$ випливає $P(d) \supseteq P(d')$.

Теорема 1. Композиції \neg , \vee , $R_{\bar{x}}^v$, $\exists x$ зберігають властивості еквітонності та антитонності.

Приклад 1. Розглянемо наступні предикати.

$$P_1(d) = \begin{cases} \{F\}, & \text{якщо } x \in asn(d), \\ \{T\}, & \text{якщо } x \notin asn(d). \end{cases}$$

$$P_2(d) = \begin{cases} \{T\}, & \text{якщо } x \in asn(d), \\ \{F\}, & \text{якщо } x \notin asn(d). \end{cases}$$

$$P_3(d) = \begin{cases} \{F\}, & \text{якщо } x \in asn(d), \\ \emptyset, & \text{якщо } x \notin asn(d). \end{cases}$$

$$P_4(d) = \begin{cases} \{T, F\}, & \text{якщо } x \in \text{asn}(d), \\ \{T\}, & \text{якщо } x \notin \text{asn}(d). \end{cases}$$

$$P_5(d) = \begin{cases} \{T\}, & \text{якщо } x \in \text{asn}(d), \\ \emptyset, & \text{якщо } x \notin \text{asn}(d). \end{cases}$$

$$P_6(d) = \begin{cases} \{T, F\}, & \text{якщо } x \in \text{asn}(d), \\ \{F\}, & \text{якщо } x \notin \text{asn}(d). \end{cases}$$

$$P_7(d) = \begin{cases} F, & \text{якщо } x \notin \text{asn}(d), \\ \emptyset, & \text{якщо } x \in \text{asn}(d). \end{cases}$$

$$P_8(d) = \begin{cases} \{T, F\}, & \text{якщо } x \notin \text{asn}(d), \\ \{T\}, & \text{якщо } x \in \text{asn}(d). \end{cases}$$

$$P_9(d) = \begin{cases} \{T\}, & \text{якщо } x \notin \text{asn}(d), \\ \emptyset, & \text{якщо } x \in \text{asn}(d). \end{cases}$$

$$P_{10}(d) = \begin{cases} \{T, F\}, & \text{якщо } x \notin \text{asn}(d), \\ \{F\}, & \text{якщо } x \in \text{asn}(d). \end{cases}$$

Предикати P_1 та P_2 тотальні однозначні нееквітонні й неантитонні, P_3 та P_5 еквітонні однозначні, P_4 та P_6 еквітонні тотальні неоднозначні, P_7 та P_9 антитонні однозначні, P_8 та P_{10} антитонні тотальні неоднозначні.

Приклад 2. Розглянемо такі співвідношення:

$$T(R_y^x(P)) \subseteq T(\exists x(P)) \quad (TR\exists)$$

$$F(\exists x(P)) \subseteq F(R_y^x(P)) \quad (FR\exists)$$

$$T(\forall x(P)) \subseteq T(R_y^x(P)) \quad (TR\forall)$$

$$F(R_y^x(P)) \subseteq F(\forall x(P)) \quad (FR\forall)$$

Теорема 2. 1) Для загального випадку квазіарних предикатів невірні $TR\exists$, $FR\exists$, $TR\forall$, $FR\forall$.

2) Для еквітонних предикатів вірні $TR\exists$ та $FR\forall$, невірні $FR\exists$ та $TR\forall$.

3) Для антитонних предикатів вірні $FR\exists$ та $TR\forall$, невірні $TR\exists$ та $FR\forall$.

Мова КНЛК. Семантичними моделями КНЛК є композиційні системи квазіарних предикатів кванторного рівня. Це трійки вигляду $({}^V A, Pr^A, C)$, де C задається множиною базових композицій $\{\neg, \vee, R_x^{\bar{v}}, \exists x\}$. Кожна така композиційна система задає дві алгебри: неокласичну алгебраїчну систему (АС) даних (A, Pr^A) та композиційну алгебру предикатів (Pr^A, C) . Побудова композиційної системи визначає мову логіки: терми алгебри предикатів трактуємо як формули мови.

Алфавіт мови КНЛК: множина V предметних імен, множина Ps предикатних символів (сигнатура мови), символи базових композицій $\neg, \vee, R_x^{\bar{v}}, \exists x$.

Множина Fr формул мови визначається індуктивно.

— кожний предикатний символ (ПС) є формулою; такі формули атомарні;

— нехай Φ та Ψ — формули; тоді $\neg\Phi, \vee\Phi\Psi, R_x^{\bar{v}}\Phi, \exists x\Phi$ — формули.

Інтерпретуємо мову КНЛК на композиційних системах квазіарних предикатів $({}^V A, Pr^A, C)$. Відображення інтерпретації формул $J: Fr \rightarrow Pr^A$ природним чином визначається (згідно побудови формул із простіших за допомогою символів базових композицій) на основі тотального однозначного відображення $I: Ps \rightarrow Pr^A$, яке позначає символами множини Ps базові предикати.

Відображення $J: Fr \rightarrow Pr^A$ задаємо так:

$$1) J(p) = I(p) \text{ для кожного } p \in Ps.$$

$$2) J(\neg\Phi) = \neg(J(\Phi)), J(\vee\Phi\Psi) = \vee(J(\Phi), J(\Psi)),$$

$$J(R_x^{\bar{v}}\Phi) = R_x^{\bar{v}}(J(\Phi)), J(\exists x\Phi) = \exists x(J(\Phi)).$$

Відображення I прив'язує АС даних (A, Pr) до мови КНЛК. Отримуємо АС з доданою сигнатурою — об'єкт вигляду $((A, Pr^A), I)$. Така АС фактично визначає композиційну систему $({}^V A, Pr^A, C)$, тому АС з доданою сигнатурою є інтегрованими семантичними моделями, які пов'язують мову КНЛК із АС даних. Будемо їх називати моделями мови та скорочено позначати (A, I) .

Предикат $J(\Phi)$ далі позначаємо Φ_A .

Φ (частково) істинна при інтерпретації на $A = (A, I)$, або A -неспростовна (позн. $A \models \Phi$), якщо Φ_A — частково істинний предикат.

Φ усюди істинна, або неспростовна (позн. $\models \Phi$), якщо $A \models \Phi$ для кожної моделі мови A .

Φ тотально істинна при інтерпретації на $A = (A, I)$ (позн. $A \models \Phi$), якщо Φ_A — тотально істинний предикат.

Φ тотально істинна (позн. $\models \Phi$), якщо $A \models \Phi$ для кожної моделі мови A .

У випадку неокласичної семантики кожний ПС можна проінтерпретувати як усюди невизначений предикат, на такій моделі мови кожна формула теж проінтерпретується як усюди невизначений предикат.

У випадку пересиченої семантики кожний ПС можна проінтерпретувати як тотально насичений предикат, на такій моделі мови кожна формула теж проінтерпретується як тотально насичений предикат.

У випадку загальної семантики кожний ПС можна проінтерпретувати як усюди невизначений предикат, на такій моделі мови кожна формула теж проінтерпретується як усюди невизначений предикат; тоді на дуальній моделі мови кожний ПС проінтерпретується як тотально насичений предикат, на цій моделі кожна формула теж проінтерпретується як тотально насичений предикат.

Звідси отримуємо:

Теорема 3. 1. У випадку неокласичної семантики (інтерпретації на АС з частковими однозначними предикатами) множина тотально істинних формул порожня.

2. У випадку пересиченої семантики (інтерпретації на АС з тотальними неоднозначними предикатами) множина неспростованих формул порожня.

3. У випадку загальної семантики (інтерпретації на АС з частковими неоднозначними предикатами) множини тотально істинних та неспростованих формул порожні.

Важливе поняття дуальних моделей мови введемо так (тут \bar{S} позначає доповнення до S у V_A).

АС $B = (A, I_B)$ дуальна до $A = (A, I_A)$, якщо $T(\Phi_B) = \bar{F}(\Phi_A)$ та $F(\Phi_B) = \bar{T}(\Phi_A)$ для кожного $\Phi \in Ps$. Тоді $A = (A, I_A)$ дуальна до $B = (A, I_B)$.

Якщо $A = (A, I_A)$ – АС з частковими однозначними предикатами, то дуальна $B = (A, I_B)$ – АС з тотальними неоднозначними предикатами, та навпаки.

Теорема 4. Нехай $B = (A, I_B)$ дуальна до $A = (A, I_A)$. Тоді для кожної $\Phi \in Fr$:

$$1) T(\Phi_B) = \bar{F}(\Phi_A) \text{ та } F(\Phi_B) = \bar{T}(\Phi_A);$$

2) Φ_A еквітонний $\Rightarrow \Phi_B$ антитонний; Φ_A антитонний $\Rightarrow \Phi_B$ еквітонний.

Звідси випливає: Φ_A неспростовний на АС A із частковими однозначними предикатами (неокласична семантика) $\Leftrightarrow \Phi_B$ тотально істинний на дуальній АС B із тотальними неоднозначними предикатами (пересичена семантика).

Таким чином, неокласична семантика та пересичена семантика дуальні.

На основі різних співвідношень між областями істинності та хибності предикатів на множині формул введемо 5 "природних" відношень логічного наслідку. В різних семантиках вони мають різні властивості. Для пропозиційної логіки такі відношення розглядалися в [4].

Спочатку задаємо відношення наслідку для двох формул при інтерпретації на фіксованій моделі мови АС A .

$$1) \text{ "Істиннісний" наслідок } A \models_T :$$

$$\Phi_A \models_T \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_A) \subseteq T(\Psi_A).$$

$$2) \text{ "Хибнісний" наслідок } A \models_F :$$

$$\Phi_A \models_F \Psi \Leftrightarrow F(\Psi_A) \subseteq F(\Phi_A).$$

$$3) \text{ "Сильний" наслідок } A \models_{TF} :$$

$$\Phi_A \models_{TF} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_A) \subseteq T(\Psi_A) \text{ та } F(\Psi_A) \subseteq F(\Phi_A).$$

$$4) \text{ "Неспростовнісний" наслідок } A \models_{CI} :$$

$$\Phi_A \models_{CI} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_A) \cap F(\Psi_A) = \emptyset.$$

$$5) \text{ "Насичений" наслідок } A \models_{Cm} :$$

$$\Phi_A \models_{Cm} \Psi \Leftrightarrow F(\Phi_A) \cap T(\Psi_A) = \emptyset.$$

Відповідні відношення логічного наслідку $\models_T, \models_F, \models_{TF}, \models_{CI}, \models_{Cm}$ визначаємо за такою схемою: $\Phi \models \Psi \Leftrightarrow \Phi_A \models \Psi$ для кожної моделі мови A .

Тут і надалі, якщо інше не вказане, $*$ – це одне з CI, Cm, T, F, TF .

Введемо тепер відношення слабких наслідків.

Формула Ψ є слабким логічним наслідком [2] формули Φ (позн. $\Phi \models \Psi$), якщо для кожної моделі мови $A = (A, I)$ із $A \models \Phi$ випливає $A \models \Psi$.

Формула Ψ є слабким тотальним наслідком [3] формули Φ (позн. $\Phi \models \Psi$), якщо для кожної моделі мови $A = (A, I)$ із $A \models \Phi$ випливає $A \models \Psi$.

Введені відношення $\models_T, \models_F, \models_{TF}, \models_{CI}, \models_{Cm}, \models, \models$ рефлексивні й транзитивні.

Теорема 5. Нехай АС $B = (A, I_B)$ дуальна до АС $A = (A, I_A)$. Тоді:

$$1) \Phi_A \models_T \Psi \Leftrightarrow \Phi_B \models_F \Psi \text{ та } \Phi_A \models_F \Psi \Leftrightarrow \Phi_B \models_T \Psi;$$

$$2) \Phi_A \models_{CI} \Psi \Leftrightarrow \Phi_B \models_{Cm} \Psi \text{ та } \Phi_A \models_{Cm} \Psi \Leftrightarrow \Phi_B \models_{CI} \Psi.$$

Наслідок 1. У випадку загальної семантики $\Phi \models_T \Psi \Leftrightarrow \Phi \models_F \Psi \Leftrightarrow \models_{TF} \Psi$.

Справді, в загальній семантиці кожна АС B є дуальною до деякої АС A .

У випадку неокласичної семантики немає жодної пари формул, які перебувають у відношенні \models_{Cm} . Справді, розглянемо таку модель мови A , на якій усі ПС інтерпретуються як усюди невизначені предикати, тоді й усі формули на A інтерпретуються як усюди невизначені предикати.

У випадку пересиченої семантики немає жодної пари, які перебувають у відношенні \models_{CI} . Справді, розглянемо таку модель мови A , на якій усі ПС інтерпретуються як тотально насичені предикати, тоді й усі формули на A інтерпретуються як тотально насичені предикати.

У випадку загальної семантики немає жодної пари формул, які перебувають у відношенні \models_{CI} чи у відношенні \models_{Cm} .

Таким чином, у випадку загальної семантики маємо єдине природне змістовне відношення логічного наслідку \models_{TF} .

Для неокласичної семантики можна розглядати відношення $\models_T, \models_F, \models_{TF}, \models_{CI}$; для пересиченої – $\models_T, \models_F, \models_{TF}, \models_{Cm}$.

Відношення логічного наслідку індукують відповідні відношення логічної еквівалентності. Такі відношення рефлексивні, транзитивні й симетричні.

Відношення еквівалентності в АС $A \sim_T, A \sim_F, A \sim_{TF}, A \sim_{CI}, A \sim_{Cm}$ та відношення логічної еквівален-

тності $\neg_T, \neg_F, \neg_{TF}, \neg_{CI}, \neg_{CM}$ визначасмо за такою схемою:

$\Phi \neg_T \Psi$, якщо $\Phi \models \Psi$ та $\Psi \models \Phi$;

$\Phi \neg_F \Psi$, якщо $\Phi \models \Psi$ та $\Psi \models \neg \Phi$.

Зауважимо, що $\Phi \neg_{TF} \Psi$ означає, що Φ та Ψ завжди інтерпретуються як один і той же предикат. Справді, для кожної моделі мови A маємо:

$$\Phi \neg_{TF} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_A) = T(\Psi_A) \text{ та } F(\Psi_A) = F(\Phi_A)$$

Теорема 6. Для кожної моделі мови A маємо:

$$1) \Phi \models_T \Psi \Leftrightarrow \neg \Psi \models_F \neg \Phi \text{ та}$$

$$\Phi \models_F \Psi \Leftrightarrow \neg \Psi \models_T \neg \Phi;$$

$$2) \Phi \models_{TF} \Psi \Leftrightarrow \neg \Psi \models_{TF} \neg \Phi \text{ та}$$

$$\Phi \models_{CF} \Psi \Leftrightarrow \neg \Psi \models_{CF} \neg \Phi.$$

Поведінка введених відношень логічного наслідку вельми специфічна.

Теорема 7. У випадку неокласичної семантики маємо:

$$1) \text{ невірно } \Phi \& (\Phi \rightarrow \Psi) \models \Psi, \Phi \& (\Phi \rightarrow \Psi) \models \neg \Psi;$$

$$\Phi \models \Psi \vee \Phi \& \neg \Psi, \text{ невірно } \Phi \models \Psi \vee \Phi \& \neg \Psi;$$

$$1) \Phi \& (\Phi \rightarrow \Psi) \models_{CI} \Psi, \Phi \models_{CI} \Psi \vee \Phi \& \neg \Psi;$$

$$2) \Phi \& (\Phi \rightarrow \Psi) \models_T \Psi, \Phi \& (\Phi \rightarrow \Psi) \models_F \neg \Psi;$$

$$3) \Phi \models_T \Psi \vee \Phi \& \neg \Psi; \Phi \models_F \Psi \vee \Phi \& \neg \Psi;$$

$$4) \Phi \vee \Psi \& \neg \Psi \neg_T \Phi \text{ та}$$

$$\text{невірно } \Phi \vee \Psi \& \neg \Psi \neg_F \Phi;$$

$$5) \Phi \& (\Psi \vee \neg \Psi) \neg_F \Phi \text{ та}$$

$$\text{невірно } \Phi \& (\Psi \vee \neg \Psi) \neg_T \Phi.$$

$$6) \Phi \& \neg \Phi \models_{TF} \Psi \vee \neg \Psi;$$

$$\Phi \& (\Phi \rightarrow \Psi) \models_{TF} \Psi \vee \Phi \& \neg \Psi.$$

Теорема 8. У випадку пересиченої семантики маємо:

$$1) \Phi \& (\Phi \rightarrow \Psi) \models \Psi, \text{ невірно } \Phi \& (\Phi \rightarrow \Psi) \models \neg \Psi;$$

$$\text{невірно } \Phi \models \Psi \vee \Phi \& \neg \Psi, \Phi \models \Psi \vee \Phi \& \neg \Psi;$$

$$1) \Phi \& (\Phi \rightarrow \Psi) \models_{CM} \Psi, \Phi \models_{CM} \Psi \vee \Phi \& \neg \Psi;$$

$$2) \Phi \& (\Phi \rightarrow \Psi) \models_T \Psi, \Phi \& (\Phi \rightarrow \Psi) \models_F \neg \Psi;$$

$$3) \Phi \models_T \Psi \vee \Phi \& \neg \Psi; \Phi \models_F \Psi \vee \Phi \& \neg \Psi;$$

$$4) \Phi \vee \Psi \& \neg \Psi \neg_F \Phi \text{ та невірно } \Phi \vee \Psi \& \neg \Psi \neg_T \Phi;$$

$$5) \Phi \& (\Psi \vee \neg \Psi) \neg_T \Phi \text{ та}$$

$$\text{невірно } \Phi \& (\Psi \vee \neg \Psi) \neg_F \Phi.$$

$$6) \Phi \& \neg \Phi \models_{TF} \Psi \vee \neg \Psi;$$

$$\Phi \& (\Phi \rightarrow \Psi) \models_{TF} \Psi \vee \Phi \& \neg \Psi.$$

Теорема 9. У випадку загальної семантики:

$$1) \Phi \models \Psi \Leftrightarrow \Phi \models \neg \Psi;$$

$$2) \Phi \& \neg \Phi \models_{TF} \Psi \vee \neg \Psi;$$

$$\Phi \& (\Phi \rightarrow \Psi) \models_{TF} \Psi \vee \Phi \& \neg \Psi.$$

Із теорем 6–8 випливає, що невірними будуть такі співвідношення:

$$\Phi \models_T \Psi \Rightarrow \neg \Psi \models_T \neg \Phi, \neg \Psi \models_T \neg \Phi \Rightarrow \Phi \models_T \Psi,$$

$$\Phi \models_F \Psi \Rightarrow \neg \Psi \models_F \neg \Phi, \neg \Psi \models_F \neg \Phi \Rightarrow \Phi \models_F \Psi,$$

$$\Phi \models_{TF} \Psi \Rightarrow \neg \Psi \models_{TF} \neg \Phi, \neg \Psi \models_{TF} \neg \Phi \Rightarrow \Phi \models_{TF} \Psi,$$

$$\Phi \models_{CF} \Psi \Rightarrow \neg \Psi \models_{CF} \neg \Phi, \neg \Psi \models_{CF} \neg \Phi \Rightarrow \Phi \models_{CF} \Psi.$$

Таким чином, для \models_T та \models_F закон контрапозиції невірний, для \neg_T та \neg_F не можна знімати заперечення в обох частинах еквівалентності.

Використовуючи \neg_{TF} , можна описати основні властивості пропозиційних композицій квазіарних предикатів. До них можна віднести такі відомі закони, успадковані від класичної логіки [6, 2]: комутативність і асоціативність \vee та $\&$, ідемпотентність \vee та $\&$, закони контрапозиції, зняття подвійного заперечення, де Моргана.

Наведемо для прикладу закони де Моргана:

$$\neg(P \vee Q) \neg_{TF} \neg P \& \neg Q; \neg(P \& Q) \neg_{TF} \neg P \vee \neg Q.$$

Наведемо властивості, пов'язані з композицією реномінації.

$$RT) R_{z,\bar{x}}^{\neg}(\Phi) \neg_{TF} R_{\bar{x}}^{\neg}(\Phi).$$

$$R\neg) R_{\bar{x}}^{\neg}(\neg \Phi) \neg_{TF} \neg R_{\bar{x}}^{\neg}(\Phi).$$

$$R\vee) R_{\bar{x}}^{\neg}(\Phi \vee \Psi) \neg_{TF} R_{\bar{x}}^{\neg}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\neg}(\Psi).$$

$$RR) R_{\bar{x}}^{\neg}(R_{\bar{y}}^{\neg}(\Phi)) \neg_{TF} R_{\bar{x} \vee \bar{y}}^{\neg}(\Phi).$$

ΦN) Нехай $u \in V$ строго неістотне для Φ . Тоді $R_{z,\bar{x}}^{\neg}(\Phi) \neg_{TF} R_{\bar{x}}^{\neg}(\Phi)$.

$$R\exists) R_{\bar{x}}^{\neg}(\exists y \Phi) \neg_{TF} \exists y R_{\bar{x}}^{\neg}(\Phi), \text{ якщо } u \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}.$$

$$R\exists S) R_{\bar{x}}^{\neg}(\exists y \Phi) \neg_{TF} \exists z R_{z,\bar{x}}^{\neg} o_z^{\neg}(\Phi), \text{ якщо } u \in \{\bar{v}, \bar{x}\},$$

z тотально строго неістотне та $z \in nm(R_{\bar{x}}^{\neg}(\exists x \Phi))$.

$$NR) \exists y R_{z,\bar{x}}^{\neg}(\Phi) \neg_{TF} R_{z,\bar{x}}^{\neg}(\Phi) \text{ та}$$

$$\forall y R_{z,\bar{x}}^{\neg}(\Phi) \neg_{TF} R_{z,\bar{x}}^{\neg}(\Phi), \text{ якщо } u \in \{z, \bar{x}\}.$$

Ren) Нехай $u \in V$ строго неістотне для формули Φ . Тоді $\exists x \Phi \neg_{TF} \exists y R_y^{\neg}(\Phi)$.

Приклад 3. Існують АС A та формула Φ : $\Phi \models_{TF} \forall x \Phi$ та $\exists x \Phi \models_{CF} \Phi$, $\exists x \Phi \models_{CF} \Phi$.

Нехай Φ – це формула $\forall x p \rightarrow p$ для ПС p . Інтерпретуємо p на АС A так:

$$p_A(d) = \begin{cases} \{T\}, & \text{якщо } x \in asn(d), \\ \{F\}, & \text{якщо } x \in asm(d). \end{cases}$$

Справді, маємо $\emptyset \subset T(p_A) \subset {}^V A$, $\emptyset \subset F(p_A) \subset {}^V A$, $T(\forall x p_A) = {}^V A$, $F(\forall x p_A) = \emptyset$, $T(\exists x(\forall x p \rightarrow p)_A) = {}^V A$, $F(\exists x(\forall x p \rightarrow p)_A) = \emptyset$, $T(\forall x(\forall x p \rightarrow p)_A) = {}^V A$, $F(\forall x(\forall x p \rightarrow p)_A) = \emptyset$, $\emptyset \subset T(\forall x p \rightarrow p)_A \subset {}^V A$, $\emptyset \subset F(\forall x p \rightarrow p)_A \subset {}^V A$.

$$\text{Звідси } \Phi \models_{TF} \forall x \Phi, \exists x \Phi \models_{CF} \Phi, \exists x \Phi \models_{CF} \Phi.$$

Наведемо тепер основні властивості, пов'язані з композиціями квантифікації.

$$Q1) \exists x \exists y \Phi \neg_{TF} \exists y \exists x \Phi \text{ та } \forall x \forall y \Phi \neg_{TF} \forall y \forall x \Phi.$$

$$Q2) \neg \forall x \Phi \neg_{TF} \exists x \neg \Phi \text{ та } \neg \exists x \Phi \neg_{TF} \forall x \neg \Phi.$$

$$Q3) \exists x \Phi \neg_{TF} \forall x \exists x \Phi, \exists x \Phi \neg_{TF} \exists x \exists x \Phi;$$

$$\forall x \Phi \neg_{TF} \forall x \forall x \Phi, \forall x \Phi \neg_{TF} \exists x \forall x \Phi.$$

Q4) $\exists x\Phi \vee \exists x\Psi \sim_{TF} \exists x(\Phi \vee \Psi)$ та
 $\forall x\Phi \& \forall x\Psi \sim_{TF} \forall x(\Phi \& \Psi)$.

Q5) $\exists x(\Phi \& \Psi) \models_{TF} \exists x\Phi \& \exists x\Psi$ та
 $\forall x\Phi \vee \forall x\Psi \models_{TF} \forall x(\Phi \vee \Psi)$.

Q6) $\exists y \forall x \Phi \models_{TF} \forall x \exists y \Phi$; водночас
 $\forall x \exists y \Phi \not\models \exists y \forall x \Phi$ (* – одне з CI, CM, T, F, TF).

Q7) $\forall x \Phi \models \exists x \Phi$; водночас $\forall x \Phi \not\models \Phi$,
 $\Phi \not\models \forall x \Phi$, $\Phi \not\models \exists x \Phi$ (* – одне з CI, CM, T, F, TF).

Q8) $\Phi \models \exists x \Phi$, $\Phi \models \forall x \Phi$, $\forall x \Phi \models \exists x \Phi$ та
 $\Phi \models \exists x \Phi$, $\Phi \models \forall x \Phi$, $\forall x \Phi \models \exists x \Phi$.

Для логік часткових однозначних предикатів
 додаємо властивості:

Q9P) $\models \forall x (\forall x \Phi \rightarrow \Phi)$ та $\models \exists x (\forall x \Phi \rightarrow \Phi)$;

$\models \forall x (\Phi \rightarrow \exists x \Phi)$ та $\models \exists x (\Phi \rightarrow \exists x \Phi)$;

Q10P) не завжди вірні $\models \Phi \rightarrow \exists x \Phi$, $\models \forall x \Phi \rightarrow \Phi$,
 $\forall x \Phi \models \Phi$;

Q11P) для деяких формул Φ можливо:

$\models \Phi \rightarrow \forall x \Phi$ та невірно $\models \exists x \Phi \rightarrow \Phi$;

Для логік тотальних неоднозначних предика-
 тів додаємо властивості:

Q9) $\models \forall x (\forall x \Phi \rightarrow \Phi)$ та $\models \exists x (\forall x \Phi \rightarrow \Phi)$;

$\models \forall x (\Phi \rightarrow \exists x \Phi)$ та $\models \exists x (\Phi \rightarrow \exists x \Phi)$;

Q10T) не завжди справджуються $\models \Phi \rightarrow \exists x \Phi$,
 $\models \forall x \Phi \rightarrow \Phi$, $\forall x \Phi \models \Phi$;

Q11T) для деяких формул Φ можливо:

$\models \Phi \rightarrow \forall x \Phi$ та невірно $\models \exists x \Phi \rightarrow \Phi$.

Теорема 10. 1) Для логік еквітонних предика-
 тів $R_2^x(\Phi) \models_{CI} \exists x \Phi$ та $\forall x \Phi \models_{CI} R_2^x(\Phi)$;

2) для логік антитонних предикатів

$R_2^x(\Phi) \models_{CM} \exists x \Phi$ та $\forall x \Phi \models_{CM} R_2^x(\Phi)$;

3) для логік еквітонних предикатів

$R_2^x(\Phi) \models_T \exists x \Phi$, $\forall x \Phi \models_F R_2^x(\Phi)$ та $\forall x \Phi \models R_2^x(\Phi)$,
 але вони не завжди вірні для логік антитонних
 предикатів;

4) для логік антитонних предикатів

$R_2^x(\Phi) \models_F \exists x \Phi$, $\forall x \Phi \models_T R_2^x(\Phi)$ та $\forall x \Phi \models R_2^x(\Phi)$,
 але вони не завжди вірні для логік еквітонних
 предикатів;

5) $R_2^x(\Phi) \models_{TF} \exists x \Phi$ та $\forall x \Phi \models_{TF} R_2^x(\Phi)$ не
 завжди вірні як для логік еквітонних, так і для
 логік антитонних предикатів.

На основі розглянутих властивостей КНЛК
 отримуємо наступні співвідношення для множин
 формул, які перебувають у відповідних відно-
 шеннях.

1. Неокласична семантика:

$\models_{TF} \subseteq \models_T$, $\models_{TF} \subseteq \models_F$, $\models_T \subseteq \models_{CM}$, $\models_F \subseteq \models_{CM}$;

$\models_{CM} = \emptyset$; $\models_F \subseteq \models$, $\models_T \subseteq \models$;

$\models_T \subseteq \models$, $\models_F \subseteq \models$, $\models \subseteq \models_{CI}$, $\models \subseteq \models_{CI}$.

2. Пересичена семантика:

$\models_{TF} \subseteq \models_T$, $\models_{TF} \subseteq \models_F$, $\models_T \subseteq \models_{CM}$, $\models_F \subseteq \models_{CM}$;

$\models_{CI} = \emptyset$; $\models_F \subseteq \models$, $\models_T \subseteq \models$;

$\models_T \subseteq \models$, $\models_F \subseteq \models$, $\models \subseteq \models_{CM}$, $\models \subseteq \models_{CM}$.

3. Загальна семантика:

$\models_{TF} = \models_T = \models_F$; $\models_{TF} \subseteq \models = \models$;

$\models_{CI} = \emptyset$ та $\models_{CM} = \emptyset$.

4. Загальна семантика еквітонних предикатів
 та загальна семантика антитонних предикатів:

$\models_{TF} \subseteq \models_T$, $\models_{TF} \subseteq \models_F$; $\models_T \subseteq \models$, $\models_F \subseteq \models$;

$\models_{CI} = \emptyset$ та $\models_{CM} = \emptyset$.

Для відношень \sim_{CI} , \sim_{CM} , \sim_{TF} справджується
 теорема семантичної еквівалентності (тут * –
 одне з CI, CM, TF).

Теорема 11. Нехай формула Φ' отримана з Φ
 заміною деяких входжень формул Φ_1, \dots, Φ_n на
 Ψ_1, \dots, Ψ_n відповідно. Якщо $\Phi_1 \sim \Psi_1, \dots, \Phi_n \sim \Psi_n$,
 то $\Phi \sim \Phi'$.

Для відношень \sim_T та \sim_F теорема 11 невірна.
 Справді, можлива ситуація, коли вірно $\Xi \sim_T \Phi$ та
 невірно $\neg \Xi \sim_T \neg \Phi$, адже $\neg \Xi \sim_T \neg \Phi \Leftrightarrow \Xi \sim_F \Phi$;
 можливо також, що вірно $\Xi \sim_F \Phi$ та невірно
 $\neg \Xi \sim_F \neg \Phi$.

**3. Відношення логічного наслідку для множин
 формул.**

Поширимо введені відношення логічного на-
 слідку на довільні множини формул.

Спочатку задамо відношення наслідку для
 множин формул при інтерпретації на фіксованій
 моделі мови АС А.

Нехай $\Gamma \subseteq Fr$ та $\Delta \subseteq Fr$.

$\Gamma \models_{CI} \Delta$, якщо $\bigcap_{\Phi \in \Gamma} T(\Phi_A) \cap \bigcap_{\Psi \in \Delta} F(\Psi_A) = \emptyset$

$\Gamma \models_{CM} \Delta$, якщо $\bigcup_{\Phi \in \Gamma} F(\Phi_A) \cup \bigcup_{\Psi \in \Delta} T(\Psi_A) = \emptyset$

$\Gamma \models_T \Delta$, якщо $\bigcap_{\Phi \in \Gamma} T(\Phi_A) \subseteq \bigcap_{\Psi \in \Delta} T(\Psi_A)$

$\Gamma \models_F \Delta$, якщо $\bigcap_{\Psi \in \Delta} F(\Psi_A) \subseteq \bigcup_{\Phi \in \Gamma} F(\Phi_A)$

$\Gamma \models_{TF} \Delta$, якщо $\bigcap_{\Phi \in \Gamma} T(\Phi_A) \subseteq \bigcup_{\Psi \in \Delta} T(\Psi_A)$ та
 $\bigcap_{\Psi \in \Delta} F(\Psi_A) \subseteq \bigcup_{\Phi \in \Gamma} F(\Phi_A)$.

Відношення логічного наслідку для множин
 формул \models_T , \models_F , \models_{TF} , \models_{CI} , \models_{CM} визначимо за
 такою схемою:

$\Gamma \models \Delta$, якщо $\Gamma \models_A \Delta$ для кожної моделі мови А.

Відношення \models_T , \models_F , \models_{TF} , \models_{CI} , \models_{CM} рефлек-
 сивні, але не транзитивні.

Теорема 12. Нехай АС $B = (A, I_B)$ дуальна до
 АС $A = (A, I_A)$. Тоді

- 1) $\Gamma_A \models_T \Delta \Leftrightarrow \Gamma_B \models_F \Delta$ та $\Gamma_A \models_F \Delta \Leftrightarrow \Gamma_B \models_T \Delta$;
- 2) $\Gamma_A \models_{CI} \Delta \Leftrightarrow \Gamma_B \models_{Cm} \Delta$ та
 $\Gamma_A \models_{Cm} \Delta \Leftrightarrow \Gamma_B \models_{CI} \Delta$.

Наслідок 2. У випадку загальної семантики
 $\Gamma_A \models_T \Delta \Leftrightarrow \Gamma_A \models_F \Delta \Leftrightarrow \Gamma_A \models_{TF} \Delta$.

У випадку загальної семантики природно розглядати лише відношення \models_{TF} .

Для неокласичної семантики можна розглядати відношення $\models_T, \models_F, \models_{TF}, \models_{CI}$; для пересиченої – $\models_T, \models_F, \models_{TF}, \models_{Cm}$.

Теорема 13 (заміни еквівалентних). Нехай $\Phi \rightarrow_T \Psi$. Тоді:

- $\Phi, \Gamma \models_{\Delta} \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \models_{\Delta} \Delta$ та
 $\Gamma \models_{\Delta} \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models_{\Delta} \Delta, \Psi$

Замість \sim_{TF} в теоремі 13 можна брати \sim_{CI} чи \sim_{Cm} . Тоді \models_{Δ} буде відповідно лише відношенням \models_{CI} чи \models_{Cm} . Отримуємо ще дві різновидності теорем заміни еквівалентних – для логіки часткових однозначних предикатів (із \models_{CI}) та для логіки тотальних неоднозначних предикатів (із \models_{Cm}).

Наведемо властивості пропозиційного рівня. Для цих властивостей $\models = \models_T, \models_F, \models_{TF}, \models_{CI}, \models_{Cm}$. Для неокласичної семантики відпадає \models_{Cm} , для пересиченої – \models_{CI} , для загальної – \models_{CI} та \models_{Cm} .

У) Нехай $\Gamma \models_{\Delta} \Delta$ та $\Delta \subseteq \Sigma$ і $\Gamma \subseteq \Lambda$, тоді $\Lambda \models_{\Sigma}$.

С) $\Phi, \Gamma \models_{\Delta} \Delta, \Phi$.

$\neg \neg \neg \Phi, \Gamma \models_{\Delta} \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models_{\Delta} \Delta$;

$\Gamma \models_{\Delta} \Delta, \neg \neg \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models_{\Delta} \Delta, \Phi$.

в) $\Phi \vee \Psi, \Gamma \models_{\Delta} \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models_{\Delta} \Delta$ та $\Psi, \Gamma \models_{\Delta} \Delta$;

$\Gamma \models_{\Delta} \Delta, \Phi \vee \Psi \Leftrightarrow \Gamma \models_{\Delta} \Delta, \Phi, \Psi$.

$\neg \neg (\neg \Phi \vee \Psi), \Gamma \models_{\Delta} \Delta \Leftrightarrow \neg \Phi, \neg \Psi, \Gamma \models_{\Delta} \Delta$;

$\Gamma \models_{\Delta} \Delta, \neg (\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow \Gamma \models_{\Delta} \Delta, \neg \Phi$ та $\Gamma \models_{\Delta} \Delta, \neg \Psi$.

Для \models_{CI} та \models_{Cm} також справджуються (тут \neg – одне з CI, Cm):

$\neg \neg \neg \Phi, \Gamma \models_{\Delta} \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_{\Delta} \Delta, \Phi$;

$\Gamma \models_{\Delta} \Delta, \neg \Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models_{\Delta} \Delta$.

Водночас ці властивості невірні для \models_T, \models_F та \models_{TF} , що засвідчує

Теорема 14. 1. Для неокласичної семантики можливо:

1) $\neg \Phi, \Gamma \models_T \Delta$ та $\Gamma \not\models_T \Delta, \Phi$;

$\Phi, \Gamma \models_T \Delta$ та $\Gamma \not\models_T \Delta, \neg \Phi$;

2) $\Gamma \models_F \Delta, \neg \Phi$ та $\Phi, \Gamma \not\models_F \Delta$;

$\Gamma \models_F \Delta, \Phi$ та $\neg \Phi, \Gamma \not\models_F \Delta$.

2. Для пересиченої семантики можливо:

1) $\neg \Phi, \Gamma \models_F \Delta$ та $\Gamma \not\models_F \Delta, \Phi$;

$\Phi, \Gamma \models_F \Delta$ та $\Gamma \not\models_F \Delta, \neg \Phi$;

2) $\Gamma \models_T \Delta, \neg \Phi$ та $\Phi, \Gamma \not\models_T \Delta$;

$\Gamma \models_T \Delta, \Phi$ та $\neg \Phi, \Gamma \not\models_T \Delta$.

Властивості реномінації $RT, R\neg, R\vee, RR, \Phi N, \Phi N_-, R\exists, R\exists S$ індукують низку відповідних властивостей відношень логічного наслідку для множин формул, вони отримуються на основі теореми заміни еквівалентних. Ці властивості справджуються для \models_{TF} , вони вірні й для $\models_T, \models_F, \models_{CI}, \models_{Cm}$.

Таким чином, отримуємо властивості $RT_+, RT_-, \neg RT_+, \neg RT_-, RR_+, RR_-, \neg RR_+, \neg RR_-, R\neg_+, R\neg_-, \neg R\neg_+, \neg R\neg_-, R\vee_+, R\vee_-, \neg R\vee_+, \neg R\vee_-, \Phi N_+, \Phi N_-, \neg \Phi N_+, \neg \Phi N_-, R\exists_+, R\exists_-, \neg R\exists_+, \neg R\exists_-, R\exists S_+, R\exists S_-, \neg R\exists S_+, \neg R\exists S_-$.

На відміну від \models_{CI} та \models_{Cm} , для \models_T, \models_F та \models_{TF} не можна знімати заперечення, переносючи формулу з лівої частини у праву і навпаки, тому для них додатково формулюємо властивості для випадку зовнішнього заперечення на реномінацію.

Наведемо тут для прикладу властивості $\neg R\exists_+, \neg R\exists_-, R\exists S_+, R\exists S_-$.

$\neg R\exists_+ \neg R_x^{\exists} (\exists y \Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow$

$\neg \exists y R_x^{\exists} (\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta$ за умови $y \notin \{ \bar{v}, \bar{x} \}$.

$\neg R\exists_- \Gamma \models_{TF} \Delta, \neg R_x^{\exists} (\exists y \Phi) \Leftrightarrow$

$\Gamma \models_{TF} \Delta, \neg \exists y R_x^{\exists} (\Phi)$ за умови $y \notin \{ \bar{v}, \bar{x} \}$.

$R\exists S_+ R_x^{\exists} (\exists y \Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow$

$\exists z R_x^{\exists} \circ_z^y (\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta$ за умови $y \notin \{ \bar{v}, \bar{x} \}$.

$R\exists S_- \Gamma \models_{TF} \Delta, R_x^{\exists} (\exists y \Phi) \Leftrightarrow$

$\Gamma \models_{TF} \Delta, \exists z R_x^{\exists} \circ_z^y (\Phi)$ за умови $y \notin \{ \bar{v}, \bar{x} \}$.

Для $R\exists S_+$ і $R\exists S_-$ з тотально строго неістотне та $z \notin nm(R_x^{\exists} (\exists y \Phi))$.

Розглянемо тепер властивості, пов'язані з елімінацією кванторів.

Теорема 15. Для загального випадку квазіарних предикатів у відповідних семантиках не завжди вірні:

1) $\Gamma \models_{\Delta} \Delta, \exists x \Phi, R_y^{\exists} (\Phi) \Rightarrow \Gamma \models_{\Delta} \Delta, \exists x \Phi$;

2) $\neg \exists x \Phi, \neg R_x^{\exists} (\Phi), \Gamma \models_{\Delta} \Delta \Rightarrow \neg \exists x \Phi, \Gamma \models_{\Delta} \Delta$.

3) $\exists x \Phi, \Gamma \models_{\Delta} \Delta \Rightarrow R_x^{\exists} (\Phi), \Gamma \models_{\Delta} \Delta$;

4) $\Gamma \models \neg \exists x \Phi, \Delta \Rightarrow \Gamma \models_{\Delta} \neg R_x^{\exists} (\Phi), \Delta$.

Теорема 16. Нехай z тотально строго неістотне та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \Phi)$. Тоді:

1) $R_x^{\exists} (\Phi), \Gamma_A \models_{\Delta} \Delta \Rightarrow \exists x \Phi, \Gamma_A \models_{\Delta} \Delta$;

2) $\Gamma_A \models_{\Delta} \neg R_x^{\exists} (\Phi), \Delta \Rightarrow \Gamma_A \models_{\Delta} \neg \exists x \Phi, \Delta$.

Теорема 17. Для логік еквітонних предикатів:

1) $\Gamma_A \models_{CI} \Delta, \exists x \Phi, R_x^{\exists} (\Phi) \Leftrightarrow \Gamma_A \models_{CI} \Delta, \exists x \Phi$;

2) $\Gamma_A \models_T \Delta, \exists x \Phi, R_x^{\exists} (\Phi) \Leftrightarrow \Gamma_A \models_T \Delta, \exists x \Phi$; невірно

$$\Gamma_A \models_F \Delta, \exists x \Phi, R_z^x(\Phi) \Rightarrow \Gamma_A \models_F \Delta, \exists x \Phi;$$

$$3) \Gamma, \neg \exists x \Phi, \neg R_z^x(\Phi) \models_F \Delta \Leftrightarrow \Gamma, \neg \exists x \Phi_A \models_F \Delta;$$

$$\text{невірно } \Gamma, \neg \exists x \Phi, \neg R_z^x(\Phi) \models_T \Delta \Rightarrow \Gamma, \neg \exists x \Phi_A \models_T \Delta.$$

$$4) \exists x \Phi, \Gamma_A \models_{CI} \Delta \Rightarrow R_z^x(\Phi), \Gamma_A \models_{CI} \Delta;$$

$$5) \exists x \Phi, \Gamma_A \models_T \Delta \Rightarrow R_z^x(\Phi), \Gamma_A \models_T \Delta,$$

$$\Gamma_A \models_F \neg \exists x \Phi, \Delta \Rightarrow \Gamma_A \models_F \neg R_z^x(\Phi), \Delta;$$

$$6) \text{ невірно } \exists x \Phi, \Gamma_A \models_F \Delta \Rightarrow R_z^x(\Phi), \Gamma_A \models_F \Delta \text{ та}$$

$$\text{невірно } \Gamma_A \models_T \neg \exists x \Phi, \Delta \Rightarrow \Gamma_A \models_T \neg R_z^x(\Phi), \Delta.$$

Теорема 18. Для логік антитонних предикатів:

$$1) \Gamma_A \models_{Cm} \Delta, \exists x \Phi, R_z^x(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma_A \models_{Cm} \Delta, \exists x \Phi.$$

$$2) \Gamma_A \models_F \Delta, \exists x \Phi, R_z^x(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma_A \models_F \Delta, \exists x \Phi; \text{ невірно}$$

$$\Gamma_A \models_T \Delta, \exists x \Phi, R_z^x(\Phi) \Rightarrow \Gamma_A \models_T \Delta, \exists x \Phi;$$

$$3) \Gamma, \neg \exists x \Phi, \neg R_z^x(\Phi) \models_T \Delta \Leftrightarrow \Gamma, \neg \exists x \Phi_A \models_T \Delta;$$

$$\text{невірно } \Gamma, \neg \exists x \Phi, \neg R_z^x(\Phi) \models_F \Delta \Rightarrow \Gamma, \neg \exists x \Phi_A \models_F \Delta.$$

$$4) \exists x \Phi, \Gamma_A \models_{Cm} \Delta \Rightarrow R_z^x(\Phi), \Gamma_A \models_{Cm} \Delta;$$

$$5) \exists x \Phi, \Gamma_A \models_F \Delta \Rightarrow R_z^x(\Phi), \Gamma_A \models_F \Delta;$$

$$\Gamma_A \models_T \neg \exists x \Phi, \Delta \Rightarrow \Gamma_A \models_T \neg R_z^x(\Phi), \Delta;$$

$$6) \text{ невірно } \exists x \Phi, \Gamma_A \models_T \Delta \Rightarrow R_z^x(\Phi), \Gamma_A \models_T \Delta \text{ та}$$

$$\text{невірно } \Gamma_A \models_F \neg \exists x \Phi, \Delta \Rightarrow \Gamma_A \models_F \neg R_z^x(\Phi), \Delta.$$

Наслідок 3. Для логік еквітонних і логік антитонних предикатів не завжди вірні:

$$1) \Gamma_A \models_{TF} \Delta, \exists x \Phi, R_z^x(\Phi) \Rightarrow \Gamma_A \models_{TF} \Delta, \exists x \Phi;$$

$$2) \Gamma, \neg \exists x \Phi, \neg R_z^x(\Phi) \models_{TF} \Delta \Rightarrow \Gamma, \neg \exists x \Phi_A \models_{TF} \Delta;$$

$$3) \exists x \Phi, \Gamma_A \models_{TF} \Delta \Rightarrow R_z^x(\Phi), \Gamma_A \models_{TF} \Delta;$$

$$4) \Gamma_A \models_{TF} \neg \exists x \Phi, \Delta \Rightarrow \Gamma_A \models_{TF} \neg R_z^x(\Phi), \Delta.$$

4. X - Y -означені відношення логічного наслідку

При формалізації за допомогою секвенційних числені відношень $\models_T, \models_F, \models_{TF}$, а також відношення \models_{CI} для загального випадку логік часткових однозначних предикатів та відношення \models_{Cm} для загального випадку логік тотальних неоднозначних предикатів, необхідно врахувати те, що значення предиката $P(d)$ може бути різним залежно від того, входить чи не входить до d компонента з певним предметним іменем. Це має принципний характер, адже робить неможливою (теореми 15, 17, 18) елімінацію кванторів для цих відношень. Тому при інтерпретаціях формул на моделях мови необхідно явно виділяти множини означених та неозначених імен даних, до яких застосовуються предикати. На цій основі

для логік однозначних часткових предикатів запропоновано [5] поняття X - Y -означених відношень логічного наслідку. В даній роботі дослідження таких відношень поширимо на логіки неоднозначних предикатів.

Множини X, Y диз'юнктні, якщо $X \cap Y = \emptyset$.

Для довільних диз'юнктних $X, Y \subseteq V$ задаємо множину X - Y -означених V -IM:

$${}^{V, X, Y}A = \{d \in {}^V A \mid X \subseteq \text{asn}(d) \text{ та } Y \cap \text{asn}(d) = \emptyset\}.$$

X - Y -означеність полягає в тому, що імена із X мають значення, імена із Y – не мають значення.

Якщо $Y = \emptyset$, то отримуємо множину X -означених V -IM:

$${}^{V, X}A = \{d \in {}^V A \mid X \subseteq \text{asn}(d)\}.$$

Якщо $X = \emptyset$, то маємо множину Y -неозначених V -IM:

$${}^{V, Y}A = \{d \in {}^V A \mid Y \cap \text{asn}(d) = \emptyset\}.$$

Із визначень отримуємо:

$${}^{V, X, Y}A = {}^{V, X}A \cap {}^{V, Y}A;$$

$${}^{V, X, \emptyset}A = {}^{V, X}A \cap {}^{V, \emptyset}A;$$

$${}^{V, \emptyset, Y}A = {}^{V, \emptyset}A \cap {}^{V, Y}A.$$

Твердження 1. Нехай $Z, W, U \subseteq V$ – диз'юнктні множини. Тоді ${}^{V, W \cup U}A = \bigcup_{Y \subseteq Z} {}^{V, W \cup Y - U \cup (Z \setminus Y)}A$

Зокрема, для довільної $Z \subseteq V$ маємо

$${}^V A = \bigcup_{Y \subseteq Z} {}^{V, Y - Z \cup Y} A.$$

Для довільних диз'юнктних $X, Y \subseteq V$ визначимо X - Y -означені області істинності та хибності предиката P :

$$T_{X, Y}(P) = \{d \in {}^{V, X, Y}A \mid P(d) = T\};$$

$$F_{X, Y}(P) = \{d \in {}^{V, X, Y}A \mid P(d) = F\}.$$

Таким чином, беремо до уваги тільки ті елементи областей істинності та хибності предиката, в яких імена із X мають значення, імена із Y не мають значення.

Якщо $Y = \emptyset$, то маємо X -означені області істинності й хибності $T_X(P)$ та $F_X(P)$.

Якщо $X = \emptyset$, то маємо Y -неозначені області істинності й хибності $T_Y(P)$ та $F_Y(P)$.

Із визначень маємо:

$$T_{X, Y}(P) \subseteq T_X(P) \subseteq T(P) \text{ та}$$

$$F_{X, Y}(P) \subseteq F_X(P) \subseteq F(P);$$

$$T_{X, Y}(P) \subseteq T_Y(P) \subseteq T(P) \text{ та}$$

$$F_{X, Y}(P) \subseteq F_Y(P) \subseteq F(P).$$

Теорема 19. При умові $u \in Y$ справджуються співвідношення:

$$T_{Y, Z}(R_y^x(P)) \subseteq T_{Y, Z}(\exists x(P));$$

$$F_{Y, Z}(\exists x(P)) \subseteq F_{Y, Z}(R_y^x(P));$$

$$T_{Y-Z}(\forall x(P)) \subseteq T_{Y-Z}(R_Y^x(P));$$

$$F_{Y-Z}(R_Y^x(P)) \subseteq F_{Y-Z}(\forall x(P)).$$

Для довільних диз'юнктивних $X, Y \subseteq V$ задамо X - Y -означені відношення наслідку для двох формул при інтерпретації на фіксованій моделі мови A .

$$\Phi_{A,X,Y} =_{CI} \Psi, \text{ якщо } T_{X-Y}(\Phi_A) \cap F_{X-Y}(\Psi_A) = \emptyset;$$

$$\Phi_{A,X,Y} =_{Cm} \Psi, \text{ якщо } T_{X-Y}(\Phi_A) \cup F_{X-Y}(\Psi_A) = {}^V_{X-Y} A;$$

$$\Phi_{A,X,Y} =_T \Psi, \text{ якщо } T_{X-Y}(\Phi_A) \subseteq T_{X-Y}(\Psi_A);$$

$$\Phi_{A,X,Y} =_F \Psi, \text{ якщо } F_{X-Y}(\Psi_A) \subseteq F_{X-Y}(\Phi_A);$$

$$\Phi_{A,X,Y} =_{TF} \Psi, \text{ якщо}$$

$$T_{X-Y}(\Phi_A) \subseteq T_{X-Y}(\Psi_A) \text{ та } F_{X-Y}(\Psi_A) \subseteq F_{X-Y}(\Phi_A).$$

Якщо $Y = \emptyset$, то маємо X -означені відношення наслідку $A, X \models_{CI} A, X \models_{Cm} A, X \models_T A, X \models_F A, X \models_{TF} A$.

Якщо $X = \emptyset$, то маємо Y -неозначені відношення наслідку $A, -Y \models_{CI} A, -Y \models_{Cm} A, -Y \models_T A, -Y \models_F A, -Y \models_{TF} A$.

У випадку $X = Y = \emptyset$ маємо відомі [4] відношення $A \models_{CI} A, A \models_{Cm} A, A \models_T A, A \models_F A, A \models_{TF} A$.

Введені вище відношення рефлексивні й транзитивні.

Поширимо відношення X - Y -означеного наслідку при інтерпретації на фіксованій моделі мови A на довільні множини формул.

$$\Gamma_{A,X,Y} =_{CI} \Delta, \text{ якщо}$$

$$\bigcap_{\Phi \in \Gamma} T_{X-Y}(\Phi_A) \cap \bigcap_{\Psi \in \Delta} F_{X-Y}(\Psi_A) = \emptyset.$$

$$\Gamma_{A,X,Y} =_{Cm} \Delta, \text{ якщо}$$

$$\bigcup_{\Phi \in \Gamma} F_{X-Y}(\Phi_A) \cup \bigcup_{\Psi \in \Delta} T_{X-Y}(\Psi_A) = {}^V_{X-Y} A.$$

$$\Gamma_{A,X,Y} =_T \Delta, \text{ якщо}$$

$$\bigcap_{\Phi \in \Gamma} T_{X-Y}(\Phi_A) \subseteq \bigcup_{\Psi \in \Delta} T_{X-Y}(\Psi_A).$$

$$\Gamma_{A,X,Y} =_F \Delta, \text{ якщо}$$

$$\bigcap_{\Psi \in \Delta} F_{X-Y}(\Psi_A) \subseteq \bigcup_{\Phi \in \Gamma} F_{X-Y}(\Phi_A).$$

$$\Gamma_{A,X,Y} =_{TF} \Delta, \text{ якщо}$$

$$\bigcap_{\Phi \in \Gamma} T_{X-Y}(\Phi_A) \subseteq \bigcup_{\Psi \in \Delta} T_{X-Y}(\Psi_A) \text{ та}$$

$$\bigcap_{\Psi \in \Delta} F_{X-Y}(\Psi_A) \subseteq \bigcup_{\Phi \in \Gamma} F_{X-Y}(\Phi_A).$$

Аналогічним чином вводимо X -означені та Y -неозначені відношення наслідку для множин формул: $A, X \models_{CI} A, X \models_{Cm} A, X \models_T A, X \models_F A, X \models_{TF} A$ та $A, -Y \models_{CI} A, -Y \models_{Cm} A, -Y \models_T A, -Y \models_F A, -Y \models_{TF} A$.

У випадку $X = Y = \emptyset$ отримуємо відношення $A \models_{CI} A, A \models_{Cm} A, A \models_T A, A \models_F A, A \models_{TF} A$.

Відношення $A, X, Y \models \cdot, A, X \models \cdot, A, -Y \models \cdot, A, -Y \models \cdot$ рефлексивні, проте нетранзитивні.

Твердження 2. Із визначень отримуємо:

$$1) \Gamma_A \models \cdot \Delta \Rightarrow \Gamma_A, X \models \cdot \Delta \Rightarrow \Gamma_A, X, Y \models \cdot \Delta;$$

$$2) \Gamma_A \models \cdot \Delta \Rightarrow \Gamma_A, -Y \models \cdot \Delta \Rightarrow \Gamma_A, X, -Y \models \cdot \Delta.$$

Твердження 3. Нехай $\Gamma_{A,X,Y} \models \cdot \Delta$ та $\Gamma \subseteq \Lambda$ і $\Delta \subseteq \Sigma$; тоді $\Lambda_{A,X,Y} \models \cdot \Sigma$.

Твердження 4. Нехай z тотально строго неістинне та $z \notin \text{int}(\Gamma \cup \Delta)$. Тоді:

$$\Gamma_A, \{z\} \cup X, -Y \models \cdot \Delta \Leftrightarrow \Gamma_A, X, -Y \models \cdot \Delta;$$

Теорема 20. Нехай $Z, W, U \subseteq V$ – диз'юнктивні множини. Тоді

$$\Gamma_A, W, U \models \cdot \Delta \Leftrightarrow \text{для кожної } Y \subseteq Z \text{ маємо}$$

$$\Gamma_A, W \cup Y, U \cup (Z \setminus Y) \models \cdot \Delta.$$

Твердження 5. Для еквівалентних предикатів у неокласичній семантиці при $z \in X$ та $u \in Y$ маємо:

$$1) R_{Y,Y}^{x,\bar{u}}(\Phi), \Gamma_{A,X,Y} \models_T R_{Z,Y}^{x,\bar{u}}(\Phi), \Delta \text{ та}$$

$$\neg R_{Y,Y}^{x,\bar{u}}(\Phi), \Gamma_{A,X,Y} \models_T \neg R_{Z,Y}^{x,\bar{u}}(\Phi), \Delta;$$

$$2) R_{Z,Y}^{x,\bar{u}}(\Phi), \Gamma_{A,X,Y} \models_F R_{Y,Y}^{x,\bar{u}}(\Phi), \Delta \text{ та}$$

$$\neg R_{Z,Y}^{x,\bar{u}}(\Phi), \Gamma_{A,X,Y} \models_F \neg R_{Y,Y}^{x,\bar{u}}(\Phi), \Delta.$$

Аналогічне твердження формулюється для антитонічних предикатів в пересиченій семантиці.

Для формул вигляду $R_X^{\bar{v}} \Phi$ можна ввести [5] поняття U -неозначуваної форми.

Тут $U \subseteq V$ – довільна множина предметних імен, її трактуємо як множину неозначених імен. Це означає, що при інтерпретаціях усі імена U не мають значення.

Нехай $R_{s_1 \dots s_k, y_1 \dots y_n, v_1 \dots v_m}^{r_1 \dots r_k, x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_m} \Phi$ така: усі

$$r_1, \dots, r_k, s_1, \dots, s_k, y_1, \dots, y_n \in U, \{x_1, \dots, x_n\} \cap U = \emptyset, \{v_1, \dots, v_m\} \cap U = \emptyset.$$

U -неозначувана форма формули

$$R_{s_1 \dots s_k, y_1 \dots y_n, v_1 \dots v_m}^{r_1 \dots r_k, x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_m} \Phi \text{ – це вираз вигляду}$$

$$R_{\perp, \perp, \dots, \perp, y_1 \dots y_n, v_1 \dots v_m}^{x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_m} \Phi, \text{ де } \perp \text{ – спеціальний символ, який позначає невизначене значення.}$$

Нехай $R_b^{\bar{v}} \Phi$ та $R_c^{\bar{v}} \Phi$ мають однакові U -неозначувані форми. Тоді для кожної моделі мови A маємо: $R_b^{\bar{v}} \Phi_A(d) = R_c^{\bar{v}} \Phi_A(d)$ для всіх $d \in {}^V_{U,A}$, де усі імена U не мають значення.

Таким чином, отримуємо властивість:

$$UnD) \text{ Якщо } R_x^{\bar{v}} \Phi \text{ та } R_y^{\bar{v}} \Phi \text{ мають однакові}$$

$$U\text{-неозначувані форми, то } \Gamma_A, U \models \cdot R_x^{\bar{v}} \Phi, \Delta.$$

Розглянемо властивості елімінації кванторів для X - Y -означених відношень логічного наслідку.

Теорема 21. При умові $z \in X$ маємо:

$$1) \Gamma, \exists x \Phi_{A,X,Y} \models \cdot \Delta \Rightarrow \Gamma, R_z^x(\Phi)_{A,X,Y} \models \cdot \Delta;$$

$$2) \Gamma_{A,X,Y} \models \cdot \forall x \Phi, \Delta \Rightarrow \Gamma_{A,X,Y} \models \cdot R_z^x(\Phi), \Delta.$$

Теорема 22. Нехай z тотожно строго неістотне та $z \in \text{nt}(\Gamma, \Delta, \Phi)$. Тоді при $z \in X$:

$$1) R_z^x(\Phi), \Gamma_{A, X-Y} \models \Delta \Rightarrow \exists x \Phi, \Gamma_{A, X-Y} \models \Delta;$$

$$2) \Gamma_{A, X-Y} \models \neg R_z^x(\Phi), \Delta \Rightarrow \Gamma_{A, X-Y} \models \neg \exists x \Phi, \Delta.$$

Із теорем 21 та 22 отримуємо таку властивість елімінації кванторів.

Нехай $z \in V$ тотожно строго неістотне та $z \in \text{nt}(\Gamma, \Delta, \Phi)$. Тоді при $z \in X$ маємо:

$$\exists x \neg \Gamma \vdash \Gamma, \exists x \Phi_{X-Y} \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma, R_z^x(\Phi)_{X-Y} \models \Delta;$$

$$\neg \exists x \neg \Gamma \vdash \Gamma_{X-Y} \models \neg \exists x \Phi, \Delta \Leftrightarrow \Gamma_{X-Y} \models \neg R_z^x(\Phi), \Delta.$$

Теорема 23. При умові $z \in X$ маємо:

$$1) \Gamma_{A, X-Y} \models \Delta, \exists x \Phi, R_z^x(\Phi) \Rightarrow \Gamma_{A, X-Y} \models \Delta, \exists x \Phi;$$

$$2) \Gamma, \neg \exists x \Phi, \neg R_z^x(\Phi)_{A, X-Y} \models \Delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma, \neg \exists x \Phi_{A, X-Y} \models \Delta.$$

На основі твердження 3 та теореми 23 маємо:

Теорема 24. Нехай $Z, W, U \subseteq V$ – диз'юнктні множини, нехай $Y \subseteq Z$. Тоді:

$$1) \Gamma_{A, W \cup Y \cup (A(Z))} \models \Delta, \exists x \Phi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Gamma_{A, W \cup Y \cup (A(Z))} \models \Delta, \exists x \Phi, R_{y_1}^x(\Phi), \dots, R_{y_n}^x(\Phi), \dots,$$

де всі $y_i \in Y$;

$$2) \neg \exists x \Phi, \Gamma_{A, W \cup Y \cup (A(Z))} \models \Delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \neg R_{y_1}^x(\Phi), \dots, \neg R_{y_n}^x(\Phi), \dots, \Gamma_{A, W \cup Y \cup (A(Z))} \models \Delta,$$

де всі $y_i \in Y$.

Беручи до уваги теорему 20, звідси маємо таку властивість елімінації кванторів.

Нехай $Z, W, U \subseteq V$ – диз'юнктні множини. Тоді:

$$\text{Br} \neg \exists \vdash \Gamma_{A, W \cup U} \models \Delta, \exists x \Phi \Leftrightarrow \text{для кожної } Y \subseteq Z$$

$$\Gamma_{A, W \cup Y \cup (A(Z))} \models \Delta, \exists x \Phi, R_{y_1}^x(\Phi), \dots, R_{y_n}^x(\Phi), \dots,$$

де всі $y_i \in Y$.

$$\text{Br} \neg \exists \vdash \neg \exists x \Phi, \Gamma_{A, W \cup U} \models \Delta \Leftrightarrow \text{для кожної } Y \subseteq Z$$

$$\neg \exists x \Phi, \neg R_{y_1}^x(\Phi), \dots, \neg R_{y_n}^x(\Phi), \dots, \Gamma_{A, W \cup Y \cup (A(Z))} \models \Delta,$$

де всі $y_i \in Y$.

Висновки

В роботі вивчаються чисті першопорядкові композиційно-номінативні логіки часткових односторонніх, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних квазіарних предикатів. Описано мови та семантичні моделі таких логік, досліджено їх семантичні властивості. Розглянуто різні формалізації відношення логічного наслідку для пар та для множин формул, зокрема, спеціальні X - Y -означені відношення. Досліджено властивості цих відношень в різних семантиках для загального випадку логік квазіарних предикатів, для логік еквітонних і логік антитонних предикатів. На цій основі будуть побудовані числення секвенційного типу, які формалізують відповідні відношення логічного наслідку.

Список використаних джерел

1. Нікітченко Н.С. Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы / Н.С.Никитченко // Пробл. программирования. – 1999. – № 1. – С. 16–31.
2. Нікітченко М.С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М.С.Нікітченко, С.С.Шкільняк. – К.: ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
3. Шкільняк С.С. Відношення логічного наслідку в композиційно-номінативних логіках / С.С.Шкільняк // Проблеми програмування. – 2010. – № 1 – С. 15–38.
4. Смирнова Е.Д. Логика и философия / Е.Д.Смирнова. – М.: РОССПЕН, 1996. – 304 с.
5. Шкільняк С.С. Логика квазіарных предикатов первого порядка / С.С.Шкільняк // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 6 – С. 32–49.
6. Клини С. Математическая логика / С. Клини. – М.: Мир, 1973. – 480 с.

Надійшла до редколегії 20.10.2011

УДК 004.89

Порхун О.В., к.ф.-м.н., асист., Березань І.О.,
аспірантка.**Застосування нейронних мереж до задачі
вибору оптимальної енергетичної
стратегії України**

У статті розглянуто застосування нейронних мереж для розв'язку задачі визначення кількісних складових оптимальної енергетичної стратегії держави: загального обсягу виробництва енергії, його структурного розподілу, а також відсотку відновлювальної енергії. Застосована модель багатошарового перцептрону, навчена за алгоритмом зворотного розповсюдження помилки, дозволяє зробити прогноз розвитку енергетики на період 2011-2030 рр., враховуючи статистику минулих років та цільові на 2030 р. показники. Проаналізовано 4 стратегії, що пропонують сучасні українські і зарубіжні економісти.

Ключові слова: нейронні мережі, багатошаровий перцептрон, алгоритм зворотного розповсюдження помилки, паливно-енергетичний баланс.

E.V. Porkhun, PhD, I.O. Berezan.

**Using neural networks for optimal energetic
strategy determination**

The article describes neural networks using for optimal energetic strategy determination problem (includes total value and structural dispersion of energy production estimation, optimal percent of renewable energy calculating). We used multilayer perceptron model with back-propagation learning algorithm for energy-economics dynamics predicting (2010-2030 years period). Input data contains statistical data of prevent years and goal data for 2030 year. Four strategies discussing in nowadays scientific works were analyzed.

Key Words: neural networks, multilayer perceptron, back-propagation algorithm, fuel and energy balance.

*E-mail: gpugovka@gmail.com, elena_porkhun@mail.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Державне стратегічне планування паливно-енергетичного сектору економіки є, по-перше, вимогою МВФ, по-друге, запорукою ефективної енергетичної політики.

Задача вибору оптимальної енергетичної стратегії держави полягає у визначенні таких показників обсягу, структурного розподілу виробництва енергії, і, відповідно, необхідних енергоресурсів та цін на енергію, що сприятимуть повноцінному досягненню встановленої державою мети періоду. До мети, зокрема, входять показники обсягу і структурного розподілу на кінець періоду, що видаються найефективнішими з економічної (фінансова вигода), соціальної (здешевлення енергії і повноцінне задоволення споживачів) та екологічної (збільшення відсотку відновлювальної енергії) точок зору.

Основним документом, що визначає мету поточної енергетичної політики України, поточні шляхи і механізми її досягнення є "Енергетична стратегія на період до 2030 року", прийнята у

2006 році. Оголошена загальна мета включає, по-перше, створення конкурентоспроможної економіки, по-друге, зростання рівня життя громадян, по-третє зниження енергомісткості національного продукту. Отже, оптимальна енергетична стратегія має враховувати одночасно інтереси трьох секторів: підприємств, домашніх господарств та держави, які з економічної точки зору не збігаються. Кількісно чинна стратегія пропонує поступове зростання обсягу виробництва до його збільшення у 2030 р. вдвічі порівняно з 2006 р., стримування зростання споживання (що має стимулюватися прогнозованим зростанням ВВП), поетапну зміну у структурі виробництва енергії станціями (на 2005 р.: ТЕС та ТЕЦ — 46,8%, АЕС — 47,9%, ГЕС та ГАЕС — 12,3%, блок-станції та інші джерела — 8,6%; на 2030 р. передбачено: ТЕС та ТЕЦ — 39,8%, АЕС — 52,1%, ГЕС та ГАЕС — 18,6%, блок-станції та інші джерела — 15,5%), а також досягнення у 2030 р. частки відновлювальної енергії на рівні 6%.[7]

Стратегія виділяє три етапи розвитку енергетичного сектору. Перший закінчився у 2010 р., проте, визначених цілей не було досягнуто. Це викликало активне обговорення у засобах масової інформації та дослідження вітчизняними і зарубіжними економістами можливих шляхів поліпшення існуючої енергетичної стратегії України.

Багатьом запропонованим модифікаціям стратегії, що зустрічаються у роботах українських економістів не вистачає математичного обґрунтування. Обґрунтоване дослідження питання проводиться доктором Майснером та Укердтом у рамках проекту Німецького Бурдендестагу, а також у роботі Гелетуши та Долинського представлений на III Міжнародній конференції з використання енергії біомаси. У першій роботі використовується еколого-економічна модель типу REMIND [5], яка побудована на основі економічних закономірностей. Недоліком є те, що у місцях, де рівняння моделі, оснований на економічних і екологічних законах не вистачає параметрів (бо в Україні немає досвіду впровадження розповсюджених у розвинутих країнах технологій), до розрахунків залучаються статистичні дані розвинутих країн. Через це отримані результати можуть виявитися певним чином викривленими, не застосовними до української економіки. У праці Гелетуши і Долинського розглянуто динаміку розвитку відновлювальних джерел залежно від інсталяційних витрат на одиницю встановленої потужності, динаміки витрат на первинні енергоносії, обсягу державної підтримки. Побудована модель мінімізує загальні витрати [6].

Проблему великої кількості непевних і невідомих параметрів у економічних задачах добре розв'язують за допомогою нейронних мереж — це чисельний метод математичного моделювання, що дозволяє відображати складні лінійні та нелінійні взаємозв'язки між елементами (нейронами). За допомогою нейронних мереж зарубіжні економісти досліджують різноманітні економічні явища, прогнозують показники ВВП, індекси цін, поведінку учасників ринку, показники фінансових ринків тощо. [3,4] В Україні моделі на нейронних мережах поки що не дуже розповсюджені, в основному використовуються виведення на основі економічних законів і припущень, а серед чисельних методів — багатofакторна лінійна регресія. Оскільки багатofакторна лінійна регресія є частковим

лінійним випадком найпростішого виду нейронних мереж — одношарового перцептрону, то їх застосування у випадку нелінійних залежностей дає розв'язок із значною похибкою, а у деяких випадках принципово невірний. Нейронні мережі у загальному випадку дозволяють відображати нелінійні зв'язки між факторами і давати набагато точніший результат. Крім того, методи нейронних мереж виявляють статистичну кореляцію між факторами, не вимагаючи даних усіх змінних присутніх у економічній залежності. Отже їх застосування до нашої задачі виглядає надзвичайно підходящим.

У даній роботі запропоновано економічну модель залежності структури виробництва енергії за видами від факторів впливу. На основі цієї моделі побудована нейронна мережа, що після навчання на даних минулих періодів здатна давати прогнози розвитку для різних стратегій розподілу виробництва енергії за видами на наступні 5 років, за даними від кінцевих показників, що задані енергетичною політикою.

Виявлення факторів і економічна модель

Підприємства-виробники енергії та допоміжні ПЕК (видобувні, транспортувальні, посередницькі) в Україні пов'язані у гоміоду тісно-сплетену структуру, яка значним чином зазнає впливу держави через окремі її елементи. Цей факт з одного боку переконує, що потенційно існують важелі впровадження ефективної енергетичної стратегії, з іншого показує важливість врахування у нашій задачі одночасно макроекономічних та мікроекономічних факторів. Прагнучи оптимізувати діяльність усього сектору, максимізувати його прибутковість, центральний планувальник має аналізувати ті самі фактори, що формують попит і пропозицію, використовувати їх в прогнозуванні наслідків застосування своїх стратегій. На оптимальний структурний розподіл виробництва енергії за видами, впливають, як фактори пропозиції (виробничі, технічні, фінансові можливості та обмеження), так і попиту (з точки зору загальної кількості потрібної споживачам енергії, якщо структурний розподіл визначати в абсолютних величинах).

Розглянемо вигляд функції попиту:

$$Q_i = f_i(P_0, PR_1, \dots, PR_n, TP, TS, E, N, W, R, I(r), t, v),$$

де P_0 — ціна енергії даного виду; PR_1, \dots, PR_n — ціна первинних енергоресурсів для даного виду; TP, TS — відповідно податки і субсидії, дотації у галузь; E — очікування виробників, які можна

представляти у вигляді показників загальної економічної ситуації в країні, зокрема показниками інфляції (можна брати інфляцію загальну або ІСЦ виробників), ВВП, а також їх відсоткову зміну порівняно з минулим періодом; N – природні і територіальні умови, сприятливість до видобутку первинних енергоносіїв тощо; W – загальна потужність станцій виду (максимальна); R – рентабельність галузі; l – схильність до інвестування учасників ринку, що залежить від g – облікова ставка НБУ, як показник, що дозволяє співставити вигоду виробників від інвестицій у виробництво із вигодою від збереження грошей на банківських рахунках; t – технічний і технологічний стан галузі, зношеність, V – середній відсоток відновлювальної енергії.

Фактор t – технічний і технологічний стан галузі може для одної держави, де технологічний рівень приблизно однаковий характеризуватися віком станцій, а для України, де будівництво станцій відбулося ще в часи СРСР, приблизно в один період по виду станцій, просто номером року прогнозування. Середній відсоток відновлювальної енергії V – декларується у Енергетичній стратегії.

Розглянемо вигляд функції пропозицій:

$$Q_d = f_d(P_0, P_1, \dots, P_n, Z, E, U, Y, Y_0, C(r), q, p)$$

, де P_0 – ціна енергії даного виду; PR_1, \dots, PR_n – ціна енергії інших видів (субститутів); Z – смаки і потреби споживачів, залежать від структурного розподілу споживачів на населення, підприємства, державу і сектор закордон; E – очікування споживачів, які можна представляти у вигляді показників загальної економічної ситуації в країні, зокрема показниками інфляції (можна брати інфляцію загальну або ІСЦ споживачів і виробників окремо), ВВП, а також їх відсоткову зміну порівняно з минулим періодом; U – об'єктивні умови споживання, що виражаються окремим показником або як функція схильності до споживання, що і їх враховує; Y – грошовий дохід споживачів (можна окремо розглядати населення – заробітна плата, виробників – фінансовий результат діяльності після оподаткування, держави – профіцит / дефіцит бюджету); Y_0 – нагромаджене багатство, може відобразитися окремо за кожною групою споживачів (населення, виробники, держава) або, у спрощенні, – загальним рівнем ВВП; C – схильність до споживання учасників ринку, що залежить від g – ціни поточного використання грошей

споживачами, залежить від облікової ставки; q – якість енергії, якщо це важливо; p – чисельність споживачів.

Фактори E , Y , Y_0 добре відображаються показниками ВВП і інфляції, за припущеннями моделі якість q для споживачів не важлива, його можна виключити. Фактори споживання Z та $C(r)$ характеризуються як абсолютним значенням споживання, так і обліковою ставкою НБУ (ціна споживання), які разом відображають схильність до споживання. Показник рентабельності R – це відношення отриманого прибутку до здійснених витрат, а отже акумулює у собі фактори доходів і витрат для галузі. У моделі замінімо його факторами доходів і витрат виробництва на певний вид енергії. Серед факторів попиту окремого передбачення вимагали показники інфляції, ВВП і чисельність населення. Чисельність населення має неекономічне підґрунтя, тому ми користувалися відомими прогнозами. Щодо споживання, то брали не абсолютні значення, а поділене на кількість споживачів, тобто схильність до споживання, і припустили її сталість на рівні останнього відомого періоду.

Важливим аспектом моделі є нелінійність функцій попиту і споживання f_d і f_s , за явно вираженого сигмоїдального характеру функцій: бажання виробників виробляти енергію за малої рентабельності, є дуже малим, стрімко зростає при її збільшенні, за певного високого рівня прямує до максимального завантаження потужностей, а за певного низького обертається у нуль (не вигідно інвестувати взагалі).

У моделі припускається байдужість користувачів до якісних характеристик виду енергії, їх вибір базується лише на мінімізації вартості. Це дозволяє порівнювати види енергії. Для досконалішого моделювання варто ввести певний якісний показник. Оскільки прогноз робиться на 5 років, а будівництво станцій у середньому займає 5-10 років, ми виключили можливість появи «неочікуваних» нових потужностей. Як потужність брали загальну за видом, максимальну можливу пропозицію, що рівна сумі потужностей усіх станцій виду.

Таким чином, основні фактори, що визначають попит і пропозицію на певний вид енергії, а отже і структурний розподіл її виробництва за видами наступні:

- вартість готової енергії;
- витрати на оплату праці у галузі;
- рентабельність у галузі;

- вартість первинних енергоресурсів у одиниці продукції (добуток ціни ПЕР на його відсоток у одиниці енергії);
- витрати на модернізацію і будівництво нових станцій;
- відсоток облікової ставки, як ціна інвестування грошей;
- сумарна потужність, вартість і витрати інших видів енергії;
- очікування споживачів;
- грошовий дохід споживачів та нагромаджене багатство;
- сумарна потужність виду станцій;
- споживання державою;
- споживання населенням;
- споживання виробництвом;
- експорт та імпорт;
- чисельність споживачів і їх схильність до споживання;
- епоха, економічна ситуація в країні.

Архітектура нейронної мережі

Архітектуру нейронної мережі побудовано згідно описаної економічної моделі. Використано річні статистичні показники 2001-2010 рр., які наведені у звітах УкрМінПаливЕнерго, Держкомстату, Енергетичній стратегії, аналітичний записці досліджень енергетики України Німецьким Бундестагом у 2010 р. За модель обрано тришаровий: на першому шарі 16 нейронів вхідних факторів; другий шар проміжний – 32 нейрони; третій вихідний шар – 4 нейрони, виходи – попит на енергію за видами станцій, що її виробляють: АЕС, ТЕС та ТЕЦ, ГЕС та інші види. До інших видів входять вітрові, невеликі геотермальні, біогазові блочні місцевого рівня та енергія малих рік. Останні два види належать до відновлювальних джерел.

Навчання мережі проведено за алгоритмом зворотного розповсюдження помилки. За функцію активації брався гіперболічний тангенс, що є прийнятним з економічної точки зору на вигляд функцій попиту і пропозиції. Практичне апробування деяких інших функцій, зокрема, логарифмічної функції, лінійної та сигмоїду, дало суттєво гірші результати, як по якості прогнозованих результатів (більші відхилення на навчальній вибірці при тестуванні), так і по часу.

Деякі з виділених статистичних коефіцієнтів, через дію економічних законів, взаємно виражаються. Їх, разом з несуттєвими факторами, було виключено з розгляду, скоротивши кількість вхідних параметрів, а отже і необхідний обсяг даних для навчання мережі. Україна незалежна лише 19 років, її економіка за

ці часи була надзвичайно неоднорідною, а тому, статистичних даних для навчання обмаль. Показники чисельності населення бралися прогнози, на сайті міжнародної організації ecostat. Облікова ставка НБУ через складності її передбачення на такий довгий період (бо вона є декларативною і дуже залежить від суб'єктивних моментів), бралися на рівні поточного року. ВВП бралися заплановане на 2030 рік стратегією. Архітектуру нейронної мережі наведено нижче.

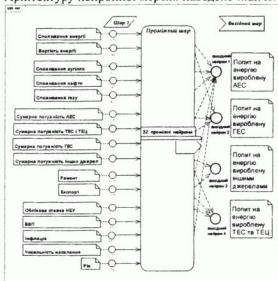


Рис. 1. Архітектура нейронної мережі.

Важливу роль у поліпшенні якості роботи мережі зіграло використання розрахунків проведених на проміжній мережі для прогнозування інфляції за факторами: грошова база, емісія готівки, облікова ставка, девальвація гривні до долара США, показник грошової маси М3 в іноземній валюті, офіційні резерви НБУ та ВВП. Описана мережа реалізовувалася моделлю багатозарового перцептрон, як функція активації використовувався гіперболічний тангенс. Архітектуру цієї мережі наведено нижче.

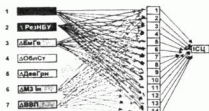


Рис. 2. Структура допоміжної нейронної мережі „Прогнозування показника інфляції”

Створення допоміжних під мереж для прогнозування проміжних показників і використання результатів у головній мережі, по-перше, дозволяє отримати вхідні вектори для прогнозу незадекларованих державними стратегіями складно передбачувальних показників, по-друге скоротити розмірність вхідного вектору, через врахування певної частини факторів у підмережах, що дуже важливо за обмеженої кількості даних.

Програма реалізація

Програма реалізація нейронної мережі відбувалась у середовищі NetBeans IDE 6.7.1. на мові програмування Java. Алгоритми роботи на нейронних мережах представлено у вигляді окремої бібліотеки. Нейронна мережа, що здійснює власне прогнозування структурного розподілу попиту на енергію реалізовувалася згідно побудованої архітектури у головному модулі програми з використанням цієї бібліотеки.

У процесі програмування підбиралася оптимальна кількість проміжних нейронів. Було з'ясовано, що найліпший результат система дає за кількості проміжних нейронів близькій до подвоєної кількості факторів, що збігається з теоретичними висновками Хайкена [1].

Дані для мережі було використано річні статистичні, а також цільові показники на 2030. Важливим аспектом було нормування показників до значень, менших 1. Це можливо через те, що для показників вимагається монотонність для швидшого досягнення мети, а ми знаємо початкові і кінцеві значення показників періоду. Подібний підхід дозволить звести різномірні показники, що мають різне суттєве наповнення до певного єдиного вимірника – частки базового значення.

Перевірка якості прогнозування проводилася спочатку на вибірці за 2001-2008 рр. та цільових даних на 2030 р. наступним чином:

1. Обирався вхідний вектор і виключався з навчальної вибірки;
2. Проводилося навчання системи без нього;
3. Виключений вектор подавався на входи системи і видавався результат – прогнозовані обсяги розподілу попиту за різними видами енергії;
4. Отримані значення порівнювалися з реальними, визначалося відхилення кожного вектору Δx_i ;
5. Вектор повертався до навчальної вибірки і брався наступний.

У кінці визначалося середньоквадратичне

відхилення для n вхідних векторів за формулою:

$$\chi = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}{n}} \quad (1)$$

Показовим є результат тестування на даних 2009 і 2010 рр., які участі у навчанні не брали. Відхилення прогнозного значення від фактичного склало 0,01% для ненормованих, і 0,00005% для нормованих даних.

Результати прогнозування на нейронній мережі та їх інтерпретація

Наступним етапом було отримання прогнозних обсягів виробництва енергії різних видів на 2011-2015 рр. Прогнози було зроблено для чотирьох різних стратегій розв'язку, що дає можливість зробити їх порівняльний аналіз.

Стратегія №1: Згідно з Енергетичною стратегією України на період до 2030. Вхідні економічні показники, попит на 2030 рік з його структурним розподілом та частка відновлювальних джерел у споживанні 2030-го року (6%) задаються згідно з цією стратегією.

рік	% відн. енер.	АЕС	ТЕС та ТЕЦ	ГЕС	Інші види
2001	1.01	76,169.1	77,952.6	12,109.4	5,920.5
2002	0.99	77,989.5	77,851.8	9,665.0	7,440.4
2003	1.01	81,408.0	80,085.3	9,253.6	8,826.5
2004	1.00	87,022.2	73,337.1	11,744.6	9,196.0
2005	0.99	88,756.1	75,514.9	12,320.6	8,587.1
2006	2.00	90,225.1	81,488.8	12,854.4	7,555.9
2007	2.01	92,542.4	84,253.9	10,098.3	8,226.3
2008	3.00	89,841.4	82,346.9	11,345.6	8,149.9
2009	3.00	82,924.1	71,056.6	11,768.7	7,135.1
2010	3.00	89,151.3	77,976.7	12,965.1	7,811.6
2011	2.99	89,052.2	77,852.5	12,964.9	7,783.8
2012	2.96	89,041.0	77,854.7	12,961.9	7,792.1
2013	2.94	89,011.9	77,852.6	12,932.7	7,793.8
2014	2.92	88,985.9	77,847.6	12,837.3	7,797.5
2015	2.87	88,876.5	77,798.7	12,104.7	7,796.7

Результати для стратегії 1. Таблиця 1.

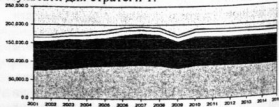


Рис. 3. Динаміка структурного розподілу обсягів виробництва за видами енергії для стратегії 1.

Стратегія №2: З підвищеною часткою відновлювальних джерел 10%. Вхідні економічні показники, попит на 2030 р., його структурний розподіл задаються за енергетичною стратегією.

Результати для стратегії 2. Таблиця 2.

рік	% відн. енер.	АЕС	ТЕС та ТЕЦ	ГЕС	інші види
2009	3.00	82 924.1	71 068.6	11 768.7	7 135.1
2010	3.00	89 151.3	77 976.7	12 965.1	7 811.6
2011	2.99	89 053.1	77 848.2	12 964.8	7 800.8
2012	2.98	89 034.0	77 858.0	12 961.4	7 803.0
2013	2.94	89 020.9	77 862.3	12 942.7	7 804.4
2014	2.93	88 999.5	77 870.1	12 864.6	7 805.4
2015	2.88	88 909.1	77 845.3	12 340.4	7 804.1
2030	9.94	219 000.0	167 000.0	18 600.0	15 500.0

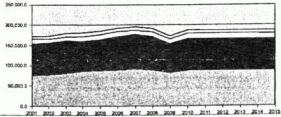


Рис. 4. Динаміка структурного розподілу обсягу виробництва за видами енергії для стратегії 2.

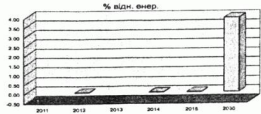


Рис. 5. Частка відновлювальної енергії стратегії 2.

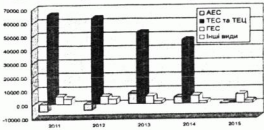


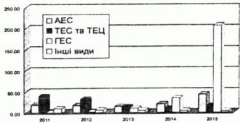
Рис. 6. Порівняльний графік стратегій 1 і 2.

Аналіз різниць з поточною стратегією показує, що Україна могла б, як стверджується у працях німецьких дослідників досягнути 10% відновлювальної енергії, проте за інших незмінних аспектів стратегії це могло б відбуватися лише за рахунок ГЕС. Проте потужності ГЕС зараз використовуються повністю. Отже, така стратегія потребує будівництва нових ГЕС, що чинною стратегією не передбачено.

Стратегія №3. З плаваючою часткою відновлювальних джерел. Вхідні економічні

показники і попит на 2030 рік з його структурним розподілом задаються згідно з енергетичною стратегією. Значення частки відновлювальних джерел не задається як мета.

рік	АЕС	ТЕС та ТЕЦ	ГЕС	інші види
2009	82 924.1	71 068.6	11 768.7	7 135.1
2010	89 151.3	77 976.7	12 965.1	7 811.6
2011	89 071.5	77 891.8	12 965.2	7 793.5
2012	89 058.2	77 886.8	12 963.4	7 796.2
2013	89 026.4	77 866.2	12 947.5	7 799.0
2014	89 006.7	77 857.9	12 871.4	7 801.6
2015	88 920.0	77 814.4	12 311.4	7 800.3
2030	219 000.0	167 000.0	18 600.0	15 500.0



Результати для стратегії 3.

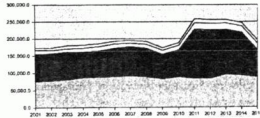
Таблиця 4.

Рис. 7. Порівняння стратегій 1 і 3.

Стратегія №4. Самоплинний розвиток. Частка відновлювальних джерел, попит із структурним розподілом 2030 р. є предметом

рік	АЕС	ТЕС та ТЕЦ	ГЕС	інші види
2011	83 936.8	143 427.6	18 591.9	11 672.2
2012	84 812.7	141 063.3	18 590.3	11 477.1
2013	96 748.3	130 397.6	18 592.5	9 897.8
2014	93 663.8	124 723.8	18 591.1	9 630.3
2015	88 739.7	77 814.4	18 588.3	9 537.4
2030	163 481.7	152 299.3	8 089.0	15 414.8

прогнозу.



Результати для стратегії 5.

Таблиця 5.

Рис. 8. Динаміка структурного розподілу обсягу виробництва за видами енергії для стратегії 4.

Різницю з 1-ю стратегією зображує діаграма.

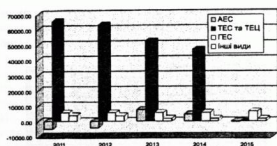


Рис. 9. Порівняння стратегій 1 і 4.

Стратегія №1 є шлях до мети Енергетичної стратегії заданої на 2030 рік. Стратегія №2 декларує за мету вищий відсоток відновлювальної енергії, для перевірки на можливість і шлях його досягнення. Порівняльний аналіз Стратегії №1 та Стратегії №3 ілюструє вплив мети, як такої, по відсотку відновлювальної енергії. Стратегія №4 показує ситуацію, коли Український енергетичний сектор виявляється без дій центрального планувальника, на основі вигід окремих учасників ринку.

Висновки

Проаналізувавши результати можна зробити наступні висновки і висунути можливі рекомендації вдосконалення енергетичної політики України.

1. Центральне регулювання і стратегічне планування для енергетичного сектору має

Список використаних джерел

1. Хайкин С. Нейронные сети. Полный курс. Второе издание // Москва-Санкт-Петербург-Киев. – 2008. – С. 115-126.
2. Анисимов А.В., Порхун Е.В., Тарануха В.Ю. Алгоритм формирования параметрического вектора для решения задач классификации нейронной сетью прямого распространения // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – №2. – С. 3-14.
3. Gonzalez St. „Neural Networks for Macroeconomic Forecasting: A Complementary Approach to Linear Regression Models”, Working Paper, – 2007. – С. 96-108.
4. Tkacz, Greg "Neural Network Forecasts of Canadian GDP Growth Using Financial

позитивний вплив на задоволення потреб економіки в цілому.

2. Встановлена стратегія розвитку енергетичного сектору дозволяє збільшити відсоток відновлювальної енергії з 6% до 9-10%, що проте потребує будівництва нових ГЕС.

3. Низький відсоток виконання плану по розбудові станцій, що використовують відновлювальні джерела енергії вказує на необхідність вжити додаткових заходів контролю за залученням коштів у цю галузь.

4. Скорочення надмірного попиту на енергію стимулюванням економного споживання і своєчасної її оплати підприємствами. Це можна зробити через підвищення цін для виробників.

5. Зупинити субсидювання певних галузей енергетики, що робить прибутковими збиткові галузі, гальмує розвиток сучасних технологій.

6. Необхідна розробка тактичних планів на ближні періоди одночасно з розробкою загальної стратегії. Тактичні завдання мають бути реальними, містити конкретні засоби досягнення, строки виконання, відповідальних осіб.

7. Потрібно вживати щоквартальні заходи контролю за виконанням тактичних завдань, з виявленням причин, що завадили виконанню плану і притягненням до службової відповідальності відповідальних осіб.

8. Необхідне переоснащення застарілих станцій, з введенням сучасних енергозберігаючих технологій. Забезпечити систему підготовки фахівців, їх навчання новим технологіям.

Variables", Bank of Canada, mimeo, April 1999. – С.43-57

5. Майснер Ф., Укердт С. Записки дослідження на основі рішення Німецького Бундестагу „Розвиток відновлюваних джерел в Україні: потенціал, перешкоди і рекомендації щодо економічної політики” // Київ, – 2010 рік.
6. Гелетуша Г.Г., Долінський А.А. Презентація на Третій Міжнародній Конференції з використання біомаси у енергетиці // Київ. – 2010. – С. 115-129.
7. Дані Держкомстату та енергетичної стратегії. Режим доступу — <http://www.ukrstat.gov.ua>

Надійшла до редколегії 06.12.2011

УДК 519.21

Прищеп* О.В., аспірант

Система типу $M/M/c/N$ з однією спробою повтору, керована гістерезисною стратегією

В роботі розглядається задача оптимального керування інтенсивністю вхідного потоку для системи типу $M/M/c/N$ з однією спробою повтору. Для даної системи використовується гістерезисна стратегія керування. Знайдено ефективний алгоритм підрахунку стаціонарних ймовірностей та явний вигляд функціоналу якості в стаціонарному режимі.

Ключові слова: стохастична система з повторними викликами, процес обслуговування, стаціонарні ймовірності, гістерезисна стратегія, оптимізація.

O.V. Pryshchepa*, the post-graduate student

Retrial queue $M/M/c/N$ - type with one repeated attempt is controlled by hysteresis strategy

In this paper, an optimal control problem of rate of the input flow for $M/M/c/N$ -type retrial queue with one repeated attempt is considered. Hysteresis strategy for this system is used. The effective algorithm for stationary probabilities and explicit form of quality functional in the stationary regime are found

Key Words: retrial queue, service process, stationary probabilities, hysteresis strategy, optimization.

*E-mail: o.prishepa@gmail.com

Статтю представив д.т.н., проф. Акіменко В.В.

В класичній теорії систем масового обслуговування, зазвичай, припускається, що вимога, яка надійшла в систему при зайнятості всіх каналів обслуговування, або стає в чергу та потім обслуговується відповідно до визначеної дисципліни, або ж залишає систему. Інколи нетерплячі вимоги залишають чергу, тоді вони вважаються втраченими назавжди. Таким чином, класичні моделі теорії масового обслуговування не беруть до уваги можливість повторного звернення вимог до системи та не можуть використовуватися для розв'язку практично важливих задач. Саме тому, слід розглядати системи масового обслуговування з повторними викликами, в яких вимоги, що надійшли до системи при зайнятості всіх каналів обслуговування, повертаються після деякого періоду часу, щоб отримати обслуговування. Особливе значення такі системи мають для комп'ютерних та телекомунікаційних мереж. Більш детально порівняльний аналіз класичних систем та систем з повторними викликами проведено в роботах [1], [2]. При цьому для систем з повторними викликами покладають, що повторне звернення здійснюється до тих пір, поки вимога не отримає обслуговування. Це є лише наближенням реальних ситуацій, тому що

число повторних звернень до системи часто буває обмеженим (див. [3]). Дослідження систем з обмеженим числом повторних спроб отримати обслуговування є досить актуальним на даний час, особливо з точки зору оптимізації їх роботи.

В роботі, що пропонується розглядається багатоканальна система масового обслуговування з однією спробою повтору. Це означає, що вимога, яка тримала відмову, залишає систему та має можливість повторно звернутися для обслуговування лише один раз через деякий випадковий проміжок часу, який має показниковий розподіл з параметром ν . Якщо при повторному зверненні всі прилади є зайняті, то вимога залишає систему назавжди. Ззовні вимоги надходять до системи з інтенсивністю λ , яка залежить, в свою чергу, від кількості джерел повторних викликів на поточний момент. Час обслуговування вимог є показником розділеною випадковою величиною з параметром μ .

У загальному випадку при довільній кількості джерел повторних викликів побудувати явні формули для стаціонарних ймовірностей неможливо, тому розглянемо урізану модель даної системи, в якій скінченне число N місць

для повторних викликів, що можуть зробити одну повторну пробу (рис. 1).

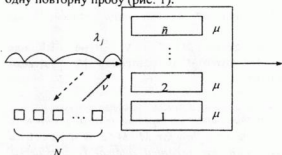


Рис. 1. Структура багатоканальної системи з однією спробою повтору

Змінний характер інтенсивності вхідного потоку в моделі, що розглядається, дає можливість ставити і розв'язувати для них оптимізаційні задачі в класі гістерезисних стратегій.

Процес керування на основі гістерезисної стратегії можна описати наступним чином. Фіксуються два невід'ємних цілих числа H_1 та H_2 , які називаються порогами, $H_1 \leq H_2$. Якщо в деякий момент часу кількість повторних викликів в системі не перевищує H_1 , то вона функціонує в першому режимі і інтенсивність надходження вимог дорівнює h_1 . Якщо кількість повторних викликів стає більшою за H_2 , то система функціонує у другому режимі з інтенсивністю надходження вимог h_2 . Якщо кількість повторних викликів лежить у проміжку $(H_1, H_2]$, то система зберігає той режим, в якому вона функціонувала в попередній момент часу. Пороги H_1 та H_2 приймають значення $0, 1, \dots, N$. Якщо $H_1 = N$, то при будь-якій кількості джерел повторних викликів система знаходиться в першому режимі. У випадку $H_1 = H_2$ ($(H_1, H_2] = \emptyset$) маємо частинний випадок керування при пороговій стратегії.

При фіксованій гістерезисній стратегії (H_1, H_2) стан системи може бути описаний тривимірним процесом $Q(t, H_1, H_2) = \{Q_1(t, H_1, H_2), Q_2(t, H_1, H_2), R(t, H_1, H_2), t \geq 0\}$, де $Q_1(t, H_1, H_2)$ – кількість зайнятих приладів в момент часу t , $Q_2(t, H_1, H_2)$ – кількість джерел повторних викликів момент часу t , $R(t, H_1, H_2)$ – режим роботи системи момент часу t . Якщо $R(t, H_1, H_2) = 1$, то система працює в

першому режимі з інтенсивністю надходження вимог h_1 . Якщо $R(t, H_1, H_2) = 2$, то система працює в другому режимі з інтенсивністю надходження вимог h_2 .

Процес $Q(t, H_1, H_2)$, $t \geq 0$ є ланцюгом Маркова з неперервним часом і множиною станів $S = S^1 \cup S^2$, де $S^1 \cap S^2 = \emptyset$,
 $S^1 = \{i = (i_1, i_2, 1) : i_1 = 0, \dots, c; i_2 = 0, \dots, H_2\}$,
 $S^2 = \{i = (i_1, i_2, 2) : i_1 = 0, \dots, c; i_2 = H_1 + 1, \dots, N\}$.

Для ланцюга Маркова $Q(t, H_1, H_2)$ інфінітезимальні характеристики b_{ij} , $i = (i_1, i_2, i_3)$, $j = (j_1, j_2, j_3)$, $(i, j) \in S$ визначаються наступним чином:

1) якщо
 $[(i_1 \in \{0, 1, \dots, c-1\}) \wedge (i_2 \in \{0, \dots, H_2\}) \wedge (i_3 = 1)] \vee$
 $\vee [(i_1 \in \{0, \dots, c-1\}) \wedge (i_2 \in \{H_1 + 2, \dots, N\}) \wedge (i_3 = 2)]$,

$$\text{то } b_{ij} = \begin{cases} h_3, & \text{при } j = (i_1 + 1, i_2, i_3); \\ i_1 \mu, & \text{при } j = (i_1 - 1, i_2, i_3); \\ i_2 \nu, & \text{при } j = (i_1 + 1, i_2 - 1, i_3); \\ -(h_3 + i_1 \mu + i_2 \nu), & \text{при } j = i; \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

2) якщо $[(i_1 = c) \wedge (i_2 \in \{0, \dots, H_2 - 1\}) \wedge (i_3 = 1)] \vee$
 $\vee [(i_1 = c) \wedge (i_2 \in \{H_1 + 2, \dots, N - 1\}) \wedge (i_3 = 2)]$,

$$\text{то } b_{ij} = \begin{cases} h_3, & \text{при } j = (c, i_2 + 1, i_3); \\ c \mu, & \text{при } j = (c - 1, i_2, i_3); \\ i_2 \nu, & \text{при } j = (\bar{n}, i_2 - 1, i_3); \\ -(h_3 + c \mu + i_2 \nu), & \text{при } j = i; \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

3) якщо $i = (c, H_2, 1)$,

$$\text{то } b_{ij} = \begin{cases} h_1, & \text{при } j = (\bar{n}, H_2 + 1, 2); \\ c \mu, & \text{при } j = (c - 1, H_2, 1); \\ H_2 \nu, & \text{при } j = (c, H_2 - 1, 1); \\ -(h_1 + c \mu + H_2 \nu), & \text{при } j = i; \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

4) якщо $[(i_1 = 0, \dots, c - 1) \wedge (i_2 = H_1 + 1) \wedge (i_3 = 2)]$,

$$\text{то } b_{ij} = \begin{cases} h_2, & \text{при } j = (i_1 + 1, H_1 + 1, 2); \\ i_1 \mu, & \text{при } j = (i_1 - 1, H_1 + 1, 2); \\ (H_1 + 1) \nu, & \text{при } j = (i_1 + 1, H_1, 1); \\ -(h_2 + i_1 \mu + (H_1 + 1) \nu), & \text{при } j = i; \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

5) якщо $i = (c, H_1 + 1, 2)$,

$$\text{то } b_j = \begin{cases} h_2, \text{ при } j = (\bar{n}, H_1 + 2, 2); \\ c\mu, \text{ при } j = (c - 1, H_1 + 1, 2); \\ (H_1 + 1)\nu, \text{ при } j = (c, H_1, 1); \\ -(h_2 + c\mu + (H_1 + 1)\nu), \text{ при } j = i; \\ 0, \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

$$\text{6) якщо } i = (c, N, 2), \\ \text{то } b_j = \begin{cases} c\mu, \text{ при } j = (c - 1, N, 2); \\ N\nu, \text{ при } j = (c, N - 1, 2); \\ -(c\mu + N\nu), \text{ при } j = i; \\ 0, \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

Метою даної роботи є отримання стаціонарних ймовірностей для багатоканальної системи масового обслуговування з однією спробою повтору.

Позначимо $\pi_y(H_1, H_2, r)$, $(i, j) \in S$ стаціонарні ймовірності системи: $\pi_y(H_1, H_2, r) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{Q_1(t, H_1, H_2) = i, Q_2(t, H_1, H_2) = j, R(t, H_1, H_2) = r\}$. В подальшому для скорочення викладок будемо використовувати позначення $\pi_{0j}(r)$, $\pi_{1j}(r)$, опускаючи індекси (H_1, H_2) .

Введемо наступні позначення:

$$e_c(c+1) = (\delta_{c0} \ \delta_{c1} \ \dots \ \delta_{cc})^T, \text{ де } \delta_y = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j; \end{cases}$$

$$e(c+1) = (1 \ 1 \ \dots \ 1)^T,$$

$$\pi_j(r) = (\pi_{0j}(r), \pi_{1j}(r), \dots, \pi_{cj}(r))^T,$$

$$A_j(r) = \|a'_{ik}(r)\|_{i,k=0}^c,$$

$$a'_{ik}(r) = \begin{cases} -h_r, \text{ i\ddot{o}d\grave{e} } k = i - 1, i = 1, \dots, c - 1, \\ (h_r + i\mu + j\nu), \text{ i\ddot{o}d\grave{e} } k = i, i = 0, \dots, c - 1, \\ h_r, \text{ i\ddot{o}d\grave{e} } k = i = c, \\ -(i + 1)\mu, \text{ i\ddot{o}d\grave{e} } k = i + 1, i = 0, \dots, c - 1, \\ 0, \grave{a}^4\text{i\ddot{o}n\acute{o} } \grave{a}\grave{e}\grave{i}\grave{a}\grave{a}\grave{e}\acute{o}; \end{cases}$$

$$B_j(r) = \|b'_{ik}(r)\|_{i,k=0}^c,$$

$$b'_{ik}(r) = \begin{cases} (j + 1)\nu, \text{ i\ddot{o}d\grave{e} } k = i - 1, i = 1, \dots, c - 1, \\ (j + 1)\nu, \text{ i\ddot{o}d\grave{e} } k = 0, \dots, c \wedge i = c \\ 0, \grave{a}^4\text{i\ddot{o}n\acute{o} } \grave{a}\grave{e}\grave{i}\grave{a}\grave{a}\grave{e}\acute{o}; \end{cases}$$

$$C_j(r) = \|c'_{ik}(r)\|_{i,k=0}^c,$$

$$c'_{ik}(r) = \begin{cases} (H_1 + 1)\nu, \text{ i\ddot{o}d\grave{e} } i = c \wedge k = 0, \dots, c, \\ 0, \grave{a}^4\text{i\ddot{o}n\acute{o} } \grave{a}\grave{e}\grave{i}\grave{a}\grave{a}\grave{e}\acute{o}; \end{cases}$$

$$D = \|d_{ik}\|_{i,k=0}^c,$$

$$\text{де } d_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{i\ddot{o}d\grave{e} } k = 0, i = 0, \\ a'_{i,-1k}(2), \grave{a}^4\text{i\ddot{o}n\acute{o} } \grave{a}\grave{e}\grave{i}\grave{a}\grave{a}\grave{e}\acute{o}; \end{cases}$$

$$F_j(1) = \begin{cases} \prod_{i=j}^{H_1} A_i^{-1}(1) B_i(1) \times \\ \times \left[I + \sum_{k=H_1+1}^{H_2} \left(\prod_{i=H_1+1}^{k-1} A_i^{-1}(1) B_i(1) \right) A_k^{-1}(1) C_k(1) \right], \\ j = 0, \dots, H_1; \\ \sum_{k=j}^{H_2} \left(\prod_{i=j}^{k-1} A_i^{-1}(1) B_i(1) \right) A_k^{-1}(1) C_k(1), j = H_1 + 1, \dots, H_2; \end{cases}$$

(за домовленістю $F_{H_2+1}(1)$ дорівнює нульовій матриці);

$$F_j(2) = \left\{ I - \sum_{k=j}^{H_2} \left(\prod_{i=j}^{k-1} A_i^{-1}(2) B_i(2) \right) A_k^{-1}(2) C_k(2) \times \right. \\ \times \left[I + \sum_{k=H_1+1}^{H_2} \left(\prod_{i=H_1+1}^{k-1} A_i^{-1}(2) B_i(2) \right) A_k^{-1}(2) C_k(2) \right]^{-1} \times \\ \times \left. \prod_{i=H_1+1}^{j-1} A_i^{-1}(2) B_i(2) \right\} \prod_{i=j}^{N-1} A_i^{-1}(2) B_i(2), j = H_1 + 1, \dots, N - 1.$$

Покладемо $F_N(2) = I = \|\delta_{ij}\|_{i,j=0}^c$ — одинична матриця.

Для стаціонарних ймовірностей $\pi_y(r)$ справедливий наступний результат.

Теорема 1. Якщо параметри моделі типу $M/M/c/N$ з однією спробою повтору є невивродженими $h_1, h_2, \mu, \nu > 0$, то для процесу обслуговування $Q^N(t, H_1, H_2)$, $t \geq 0$ існує стаціонарний режим і стаціонарні ймовірності мають вигляд:

$$\pi_j(1) = \pi_{0N}(2) F_j(1) F_{H_1+1}(2) D^{-1} e_0(c+1), \\ j = 0, 1, \dots, H_2,$$

$$\pi_j(2) = \pi_{0N}(2) F_j(2) D^{-1} e_0(c+1), \\ j = H_1 + 1, \dots, N,$$

$$\text{де } \left(\pi_{0N}(2) \right)^{-1} = e^T(c+1) \times \\ \times \left(I + \sum_{j=0}^{H_2} F_j(1) F_{H_1+1}(2) + \sum_{j=H_1+1}^N F_j(2) \right) D^{-1} e_0(c+1).$$

Доведення:

Для пошуку $\pi_y(r)$ використаємо теорему про рівність потоку ймовірностей через границю замкненої області в стаціонарному режимі. Таким чином, для кожного $j = 0, 1, \dots, H_2$

побудуємо розбиття фазового простору $S = S_j^{(1)} \cup \bar{S}_j^{(1)}$, $S_j^{(1)} = \{(i, i_2, 1) : i_2 \leq j\}$. Прирівнюючи потоки ймовірностей через границю області $S_j^{(1)}$, знаходимо

$$h_1 \pi_{c_j}(1) = (j+1) \nu \sum_{i=0}^c \pi_{y+i}(1), \quad j = 0, 1, \dots, H_1 - 1, \quad (1)$$

$$h_1 \pi_{c_j}(1) = (j+1) \nu \sum_{i=0}^c \pi_{y+i}(1) + (H_1+1) \nu \sum_{i=0}^c \pi_{iH_1+1}(2), \quad j = H_1, \dots, H_2 - 1, \quad (2)$$

$$h_1 \pi_{cH_2}(1) = (H_1+1) \nu \sum_{i=0}^c \pi_{iH_1+1}(2). \quad (3)$$

Для кожного $j = H_1 + 1, \dots, N - 1$ побудуємо розбиття фазового простору $S = S_j^{(2)} \cup \bar{S}_j^{(2)}$, $S_j^{(2)} = \{(i, i_2, 2) : H_1 + 1 \leq i_2 \leq j\}$. Прирівнюючи потоки ймовірностей через границю області $S_j^{(2)}$, знаходимо

$$h_2 \pi_{c_j}(2) + (H_1+1) \nu \sum_{i=0}^c \pi_{iH_1+1}(2) = (j+1) \nu \sum_{i=0}^c \pi_{y+i}(2), \quad j = H_1 + 1, \dots, H_2, \quad (4)$$

$$h_2 \pi_{c_j}(2) + (H_1+1) \nu \sum_{i=0}^c \pi_{iH_1+1}(2) = h_1 \pi_{cH_2}(1) + (j+1) \nu \sum_{i=0}^c \pi_{y+i}(2), \quad j = H_2 + 1, \dots, N - 1. \quad (5)$$

Побудуємо для $i = 0, 1, \dots, c - 1$, $j = 0, 1, \dots, H_2$ розбиття фазового простору $S = S_y^{(1)} \cup \bar{S}_y^{(1)}$, $S_y^{(1)} = \{(i, j, 1)\}$. Прирівнюючи потоки ймовірностей через границю області $S_y^{(1)}$, отримасмо:

$$(h_1 + i\mu + j\nu) \pi_{y_j}(1) = (j+1) \nu \pi_{i-j+1}(1) + h_1 \pi_{i-1,j}(1) + (i+1) \mu \pi_{i+1,j}(1), \quad j = 0, \dots, H_2 - 1, j \neq H_1, i = 0, 1, \dots, c - 1, \quad (6)$$

$$(h_1 + i\mu + H_1\nu) \pi_{iH_1}(1) = (H_1+1) \nu \pi_{i-1H_1+1}(1) + h_1 \pi_{i-1H_1}(1) + (H_1+1) \nu \pi_{i-1H_1+1}(2) + (i+1) \mu \pi_{i+1H_1}(1), \quad j = H_1, i = 0, 1, \dots, c - 1, \quad (7)$$

$$(h_1 + i\mu + H_2\nu) \pi_{iH_2}(1) = h_1 \pi_{i-1H_2}(1) + (i+1) \mu \pi_{i+1H_2}(1), \quad j = H_2, i = 0, 1, \dots, c - 1. \quad (8)$$

Для $i = 0, 1, \dots, c - 1$, $j = H_1 + 1, \dots, N$ в свою чергу побудуємо розбиття фазового простору $S = S_y^{(2)} \cup \bar{S}_y^{(2)}$, $S_y^{(2)} = \{(i, j, 2)\}$. Прирівнюючи потоки ймовірностей через границю області $S_y^{(2)}$ та знаходимо

$$(h_2 + i\mu + j\nu) \pi_{y_j}(2) = (j+1) \nu \pi_{i-j+1}(2) + h_2 \pi_{i-1,j}(2) + (i+1) \mu \pi_{i+1,j}(2), \quad j = H_1 + 1, \dots, N - 1, i = 0, 1, \dots, c - 1, \quad (12)$$

$$(h_2 + i\mu + N\nu) \pi_{iN}(2) = h_2 \pi_{i-1,N}(2) + (i+1) \mu \pi_{i+1,N}(2), \quad j = N, i = 0, 1, \dots, c - 1. \quad (13)$$

Спростуємо рівняння (5) за рахунок (3), яке набуде вигляду

$$h_2 \pi_{c_j}(2) = (j+1) \nu e^T (c+1) \pi_{j+1}(2), \quad j = H_2 + 1, \dots, N - 1.$$

Запишемо систему рівнянь (12) разом із останнім рівнянням для $j = H_2 + 1, \dots, N - 1$ у векторно-матричному вигляді

$$A_j(2) \pi_j^{(N)}(2) = B_j(2) \pi_{j+1}^{(N)}(2), \quad j = H_2 + 1, \dots, N - 1.$$

Звідси знаходимо представлення для $\pi_j(2)$, $j = H_2 + 1, \dots, N - 1$:

$$\pi_j(2) = \prod_{i=j}^{N-1} A_i^{-1}(2) B_i(2) \pi_N(2). \quad (14)$$

Перепишемо рівняння (4) у формі:

$$h_2 \pi_{c_j}(2) = (j+1) \nu e^{\hat{O}} (c+1) \pi_{j+1}(2) - (H_1+1) \nu e^{\hat{O}} (c+1) \pi_{H_1+1}(2), \quad j = H_1 + 1, \dots, H_2.$$

Використовуючи останнє рівняння, запишемо систему (12) для $j = H_1 + 1, \dots, H_2$ в наступний вигляді:

$$A_j(2) \pi_j(2) = B_j(2) \pi_{j+1}(2) - C_j(2) \pi_{H_1+1}(2), \quad j = H_1 + 1, \dots, H_2.$$

Звідси отримасмо результат для $\pi_j(2)$:

$$\pi_j(2) = \prod_{i=j}^{H_2} A_i^{-1}(2) B_i(2) \pi_{H_2+1}(2) - \sum_{k=j}^{H_2} \left(\prod_{i=j}^{k-1} A_i^{-1}(2) B_i(2) \right) A_k^{-1}(2) C_k(2) \pi_{H_1+1}(2), \quad j = H_1 + 1, \dots, H_2. \quad (15)$$

Використовуючи рівняння (14) при $j = H_2 + 1$,
подамо (15) в наступному вигляді

$$\pi_j(2) = \prod_{i=j}^{N-1} A_i^{-1}(2) B_i(2) \pi_N(2) - \\ - \sum_{k=j}^{H_2} \left(\prod_{i=j}^{k-1} A_i^{-1}(2) B_i(2) \right) A_k^{-1}(2) C_k(2) \pi_{H_1+1}(2), \\ j = H_1 + 1, \dots, H_2.$$

Поклавши в останньому рівнянні $j = H_1 + 1$,
знаходимо $\pi_{H_1+1}(2)$:

$$\pi_{H_1+1}(2) = \left[I + \sum_{k=H_1+1}^{H_2} \left(\prod_{i=H_1+1}^{k-1} A_i^{-1}(2) B_i(2) \right) A_k^{-1}(2) C_k(2) \right]^{-1} \times \\ \times \prod_{i=H_1+1}^{N-1} A_i^{-1}(2) B_i(2) \pi_N(2).$$

Таким чином, в результаті маємо:

$$\pi_j(2) = \left\{ I - \sum_{k=j}^{H_2} \left(\prod_{i=j}^{k-1} A_i^{-1}(2) B_i(2) \right) A_k^{-1}(2) C_k(2) \times \right. \\ \times \left[I + \sum_{k=H_1+1}^{H_2} \left(\prod_{i=H_1+1}^{k-1} A_i^{-1}(2) B_i(2) \right) A_k^{-1}(2) C_k(2) \right]^{-1} \times \\ \times \prod_{i=H_1+1}^{j-1} A_i^{-1}(2) B_i(2) \left. \right\} \prod_{i=j}^{N-1} A_i^{-1}(2) B_i(2) \pi_N(2), \quad (16) \\ j = H_1 + 1, \dots, H_2.$$

Посидуючи (14) та (16), отримаємо

$$\pi_j(2) = F_j(2) \pi_N(2), \quad j = H_1 + 1, \dots, N-1. \quad (17)$$

Враховуючи (2) при $j = H_1 + 1, \dots, H_2 - 1$ та
(3), рівняння (6) та (8) подамо у векторно-
матричному вигляді:

$$A_j(1) \pi_j(1) = B_j(1) \pi_{j+1}(1) + C_j(1) \pi_{H_1+1}(2), \\ j = H_1 + 1, \dots, H_2 - 1,$$

$$A_{H_2}(1) \pi_{H_2}(1) = C_{H_2}(1) \pi_{H_1+1}(2).$$

Маємо розв'язок цих рівнянь

$$\pi_j(1) = \sum_{k=j}^{H_2} \left(\prod_{i=j}^{k-1} A_i^{-1}(1) B_i(1) \right) A_k^{-1}(1) C_k(1) \pi_{H_1+1}(2), \\ j = H_1 + 1, \dots, H_2. \quad (18)$$

Для визначення $\pi_{H_1}(1)$ скористаємося
рівняннями (2) для $j = H_1$, (7) та поданням (18)
для $j = H_1 + 1$. Таким чином,

$$\pi_{H_1}(1) = A_{H_1}^{-1}(1) B_{H_1}(1) \pi_{H_1+1}(1) + \\ + A_{H_1}^{-1}(1) B_{H_1}(1) \pi_{H_1+1}(2) = A_{H_1}^{-1}(1) B_{H_1}(1) \times \\ \times \left[I + \sum_{k=H_1+1}^{H_2} \left(\prod_{i=H_1+1}^{k-1} A_i^{-1}(1) B_i(1) \right) A_k^{-1}(1) C_k(1) \right] \pi_{H_1+1}(2). \quad (19)$$

У свою чергу, рівняння (1) та (6) для
 $j = 0, 1, \dots, H_1 - 1$ у векторно-матричній формі
матимуть вигляд:

$$A_j(1) \pi_j(1) = B_j(1) \pi_{j+1}(1), \quad j = 0, 1, \dots, H_1 - 1.$$

Розв'язок цього рекурентного співвідношення
дорівнює

$$\pi_j(1) = \prod_{i=j}^{H_1-1} A_i^{-1}(1) B_i(1) \pi_{H_1}(1).$$

При цьому, якщо скористатися рівнянням
(19), то отримаємо наступне

$$\pi_j(1) = \prod_{i=j}^{H_1} A_i^{-1}(1) B_i(1) \times \\ \times \left[I + \sum_{k=H_1+1}^{H_2} \left(\prod_{i=H_1+1}^{k-1} A_i^{-1}(1) B_i(1) \right) A_k^{-1}(1) C_k(1) \right] \pi_{H_1+1}(2), \\ j = 0, 1, \dots, H_1.$$

Таким чином,

$$\pi_j(1) - F_j(1) \pi_{H_1+1}(2) = F_j(1) F_{H_1+1}(2) \pi_N(2), \\ j = 0, 1, \dots, H_2.$$

Перейдемо до знаходження $\pi_{0N}(2)$. Для
цього додамо до рівнянь (13) тотожність
 $\pi_{0N}(2) = \pi_{0N}(2)$ і запишемо їх у векторно-
матричному вигляді

$$D \pi_N(2) = \pi_{0N}(2) e_0(c+1).$$

Звідси маємо:

$$\pi_j(2) = \pi_{0N}(2) F_j(2) D^{-1} e_0(c+1), \quad (20) \\ j = H_1 + 1, \dots, N,$$

$$\pi_j(1) = \pi_{0N}(2) F_j(1) F_{H_1+1}(2) D^{-1} e_0(c+1), \quad (21) \\ j = 0, 1, \dots, H_2.$$

Імовірність $\pi_{0N}(2)$ знаходимо з умови
нормування:

$$\sum_{i=0}^c \left(\sum_{j=0}^{H_2} \pi_{ij}(1) + \sum_{j=H_1+1}^N \pi_{ij}(2) \right) = 1.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} (\pi_{0N}(2))^{-1} &= e^T (c+1) \times \\ &\times \left(I + \sum_{j=0}^{H_2} F_j(1) F_{H_1+1}(2) + \sum_{j=H_1+1}^N F_j(2) \right) D^{-1} e_0 (c+1). \end{aligned} \quad (22)$$

Рівності (20)-(22) доводять твердження теореми.

Слід зазначити, що матриці $A_j(r)$, $r=1,2$ та D є невідроджені при будь-яких $h_1, h_2, \mu, \nu > 0$, оскільки виконуються умови Адамара [4, с.406].

Змінний характер інтенсивності вхідного потоку в даній моделі дає можливість ставити і розв'язувати для неї оптимізаційні задачі. В роботі розглядається оптимізаційна задача

$$\begin{aligned} C_1 S_1(H_1, H_2) + C_2 S_2(H_1, H_2) - \\ - C_3 S_3(H_1, H_2) - C_4 S_4(H_1, H_2) \rightarrow \max \quad (23) \\ H_1, H_2 \in \{0, 1, \dots\}, H_1 \leq H_2, \end{aligned}$$

де $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} S_i(t, H_1, H_2) = S_i(H_1, H_2)$ ($i = \overline{1,4}$);

$S_1(t, H_1, H_2)$ – число викликів, обслуговування яких завершено в системі за час t в першому режимі; $S_2(t, H_1, H_2)$ – число викликів, обслуговування яких завершено в системі за час t в другому режимі; $S_3(t, H_1, H_2)$ – число

викликів, які отримали відмову в обслуговуванні і стали повторними викликами; $S_4(t, H_1, H_2)$ – число перемикань інтенсивності вхідного потоку; C_1 – прибуток, пов'язаний з обслуговуванням одного виклику в першому режимі; C_2 – прибуток, пов'язаний з обслуговуванням одного виклику в другому режимі; C_3 – штраф за відмову в обслуговуванні; C_4 – штраф за перемикання інтенсивності вхідного потоку.

В умовах існування стаціонарного режиму функціонали $S_i(H_1, H_2)$, $i = \overline{1,4}$ існують і можуть бути виписані через стаціонарні ймовірності:

$$S_1(H_1, H_2) = \sum_{i=0}^c \sum_{j=0}^{H_2} i \mu \pi_{ij}(1),$$

$$S_2(H_1, H_2) = \sum_{i=0}^c \sum_{j=H_1+1}^{\infty} i \mu \pi_{ij}(2),$$

$$S_3(H_1, H_2) = \sum_{j=0}^{H_2} h_1 \pi_{cj}(1) + \sum_{j=H_1+1}^{\infty} h_2 \pi_{cj}(2),$$

$$S_4(H_1, H_2) = h_1 \pi_{cH_2}(1) + (H_1 + 1) \nu \sum_{i=0}^c \pi_{iH_1+1}(2).$$

Розв'язком задачі (23) є такі пороги H_1, H_2 , які максимізують середній прибуток від роботи системи. Подібні оптимізаційні задачі для систем з повторними викликами розглядалися в роботах [5]-[7].

Список використаних джерел

1. Artalejo J.R., Gómez-Corral A. Retrial Queueing Systems. A Computational Approach. - Springer, 2008, 318 p.
2. Falin G. I. and Templeton J. G. C. Retrial queues. - London: Chapman & Hall, 1997. - 328 p.
3. Shin Y.W., Moon D.H. Retrial queues with limited number of retrials: numerical investigations. In: The seventh international symposium on operations research and its applications (ISORA'08), Lijiang, China; October 31-November 3, 2008, pp. 237-247.
4. Гантмахер Ф.П. Теория матриц. Изд. «Наука», М.-1967, с. 576.
5. Дудин А.Н., Клименок В.И. Оптимизация динамического управления входной нагрузкой в узле информационно-вычислительной сети. // Автоматика и вычислительная техника. - 1991. - № 2. - С. 25-31.
6. Лебедев Е.А., Пономарьов В.Д. Управление интенсивностью обслуживания в системах с

повторными вызовами // Кибернетика и системный анализ. - 2011. - Вып. №3. - С. 118-126.

7. Пономарьов В.Д. Оптимізація інтенсивності обслуговування в системах з повторами і скінченним числом джерел вимог // Журнал обчислювальної та прикладної математики. Серія: оптимізація. - 2010. - Вип. № 2 (101). - С. 105-112.

Надійшла до редколегії 24.09.11

УДК 004.4

Россада Т.В., аспірант

Класи номінативних даних зі швидким доступом до компонентів

У роботі досліджується проблема ефективного доступу до компонентів даного. Дослідження здійснюються в рамках композиційно-номінативного підходу до програмування, який надає достатньо розвинені можливості для формалізації необхідних понять. У статті вводяться та досліджуються класи слабо-унікальноіменних, унікальноіменних та строго-індексованих даних, а також композицій та функцій над ними.

Ключові слова: структури даних, номіна-
тивні дані, мови програмування, семантика
програм.

*E-mail: trossada@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Практика роботи з традиційними моделями даних показує, що строга структуризація останніх значно обмежує їх виразність. Більш гнучкими та виразно спроможними, хоча і складнішими для обробки, є дані з нерегулярною та нечіткою структурою, яка може змінюватися під час обробки. Такі дані зазвичай представляють у вигляді деревовидної структури, гілки якої позначені іменами, а листки – базовими значеннями (рис. 1), тобто аналогічно іменному (номінативному) даному [1]. Робота з такими даними ускладнена за рахунок відсутності в них строгої структури, неоднозначності іменування, синонімії тощо. Це вимагає досліджень таких даних та розробки ефективних алгоритмів роботи з ними [2-3].



Рис. 1. Пример неструктурированного даного

T.V. Rossada, PhD student

Classes of nominative data with fast access to components

The problem of effective access to data components is studied. Researchers are conducted in the framework of composition-nominative approach to programming that provides quite rich instruments to formalize the required concepts. Classes of weak uniquely-named, uniquely-named and strictly-indexed data, also operations and functions over such classes are introduced and investigated.

Key Words: data structure, nominative data, programming languages, program semantics.

У статті досліджуються питання прискорення доступу до компонентів номінативних даних. Далі обмежимося лише розглядом номінативних даних з однозначним іменуванням [1, 4].

Для вирішення поставленої задачі визначаються поняття строгої індексованості іменного даного, програми над строго індексованими даними та стабільності програм при зміні даних [1,4]. Це дозволяє формалізувати та дослідити метод індексації, за допомогою якого можливо реалізувати швидкий доступ до компонентів даних. Практичні дослідження, проведені у [2], показують, що цей метод та його вдосконалення збільшують продуктивність роботи з даними у порівнянні з традиційними підходами.

У статті будуть використані такі позначення:

- $f(x) \downarrow$ – функція f визначена на аргументі x ;
- $f(x) \uparrow$ – функція f не визначена на x .

Слабко-унікальноіменні, унікальноіменні та строгоіндексовані іменні дані

У статті [1] номінативні дані розглядаються як ієрархічно побудовані об'єкти, в основі яких лежить бінарне відношення *ім'я* → *значення*, яке можна тлумачити як певну функцію.

Самі дані можна подавати у текстовому (лінійному) або у графічному вигляді. Візьмемо, наприклад, такий текстовий запис:

$$d = \{A \mapsto [B \mapsto [D \mapsto [I, C \mapsto [E \mapsto 2]], F \mapsto 3], B \mapsto 4\}.$$

Йому відповідає певне орієнтоване дерево, з дугами, що розмічені іменами, та кінцевими вершинами (листями), розміченими значеннями. На рис. 2 подано різні його форми: а) традиційна та б) схема.

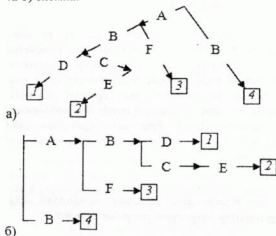


Рис. 2. Графічні представлення номіна-тивного даного

Математично, номінативні дані визначаються індуктивно на основі множини імен V та множини базових значень (атомів) W наступним чином:

- $ND_0(V, W) = W$ – номінативні дані рангу нуля,
- $ND_{k+1}(V, W) = W \cup (V \xrightarrow{a} ND_k(V, W))$ для $k > 0$ – номінативні дані рангу не більше $k+1$.

Тоді $ND(V, W) = \bigcup_{k \geq 0} ND_k(V, W)$ – усі

номінативні дані. Порожнє дане \emptyset також має ранг 0.

Введемо наступні визначення та позначення ($d \in ND(V, W)$):

- множина кореневих імен даного d : $rn(d) = \{u | d(u) \downarrow\}$;
- множина атомних кореневих імен даного d : $ra(d) = \{u | d(u) \downarrow \wedge d(u) \in W\}$;
- (іменний) шлях в даному d – непорожній послідовність імен (v_1, v_2, \dots, v_k) з V , $k > 0$ така, що $d(v_1, v_2, \dots, v_k) \downarrow$, де $d(v_1, v_2, \dots, v_k) \equiv ((d(v_1))(v_2)) \dots (v_k)$;
- термінальний шлях в d – іменний шлях, що повертає як значення дане рангу 0 (в дереві, що відповідає даному d , термінальний шлях веде від кореня до листа дерева);

- множина імен даного d : $nms(d) = \{v | v \in V \wedge \exists k \exists v_1, v_2, \dots, v_k \in V: k \geq 0 \wedge d(v_1, v_2, \dots, v_k v) \downarrow\}$;
- властивість даного d , при якій кожне ім'я, що зустрічається в даному, є унікалом:

$uniq(d) = T$, якщо для будь-якого v існує єдиний іменний шлях $(v_1, v_2, \dots, v_k v)$, де $k \geq 0$ і $\forall i (0 < i \leq k): v_i \in V$, такий, що $d(v_1, v_2, \dots, v_k v) \downarrow$;

$uniq(d) = F$ в інших випадках.

Розглянемо введені поняття на прикладах. Для номінативного даного d (рис. 2) множина кореневих імен складається лише з пари елементів: $rn(d) = \{A, B\}$. Множина атомних кореневих імен включає в себе лише ім'я B .

Іменними шляхами у даному d є такі послідовності імен: (A) , (B) , (A, B) , (A, F) , (A, B, D) , (A, B, C) , (A, B, C, E) . Наприклад, для послідовності імен (A, B, C, E) має місце наступне: $d(A, B, C, E) \equiv (((d(A))(B))(C))(E)$. Нехай $d(A) = d'$ (рис 3.а), $d'(B) = d''$ (рис 3.б), $d''(C) = d'''$ (рис 3.с), тоді: $d(A, B, C, E) = ((d'(B))(C))(E) = (d''(C))(E) = d'''(E) = 2$.

Серед вищенаведених іменних шляхів термінальними є (B) , (A, F) , (A, B, D) і (A, B, C, E) , оскільки вони повертають значення відповідно 4, 3, 1 і 2, що є номінативними даними рангу 0.

Множина імен даного d : $nms(d) = \{A, B, C, D, E, F\}$. Унікальними в даному d є імена A, C, D, E, F . А для імені B існують два різних іменних шляхи, а саме (A, B) та (B) , такі, що $d(A, B) \downarrow$ і $d(B) \downarrow$. Отже дане d не є унікальноіменним.

Розглянемо три підкласи номінативних даних.

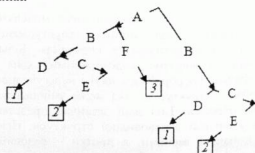


Рис. 3. Приклад слабо-унікальноіменного даного

1. Клас слабо-унікальноіменних даних (рис. 3) $UND_w(V, W)$ – це підклас номінативних даних, для кожного елементу d якого виконується: однакові імена мають однакові значення, тобто для будь-якої пари іменних шляхів $t_1 = (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1k} v)$ і $t_2 = (v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2l} v)$, де $k, l > 0$, $\forall i, j (0 < i \leq k, 0 < j \leq l): v_{ij} \in V$, випливає, що $d(t_1) = d(t_2)$ у смислі [1].

2. Клас унікальноіменних даних (рис. 4) $UND(V, W)$ – це підклас слабо-унікальноіменних даних, для кожного елементу d якого виконується умова $uniq(d) = T$, тобто:

$$d \in UND(V, W) \leftrightarrow d \in ND(V, W) \wedge uniq(d).$$

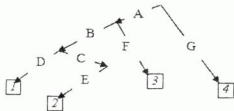


Рис. 4. Приклад унікальноіменного даного

Очевидно, що кожне номінативне дане можна, шляхом перейменування, перетворити в певному сенсі еквівалентне йому унікальноіменне дане. Так, у [2] пропонується кодування іменних шляхів даного відповідними цьому шляху символьними рядками, які, власне, стають іменами.

3. Клас строгоіндексованих іменних даних $IND_s(V, W)$ – це підклас слабо-унікальноіменних даних, для кожного елемента d якого виконується умова $rn(d) = nms(d)$, а неатомні значення імен є унікально іменними. Для зручності зображатимемо таке дане у вигляді схеми дерева (рис. 5).

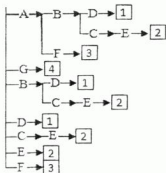


Рис. 5. Приклад строгоіндексованого даного

Далі розглянемо, як пов'язані між собою класи UND та IND_s , але спочатку необхідно визначити основні операції над цими класами, починаючи з класу унікальноіменних даних.

Операції над унікальноіменними даними

У статті [1] визначалися основні операції над номінативними даними: унарні параметричні операції іменування і розіменування, бінарна операція накладання та функція-константа \emptyset .

Операція іменування унікальноіменних даних \Rightarrow_v з параметром $v \in V$, визначається наступним чином:

- $\Rightarrow_v v(d) = [v \mapsto d]$, якщо $v \notin nms(d)$;
- $\Rightarrow_v v(d) \uparrow$ в інших випадках.

Операція розіменування унікальноіменних даних $v \Rightarrow_u(d)$, $v \in V$, $d \in UND(V, W)$, шукає ім'я в глибині ієрархії номінативного даного та повертає його значення:

- $v \Rightarrow_u(d) = v \Rightarrow(d) = d(v)$, якщо $v \in rn(d)$;
- $v \Rightarrow_u(d) = v \Rightarrow_u(d(v'))$, якщо $v' \in rn(d) \wedge v \in nms(d(v'))$;
- в інших випадках $v \Rightarrow_u(d) \uparrow$.

Для спрощення запису дужки навколо аргументів будемо опускати.

Для номінативних даних будемо використовувати теоретико-множинні операції та відношення, такі як об'єднання, перетин, різниця, включення тощо. Ці операції можуть бути обмеженими на підкласах номінативних даних, наприклад, можна визначити операцію об'єднання унікально іменних даним, множини імен яких не перетинаються. А саме, для $\forall d_1, d_2 \in UND(V, W)$ таких, що $nms(d_1) \cap nms(d_2) = \emptyset$, операція об'єднання визначається наступним чином: $d_1 \cup d_2 = r$, де $r \in UND(V, W)$, $rn(r) = rn(d_1) \cup rn(d_2)$ та $\forall v_1 \in rn(d_1)$ та $\forall v_2 \in rn(d_2)$: $v_1 \Rightarrow_u r = v_1 \Rightarrow_u d_1$ і $v_2 \Rightarrow_u r = v_2 \Rightarrow_u d_2$.

Операція накладання унікальноіменних даних $d \nabla_u [v \mapsto d']$, $v \in V$, $d, d' \in UND(V, W)$ визначається рекурсивно. Якщо ім'я v не належить множині імен даного d , та якщо множина імен даного d' не перетинається з множиною імен даного d (тобто якщо при накладанні не втрачається властивість *uniq* результуючого даного), то дана операція визначається як об'єднання даних d та $[v \mapsto d']$ (або просте накладання). Якщо ім'я v належить множині кореневих імен даного d , та не перетинаються такі множини, як $nms(d) \setminus nms(d(v))$ та $nms(d')$, то дана операція визначається як просте накладання даних d та $[v \mapsto d']$. Рекурсія виникає, якщо v лежить у глибині ієрархії d , тобто якщо існує деяке t таке, що $v \in nms(d(t))$. Тоді операція визначається як просте накладання даного d на дане $[t \mapsto (d(t) \nabla_u [v \mapsto d'])]$.

Формально, унікальноіменне накладання визначається наступним чином:

- якщо $v \notin nms(d)$ або $v \notin rn(d)$, і при цьому $(nms(d) \setminus nms(d(v))) \cap nms(d') = \emptyset$, то:
 $d \nabla_u [v \mapsto d'] = d \nabla [v \mapsto d']$;
- якщо $v \in nms(d) \setminus rn(d)$ (тобто v лежить в глибині ієрархії і $\exists t \in rn(d)$ таке, що $v \in nms(d(t))$), то $d \nabla_u [v \mapsto d'] = d \nabla [t \mapsto (d(t) \nabla_u [v \mapsto d'])]$;
- в інших випадках $d \nabla_u [v \mapsto d'] \uparrow$.

Лема 1 (замкненість класу $UND(V, W)$ відносно операцій іменування, розіменування,

накладання та \emptyset). Для $v \in V$, $d, d' \in \text{UND}(V, W)$: якщо $\Rightarrow_v d \downarrow$, то $\Rightarrow_v v(d) \in \text{UND}$; якщо $v \Rightarrow_v d \downarrow$, то $v \Rightarrow_v d \in \text{UND}$; якщо $d \nabla_v [v \mapsto d'] \downarrow$, то $d \nabla_v [v \mapsto d'] \in \text{UND}(V, W)$; $\emptyset(d) = \emptyset \in \text{UND}(V, W)$.

Доведення. Замкненість класу унікальноіменних даних відносно операцій іменування та розіменування випливає з означення унікальноіменних даних та цих операцій. Щодо операції накладання, то остання побудована таким чином, щоб зберегти властивість *uniq* результуючого даного. $\emptyset \in \text{UND}(V, W)$ оскільки порожнє дане є унікальноіменним.

Бієктивний зв'язок унікальноіменних та строгоіндексованих іменних даних

Класи $\text{UND}(V, W)$ і $\text{IND}_s(V, W)$ пов'язані між собою бієкцією (рис. 7), природа якої зрозуміла, якщо розглядати кожне окремо взятє дане з класу $\text{IND}_s(V, W)$ як *таблицю індексів* (подібно за структурою та способом визначення до таблиць індексів, що використовуються у пошукових системах WWW) для відповідного йому даного з класу $\text{UND}(V, W)$. Цей зв'язок дозволяє спростити роботу з номінативними даними для класу задач, в яких превалюють операції пошуку даних.

Визначимо над класами $\text{UND}(V, W)$ і $\text{IND}_s(V, W)$ операції *строого індексування* $\text{ind}: \text{UND} \rightarrow \text{IND}_s$ та *згортки* $\text{cnt}: \text{IND}_s \rightarrow \text{UND}$. Для $d \in \text{UND}(V, W)$ $\text{ind}(d) = \{v \mapsto (v \Rightarrow_v d) \mid v \in \text{nms}(d)\}$. Для $d \in \text{IND}_s(V, W)$:

$$\text{cnt}(d) = \{v \mapsto d(v) \mid v \in \text{rn}(d)\} \cup \text{nms}(d(u)) \quad u \in \text{rn}(d)$$

$$d_u \in \text{UND}(V, W) \xleftarrow{\text{cnt}} d_i \in \text{IND}_s(V, W) \xrightarrow{\text{ind}}$$

Рис. 6. Бієктивний зв'язок унікальноіменних та строгоіндексованих іменних даних

Властивості операцій індексації та згортки

Нехай $d_u \in \text{UND}(V, W)$, $d_u, d'_i \in \text{IND}_s(V, W)$. Тоді

B1. $\text{nms}(d_u) = \text{rn}(\text{ind}(d_u)) = \text{nms}(\text{ind}(d_u))$;

B2. $\text{nms}(d_i) = \text{rn}(d_i) = \text{nms}(\text{cnt}(d_i))$;

B3. $d_u \subseteq \text{ind}(d_u)$;

B4. $\text{rn}(d_u) = \text{rn}(\text{ind}(d_u)) \cup \{ \text{nms}(\text{ind}(d_u(k))) \mid k \in \text{rn}(d_u) \}$;

B5. $\text{cnt}(\text{ind}(d_u)) = d_u$;

B6. $\text{ind}(\text{cnt}(d_i)) = d_i$;

B7. якщо $\text{nms}(d) \cap \text{nms}(d') = \emptyset$, то

$$\text{cnt}(d \cup d') = \text{cnt}(d) \cup \text{cnt}(d')$$

B8. $\text{ind}(d_u) = d_u \cup \{ \text{ind}(d_u(k)) \mid k \in \text{rn}(d_u) \} \cup \text{ra}(d_u)$;

B9. $\text{cnt}(\{v \mapsto d_u\} \cup \text{ind}(d_u)) = \{v \mapsto d_u\}$;

B10. $\text{ind}(\text{ind}(d_u)) = \text{ind}(d_u)$, $\text{cnt}(\text{cnt}(d_i)) = \text{cnt}(d_i)$.

Доведення. Доведення B1–B2 випливає із визначення операцій індексування та згортки. Доведення B3–B4 випливає із визначення строгоіндексованих даних.

B5. За B3: $d_u \subseteq \text{ind}(d_u)$, причому, за визначенням строгоіндексованих даних $d_u = \{v \mapsto (\text{ind}(d_u))(v) \mid v \in \text{rn}(d_u)\}$. За B4 $\text{rn}(d_u) = \text{rn}(\text{ind}(d_u)) \cup \text{nms}(\text{ind}(d_u(w)))$, отже

$$d_u = \{v \mapsto (\text{ind}(d_u))(v) \mid v \in \text{rn}(\text{ind}(d_u)) \cup \text{nms}(\text{ind}(d_u(w))) \mid w \in \text{rn}(d_u)\},$$

але за визначенням операції згортки, останнє рівне $\text{cnt}(\text{ind}(d_u))$, отже $d_u = \text{cnt}(\text{ind}(d_u))$.

B6. За визначенням строгоіндексованих даних $\forall d_i \in \text{IND}_s(V, W)$ $\exists d_u \in \text{UND}(V, W)$ таке, що $d_i = \text{ind}(d_u)$. За B5: $\text{cnt}(\text{ind}(d_u)) = d_u$, а отже $\text{ind}(\text{cnt}(\text{ind}(d_u))) = \text{ind}(d_u)$. А тоді $\text{ind}(\text{cnt}(d_i)) = d_i$.

B7. За визначенням операції згортки вірно наступне:

$$\begin{aligned} \text{cnt}(d_i \cup d'_i) &= \{v \mapsto (d_i \cup d'_i)(v) \mid v \in \text{rn}(d_i \cup d'_i)\} \cup \{ \text{nms}((d_i \cup d'_i)(u)) \mid u \in \text{rn}(d_i \cup d'_i) \}. \text{ Але, оскільки} \\ \text{nms}(d_i) \cap \text{nms}(d'_i) &= \emptyset, \text{ то останнє рівне} \\ \{v \mapsto (d_i \cup d'_i)(v) \mid v \in \text{rn}(d_i) \cup \text{rn}(d'_i)\} &\cup \{ \text{nms}(d_i(u)) \mid u \in \text{rn}(d_i) \} \cup \{ \text{nms}(d'_i(u)) \mid u \in \text{rn}(d'_i) \}. \text{ Оскільки} \\ (d_i \cup d'_i)(v) &\text{ визначено, якщо визначено } d_i(v) \text{ або } d'_i(v), \text{ то } (d_i \cup d'_i)(v) = d_i(v), \text{ якщо } v \in \text{nms}(d_i), \\ (d_i \cup d'_i)(v) &= d'_i(v), \text{ якщо } v \in \text{nms}(d'_i), \text{ і невизначено інакше. А тоді} \\ \text{cnt}(d_i \cup d'_i) &= \{v \mapsto d_i(v) \mid v \in \text{rn}(d_i)\} \cup \{ \text{nms}(d_i(u)) \mid u \in \text{rn}(d_i) \} \cup \{v \mapsto d'_i(v) \mid v \in \text{rn}(d'_i)\} \\ &\cup \{ \text{nms}(d'_i(u)) \mid u \in \text{rn}(d'_i) \}. \text{ Останнє, в свою чергу,} \\ \text{рівне} &\text{cnt}(d_i) \cup \text{cnt}(d'_i). \end{aligned}$$

B8. За B3 виконується $d_u \subseteq \text{ind}(d_u)$. Тоді $\text{ind}(d_u) = d_u \cup d'$, де $d' \in \text{UND}_s(V, W)$, причому $d' = \text{ind}(d_u) \setminus d_u = \{v \mapsto d_u(v) \mid v \in \text{nms}(d_u) \setminus \text{rn}(d_u)\}$.

Оскільки $\text{nms}(d_u) \setminus \text{rn}(d_u) = \{ \text{nms}(d_u(k)) \mid k \in \text{rn}(d_u) \setminus \text{ra}(d_u) \}$, то виконується

$$d' = \{v \mapsto d_u(v) \mid v \in \{ \text{nms}(d_u(k)) \mid k \in \text{rn}(d_u) \setminus \text{ra}(d_u) \} \} = \{ \{v \mapsto d_u(v) \mid v \in \text{nms}(d_u(k))\} \mid k \in \text{rn}(d_u) \setminus \text{ra}(d_u) \}.$$

За визначенням строгоіндексованих даних, якщо $v \in \text{nms}(d_u(k))$, то $d_u(v) = v \Rightarrow_v d_u(k)$. Але тоді виконується наступне:

$$d' = \bigcup \{ \{v \mapsto (v \Rightarrow_v d(k)) \mid v \in \text{nms}(d_u(k))\} \mid k \in \text{rn}(d_u) \setminus \text{ra}(d_u) \}. \text{ Останнє, за визначенням строгоіндексованих даних, рівне} \\ \{ \text{ind}(d_u(k)) \mid k \in \text{rn}(d_u) \setminus \text{ra}(d_u) \}. \text{ А звідси випливає, що} \\ \text{ind}(d_u) = d_u \cup d' = d_u \cup \{ \text{ind}(d_u(k)) \mid k \in \text{rn}(d_u) \} \cup \text{ra}(d_u).$$

B9. З визначення операції індексування випливає, що $\text{ind}(\{v \mapsto d_u\}) = \{v \mapsto d_u\} \cup \text{ind}(d_u)$, а звідси випливає, що $\text{cnt}(\{v \mapsto d_u\} \cup \text{ind}(d_u)) =$

$\text{cnt}(\text{ind}[\nu \mapsto d_u])$. А за B5 виконується:
 $\text{cnt}(\text{ind}[\nu \mapsto d_u]) = [\nu \mapsto d_u]$.

Операції над строгоіндексованими іменними даними

Операція *індексного іменування* \Rightarrow, ν з параметром $\nu \in V$, визначається наступним чином:

- $\Rightarrow, \nu(d) = d \cup \{\nu \mapsto \text{cnt}(d)\}$, якщо $\nu \notin \text{nms}(d)$;
- $\Rightarrow, \nu(d) \uparrow$ в інших випадках.

Операція *індексного розіменування* $\nu \Rightarrow, (d)$, $\nu \in V$, $d \in \text{IND}_s(V, W)$:

- $\nu \Rightarrow, (d) = d(\nu)$, якщо $\nu \in \text{rn}(d)$;
- $\nu \Rightarrow, (d) \uparrow$ в інших випадках.

Тобто операція індексного розіменування співпадає зі звичайним розіменуванням.

Операція об'єднання строгоіндексованих даних визначається так само, як і для унікальноіменних даних.

Операція *індексного накладання* $d \nabla, [\nu \mapsto d']$, $\nu \in V$, $d \in \text{IND}_s(V, W)$, $d' \in \text{UND}(V, W)$:

$$d \nabla, [\nu \mapsto d'] = \text{ind}(\text{cnt}(d) \nabla, [\nu \mapsto d']).$$

Лема 2 (властивість операції індексного розіменування). Для $\nu \in V$, $d \in \text{IND}_s(V, W)$: якщо $\nu \Rightarrow, (d) \downarrow$, то $\nu \Rightarrow, (d) \in \text{UND}(V, W)$.

Лема 3 (замкненість класу $\text{IND}_s(V, W)$ відносно операцій індексного іменування, накладання та $\bar{\odot}$). Для $\nu \in V$, $d \in \text{IND}_s(V, W)$, $d' \in \text{UND}(V, W)$: якщо $\Rightarrow, \nu(d) \downarrow$, то $\Rightarrow, \nu(d) \in \text{IND}_s(V, W)$; якщо $d \nabla, [\nu \mapsto d'] \downarrow$, то $d \nabla, [\nu \mapsto d'] \in \text{IND}_s(V, W)$; $\bar{\odot} \in \text{IND}_s(V, W)$.

Доведення Лема 2 випливає із визначення строгоіндексованих даних. Доведення Лема 3 випливає з визначення операцій індексного іменування та накладання. $\bar{\odot}$ є строгоіндексованим даним за визначенням.

Для ефективної роботи з унікальноіменними та строгоіндексованими даними потрібно ввести мови програм, які використовують оператори, орієнтовані на властивості цих класів даних.

Мова програм SICON та її інтерпретації

Як зазначалося у [1], основним засобом подання програм є традиційні мови програмування. Головними їх недоліками з точки зору теорії є те, що вони не формалізовані і великі за описом. Це фактично робить неможливим будь-які математичні доведення їх властивостей. Тому необхідні мови, які задовольняють критеріям *формальності*,

deskriptivної простоти, *функціональної повноти та структурної адекватності* [5].

Перші три вимоги є інтуїтивно зрозумілими, а останню будемо тлумачити як композиційну адекватність мови, тобто її набір композицій повинен виразити основні засоби конструювання програм. Визначено мови програм над унікальноіменними та строгоіндексованими даними, які в певній мірі відповідають вищевизначеним критеріям.

Головними операціями, на яких ґрунтується мова SICON, є параметричні операції іменування $\nu \Rightarrow$, розіменування $\Rightarrow, (d)$, бінарна операція накладання ∇ та $\bar{\odot}$. Зауважимо, що накладання явно не фігурує в мові, а використовується у композиції присвоєння. Мова програм є замиканням операцій іменування та розіменування відносно композицій присвоєння, множення, розгалуження та циклу. Таким чином подається синтаксична складова мови. Семантично програми мови будуть визначатися в алгебрах програм. У цьому випадку саму програму можна подавати як терм певної алгебри.

Алгебра програм над номінативними даними визначається сигнатурою $\langle \nu \Rightarrow, \bar{\odot}, As^*, \bullet, IF, WH \rangle$. В ній As^* тлумачиться як звичайне присвоєння, побудоване на простому накладанні і $\nu \Rightarrow$ тлумачиться як звичайне розіменування [1].

У алгебрі програм над унікальноіменними даними операція $\nu \Rightarrow$ інтерпретується як $\nu \Rightarrow$, а присвоєння As^* , залежне від параметру $\nu \in V$, функції f (що задає підпрограму над даним) та унікальноіменного даного d – як унарна композиція, що задається формулою $As_s^*(f)(d) = d \nabla, [\nu \mapsto f(d)]$.

У алгебрі програм над строгоіндексованими даними операція $\nu \Rightarrow$ інтерпретується як $\nu \Rightarrow$, а присвоєння As^* , залежне від строгоіндексованого даного d – як унарна композиція, що задається формулою $As_s^*(f)(d) = d \nabla, [\nu \mapsto f(\text{cnt}(d))]$. Операція $\nu \Rightarrow$ інтерпретується звичайним чином.

Інтерпретації композицій послідовного виконання, умовного оператора та циклу задані в даних алгебрах звичайним чином. Тому кожен семантичний терм Pr інтерпретується в алгебрах унікальноіменних та строгоіндексованих даних як певні функції Pr_ν та Pr , відповідно.

Лема 4 (про розіменування в алгебрах програм над унікальноіменними та строгоіндексованими даними). Якщо $d \in \text{UND}(V, W)$ і $\nu \Rightarrow, d \downarrow = r$, то $\nu \Rightarrow, \text{ind}(d) \downarrow = r$.

Доведення. За B8 виконується наступне: $ind(d) = d \cup \{ind(d(u)) \mid u \in rn(d) \setminus ra(d)\}$. А за B1, якщо $v \in nms(d)$, то $v \in rn(ind(d))$. Тоді $v \Rightarrow, ind(d) = (ind(d))(v)$. За визначенням операції ind : $[v \mapsto (v \Rightarrow_u d)] \in ind(d)$. А отже $v \Rightarrow, ind(d) = v \Rightarrow, d$, що і треба було довести.

Лема 5 (про присвоєння в алгебрах програм над унікальноіменними та строгоіндексованими даними). Якщо $d \in UND(V, W)$ і $As_u^v(f)(d) \downarrow = r$, то $As_v^v(f)(ind(d)) = ind(r)$. Якщо $d' \in IND_s(V, W)$ $As_v^v(f)(d) = r'$, то $As_u^v(f)(cnt(d')) = cnt(r')$.

Доведення. Нехай $d \in UND(V, W)$ і $As_u^v(f)(d) \downarrow = r$. Тоді $As_v^v(f)(ind(d)) = ind(d) \nabla, [v \mapsto f(cnt(ind(d)))]$ за визначенням операції присвоєння. Останнє, за визначенням операції ∇ , рівне $ind(cnt(ind(d)) \nabla, [v \mapsto f(cnt(ind(d)))])$. А це, за B6, визначається як $ind(d \nabla, [v \mapsto f(d)] = ind(As_u^v(f)(d))$, що і треба було довести.

Нехай $d' \in IND_s(V, W)$ і $As_v^v(f)(d) = r'$. Тоді $As_u^v(f)(cnt(d')) = cnt(d') \nabla, [v \mapsto f(cnt(d'))]$. Останнє, за B10, рівне $cnt(cnt(d') \nabla, [v \mapsto f(cnt(d'))])$. Останнє, за визначенням операції ∇ , $cnt(d' \nabla, [v \mapsto f(cnt(d'))]) = cnt(As_v^v(f)(d'))$, що і треба було довести.

Теорема 1 (про стабільність програми при змінах структур даних). Для будь-якої програми Pr та для будь-якого унікальноіменного даного d виконується наступне: якщо $Pr_u(d) \downarrow = r$ то $Pr(ind(d)) \downarrow = r'$, причому $cnt(r') = r$.

Смисл теореми полягає у тому, що для кожної інтерпретації Pr_u семантичного терму Pr в алгебрі унікальноіменних даних, його інтерпретація Pr_i в алгебрі строгоіндексованих даних (яка має кращі характеристики доступу до

компонентів даних) буде рівнозначною Pr_u (рис. 7).

Доведення. З Лем 4 і Лем 5 випливає, що $\forall d \in UND(V, W) \quad v \Rightarrow_u d \downarrow = r \Leftrightarrow v \Rightarrow, ind(d) \downarrow = r$, $As_u^v(f)(d) \downarrow = r \Leftrightarrow As_v^v(f)(ind(d)) \downarrow = r' \text{ і } cnt(r') = r$. Тоді, що індукцією за побудовою Pr , отримуємо, що Pr_i на d' повертає дане $r' \in IND_s(V, W)$, і $cnt(r') = r$, що і треба було довести.

$$\begin{array}{ccc} d \in UND(V, W) & \xrightarrow{Pr_i} & r \in UND(V, W) \\ \downarrow ind \quad \uparrow cnt & & \uparrow cnt \quad \downarrow ind \\ d' \in IND_s(V, W) & \xrightarrow{Pr_i} & r' \in IND_s(V, W) \end{array}$$

Рис. 7. Комутативна діаграма зв'язку унікальноіменних та строгоіндексованих даних

Висновки

У статті введено та досліджено класи слабо-унікальноіменних, унікальноіменних та строгоіндексованих даних, операції над ними та їх властивості. На цій основі проілюстрована ефективність роботи з такими даними для задач, в яких превалюють операції пошуку та доступу до даних. Введено інтерпретації мови *SICON* в алгебрах унікальноіменних та строгоіндексованих даних та доведена теорема про рівнозначність різних інтерпретацій програм (над унікальноіменними та строгоіндексованими даними). Розроблені методи можуть бути застосовані для оптимізації пошуку та доступу до компонентів для номінативних даних.

Подальше узагальнення строгоіндексованих даних, послаблення умови індексованості для збільшення ефективності роботи з такими даними для ширшого класу задач планується провести у наступних роботах.

Список використаних джерел

1. Nikitchenko N.S. A Composition Nominative Approach to Program Semantics // Technical Report IT-TR: 1998-020. – Technical University of Denmark. – 1998. – 103 p.
2. Brian F. Cooper, Neal Sample, Michael J. Franklin, Gisli R. Hjaltason and Moshe Shadmon. A fast index for semistructured data // VLDB – Roma, 2001. – pp.341–350.
3. J. McHugh, J. Widom, S. Abiteboul, Q. Luo, and A. Rajaraman. Indexing Semistructured Data. Technical Report, January 1998
4. Нікітченко М., Іванов Є. Композиційно-номінативні мови програм з асоціативним розмінуванням // Вісник Львівського університету. Прикладна математика та інформатика. — 2010. — Вип. 16. — С. 124-139.
5. Басараб І.А., Нікітченко Н.С., Редько В.Н. Композиционные базы данных. – Киев: Либідь. – 1992. – 191 с.

Надійшла до редколегії 17.11.2011

УДК 681.5

Савельев Д. М., магистрант
Шестопалов М. Ю., проректор, к.т.н., доц.
С-Петербургский гос. электротехнический
университет "ЛЭТИ"

Алгоритм обобщенной оценки кластеризации данных

В данной статье рассматривается алгоритм определения оптимального количества кластеров в разбиении данных с помощью Fuzzy C-Means (FCM) алгоритма нечеткой кластеризации. Предлагается алгоритм формирования единой оценки качества разбиения данных на кластеры. Реализуется автоматизированная процедура процесса кластеризации данных.

Ключевые слова: Нечеткая кластеризация, FCM-алгоритм, критерии оценки качества разбиения, GCVE алгоритм.

*E-mail: savelyev.dan@gmail.com, Shestopalov_08@mail.ru
Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

В настоящее время необходимость кластерного анализа данных возникает во многих областях – в промышленности, бизнесе, медицине, социальных исследованиях и т.д. Задача заключается в разбиении исходного массива данных, представляющих описание характеристик совокупности каких-либо объектов на некоторое число групп, называемых кластерами.

Все множество алгоритмов кластеризации данных может быть разбито на две большие группы – четкие и нечеткие алгоритмы, в зависимости от того, с какой вероятностью объект принадлежит одному из кластеров [1]. Так, для четких алгоритмов характерна принадлежность объекта одному и только одному из кластеров. Для нечетких же алгоритмов каждый объект может принадлежать нескольким кластерам в разной степени, которая определяется функцией принадлежности.

Одним из наиболее известных алгоритмов является Fuzzy C-Means (FCM) алгоритм. Он обладает следующими достоинствами: универсальность, простота реализации и быстродействие. Однако существенным недостатком является необходимость априорно задавать количество кластеров, на которое должно быть разбито исходное множество данных.

Savelyev D. M., undergraduate
Shestopalov M.Y., vice-chancellor, Candidate
of Technical Sciences, Associate Professor
State electrotechnical university "LETI"
of St-Petersburg

Algorithm of general cluster validity evaluation

The matter of this article is the algorithm of searching for the optimal cluster quantity in partitions of data using the Fuzzy C-Means (FCM) algorithm of fuzzy clusterization. The algorithm, which calculates the integrated estimate of data partitioning quality, is introduced. The procedure of automating the clusterization process is realized.

Key Words: Clusterization, FCM-algorithm, cluster validity indexes, GCVE algorithm

В ряде работ [2,3] авторами были предложены несколько критериев оценки качества разбиения. Каждый из этих критериев оценивает различные параметры разбиения на некоторое число кластеров и выдает оценку для качества этого разбиения. Трудность при их применении в реальных задачах заключается в том, что а) результаты работы каждого из критериев невозможно сравнить между собой и б) заранее неизвестно, какой из критериев даст наиболее точные результаты.

В данной статье предлагается обобщенный алгоритм оценки качества разбиения данных на кластеры (general cluster validity evaluation (GCVE) algorithm) при решении задачи априорного определения оптимального числа кластеров в исходном наборе данных, и также включает в себя рекомендации по возможному улучшению качества работы алгоритма.

FCM-алгоритм. Fuzzy C-Means (FCM) алгоритм – это алгоритм нечеткой кластеризации данных, в котором каждому объекту из исходной совокупности данных присваивается степень принадлежности к одному из кластеров. Этот алгоритм представил Джеймс Бэздек (James Bezdek) в 1981 году [4], как нечеткую модификацию алгоритма K-means. FCM

алгоритм разбивает n объектов данных x_i ($i = 1, \dots, n$), обладающим некоторым набором свойств, на c нечетких кластеров и вычисляет центры этих кластеров таким образом, чтобы минимизировать целевую функцию. В FCM-алгоритме принадлежность каждого данного к какому-либо кластеру записывается в матрицу M , и степень этой принадлежности может быть любым действительным числом в диапазоне $[0,1]$.

Но для каждого данного должно выполняться условие (1):

$$\sum_{i=1}^c \mu_{ij} = 1, \forall j = 1, \dots, n \quad (1)$$

Целевая функция выглядит следующим образом:

$$\sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^n \mu_{ij}^m \|x_j - a_i\|^2 \rightarrow \min, \quad (2)$$

где μ_{ij} - степень принадлежности j -го данного к i -му кластеру, a_i - центр i -го кластера, а параметр m - значение так называемого экспоненциального веса, который позволяет при формировании координат центров кластеров усилить влияние объектов с большими значениями степеней принадлежности и уменьшить влияние объектов с малыми значениями степеней принадлежности. В данной статье параметр m принят равным 2.

Нечеткое разбиение данных производится путем итерационного улучшения целевой

функции (2), с уточнением на каждой итерации координат центров кластеров a_i по формуле (3):

$$a_i = \sum_{j=1}^n \mu_{ij}^m \cdot x_j / \sum_{j=1}^n \mu_{ij}^m \quad (3)$$

и степеней принадлежности данных μ_{ij} по формуле (4):

$$\mu_{ij} = \frac{c}{\sum_{k=1}^c \left(\frac{\|x_j - a_i\|}{\|x_j - a_k\|} \right)^{\frac{2}{1-m}}} \quad (4)$$

Критерии оценки качества разбиения. Предложенный в данной статье алгоритм обобщенной оценки качества разбиения использует результаты расчетов 7 различных критериев [2,3], описание которых представлено в табл.1. Все эти критерии можно разбить на две большие группы [3,5]. Первая из них (группа I) включает в себя критерии, оценивающие близость расположения объектов внутри каждого кластера, то есть компактность кластеров. Критерии, входящие во вторую группу (группа II), учитывают помимо компактности еще и геометрическое расположение кластеров друг относительно друга. Наилучшим с точки зрения любого из критериев является разбиение на компактные кластеры, которые разнесены друг относительно друга на значительное расстояние. Столбец табл. 1 «Оптимальное значение» сообщает о том, какая из оценок разбиения данных на разное количество кластеров является наилучшей – максимальная или минимальная.

Таблица 1

№	Обозначение	Полное название	Группа	Оптимальное значение
1	PC	Partition Coefficient	I	Максимальное
2	PE	Partition Entropy coefficient	I	Минимальное
3	MPC	Modified Partition Coefficient	I	Максимальное
4	FS	Fukuyama-Sugeno index	II	Минимальное
5	XB	Xie-Beni index	II	Минимальное
6	FHM	Fuzzy HyperVolume validity function	II	Минимальное
7	PCAES	Partition Coefficient And Exponential Separation index	II	Максимальное

Описание процедуры. Для того чтобы получить априорную оценку оптимального количества кластеров в некотором множестве данных,

в данной статье предлагается использовать разработанный обобщенный алгоритм оценки

качества разбиения данных на кластеры (GCVE алгоритм).

Постановка задачи. Перед применением алгоритма задано множество данных $X = \{x_i\}$, подлежащее кластеризации. Это множество данных разбивается с помощью FCM-алгоритма на различное количество кластеров $N = \{n_i \mid n_i \geq 2\}$. Для того чтобы оценить качество разбиения множества X на определенное число кластеров n_i , существует множество K критериев оценки качества разбиения. Каждый из критериев K на множестве N осуществляет оценки качества разбиения $R: K \times N \rightarrow R$.

Задача. Необходимо на основе множества критериев K создать алгоритм, который обобщит результаты работы каждого из критериев k_j и создаст на их основе единую оценку качества разбиения.

Шаг 0. Предварительный. Этот шаг по своей сути не является шагом алгоритма, и служит лишь для того, чтобы сформировать необходимые входные данные в структурированной форме. На этом шаге необходимо вычислить для каждого критерия k_j , $j = 1, \dots, 7$, оценки качества разбиения и свести их в матрицу (5):

$$\begin{array}{c|cccc} & k_1 & \dots & k_7 \\ n_1 & r_{11} & \dots & r_{17} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{\max} & r_{\max,1} & \dots & r_{\max,7} \end{array} \quad (5)$$

В матрице (5) значение r_{ij} представляет собой оценку качества разбиения исходных данных на n_i кластеров с помощью k_j -го критерия. Например, если $n_1 = 2$, то r_{12} - это оценка качества разбиения данных на 2 кластера с помощью второго критерия, а r_{53} - это оценка разбиения на 6 кластеров с помощью третьего критерия.

Шаг 1. Для каждого критерия k_j среди всех r_{ij} необходимо определить единственное значение win_j , которое является отражением наилучшего разбиения множества X на кластеры. Значение win_j определяется по формуле (6):

$$\text{win}_j = \begin{cases} \max(r_{ij}) \\ j \\ \min(r_{ij}) \end{cases} \quad (6)$$

Выбор функции максимума, $\max(r_{ij})$, или минимума, $\min(r_{ij})$, осуществляется в зависимости от способа определения наилучшего результата в каждом из методов k_j .

Шаг 2. Определяется доверительный интервал $\omega: \omega \in (0,1]$. Его величина выбирается экспертом в предметной области решаемой задачи, а назначение обсуждается ниже.

Шаг 3. На данном шаге из матрицы (5) необходимо для каждого из критериев k_j (для каждого столбца) выбрать такие величины r_{ij} , которые по значению будут близки к наилучшему показателю win_j . Для этого и используется доверительный интервал ω . Его величина, будучи переведенной в проценты (умноженной на 100%), показывает насколько сильно r_{ij} может отличаться от win_j , чтобы быть выбранным. Для осуществления выбора сначала рассчитываются значения b_{ij} по формуле (7):

$$b_{ij} = \frac{|\text{win}_j - r_{ij}|}{\left| \max_j(r_{ij}) - \min_j(r_{ij}) \right|} \quad (7)$$

Шаг 4. Затем создается новая матрица A , аналогичная по размерам матрице (5). Матрица A должна быть заполнена значениями a_{ij} , которые вычисляются по формуле (8):

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 - b_{ij}, & b_{ij} < \omega \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8)$$

Шаг 5. Для каждого из критериев k_j определяется значение weight_j , которое определяет степень его влияния на окончательный результат работы алгоритма. Из всех значений weight_j формируется вектор W по формуле (9):

$$W = \begin{Bmatrix} \text{weight}_1 \\ \vdots \\ \text{weight}_7 \end{Bmatrix}, \quad \sum_{j=1}^7 \text{weight}_j = 1, \quad (9)$$

$$\text{weight}_j \in [0,1] \quad \forall j$$

Шаг 6. На данном шаге вычисляется вектор $GCVE$, который представляет собой результаты работы алгоритма. В нем для каждого количества кластеров при разбиении содержится интегрированная оценка, полученная на основе всех 7 критериев с разной степенью их влияния на нее. Вектор $GCVE$ вычисляется по формуле (10):

$$A \times W = GCVE \quad (10)$$

Или в скалярной форме по формуле (11):

$$gcve_i = \sum_{j=1}^7 a_{ij} \cdot weight_j \quad (11)$$

Окончательным результатом работы алгоритма является оптимальное количество кластеров в исходном массиве данных. Определяется это число по формуле (12):

$$optimum = \max_j (gcve_j) \quad (12)$$

По своей сути каждое значение вектора $GCVE$ является линейной комбинацией значений a_{ij} (отобранных и нормализованных значений r_{ij}) и удельных весов $weight_j$ каждого из критериев в окончательной оценке.

Предложенная методика обладает следующими особенностями, каждая из которых заключается в возможности настраивать результаты работы алгоритма в зависимости от мнения эксперта и характера решаемой задачи. В первый раз мнение эксперта учитывается при выборе значения доверительного интервала ω , что позволяет либо включать, либо исключать неко-

торые результаты r_{ij} из окончательной оценки. Во второй раз его мнение учитывается при выборе удельных весов $weight_j$, что позволяет усиливать или ослаблять влияние отдельных критериев на окончательный результат.

Для описания предложенного алгоритма использованы 7 критериев оценки качества разбиения данных, описанные в табл.1. Но $GCVE$ алгоритм обладает свойством масштабируемости, так как позволяет, учитывать новые критерии и исключать используемые, что повышает его гибкость при решении задачи кластеризации в различных предметных областях.

Оценка работоспособности разработанного $GCVE$ алгоритма приводится на тестовых наборах данных, которые разделены на 3 группы. Каждая из этих групп создана для того, чтобы проверить применимость алгоритма при решении задач разной природы, а также для проверки качества производимых алгоритмом оценок по критерию оптимальности. Функционирование алгоритма проверяется при разбиении всех групп данных FCM-алгоритмом на число кластеров от 2 до 7.

Оценка работоспособности проводилась на 4 кластерах, при условии различного их взаимного расположения (рис.1). Кластеры расположенные слева внизу находятся на разном расстоянии друг от друга: на рис.1а они расположены очень близко друг к другу и их очертания позволяют практически полностью слиться в один единый кластер. Далее, на рис.1б и рис.1в они все более дистанцируются друг от друга, в то время как остальные два кластера остаются статичными.

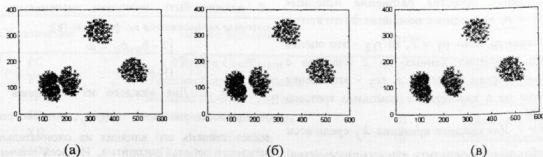


Рисунок 1

Задача данной группы заключается в том, чтобы определить насколько хорошо $GCVE$ алгоритм позволяет выделить оптимальное количество кластеров в каждом из похожих случаев (а)-(в). На рис.1а наиболее вероятное

количество кластеров – это 3, на рис.1б – возможной оптимальной оценкой является как 3, так и 4 кластера, а на рис.1в – присутствуют уже 4 хорошо отделенных друг от друга кластера.

Результаты работы алгоритма представлены в табл.2.

Таблица 2

c	PC (max)	PE (min)	MPC (max)	FS (min)	XB (min)	FHV (min)	PCAES (max)	GCVE (max)
<i>Случай (а)</i>								
2	0,887	0,300	0,774	-10 603 143,852	0,063	4 517,867	1,409	0,579
3	0,901	0,319	0,852	-20 753 355,013	0,042	2 715,042	1,159	0,951
4	0,801	0,562	0,735	-16 118 681,147	0,155	2 454,454	0,639	0,461
5	0,720	0,797	0,650	-14 359 710,057	0,409	2 461,695	1,546	0,499
6	0,675	0,968	0,610	-14 120 957,776	0,345	2 620,635	0,390	0,431
7	0,634	1,027	0,573	-13 783 516,725	0,277	2 717,837	-2,013	0,218
<i>Случай (б)</i>								
2	0,878	0,322	0,755	-10 453 850,678	0,066	4 995,906	1,422	0,590
3	0,885	0,357	0,828	-20 494 390,980	0,050	3 053,274	1,164	0,836
4	0,829	0,510	0,772	-17 197 944,161	0,109	2 448,469	0,693	0,736
5	0,772	0,670	0,715	-18 122 411,810	0,426	2 768,796	-1,115	0,219
6	0,693	0,914	0,632	-14 597 182,182	0,351	2 616,085	0,507	0,440
7	0,659	1,052	0,602	-14 715 045,480	0,407	2 660,164	-0,557	0,229
<i>Случай (в)</i>								
2	0,856	0,365	0,712	-10 069 450,438	0,072	6 201,308	1,462	0,593
3	0,783	0,583	0,675	-11 569 226,126	0,184	5 142,986	1,089	0,233
4	0,864	0,441	0,818	-19 165 792,542	0,065	2 428,498	0,890	0,970
5	0,778	0,680	0,722	-17 054 398,992	0,442	2 760,392	-0,281	0,228
6	0,729	0,814	0,675	-17 243 417,323	0,384	2 988,659	-2,154	0,213
7	0,673	0,931	0,619	-15 716 135,408	0,288	2 751,268	-1,826	0,229

В табл.2 цветом выделены те ячейки, значения которых являются наилучшим результатом кластеризации с точки зрения каждого критерия. В случае (а) видно, что наиболее вероятным количеством кластеров c^* в наборе данных является 3. Случай (б) уже является спорным. В нем $c^* = 3$, но оценка в 4 кластера также является весьма «хорошей». В случае (в) ситуация вновь становится однозначной: $c^* = 4$.

Заключение. Предложенный GCVE алгоритм обладает рядом достоинств: простота реализации, низкая вычислительная нагрузка, гибкость/масштабируемость (алгоритм позволяет добавлять и удалять критерии оценки качества разбиения), настраиваемость (перед применением алгоритма параметры его работы можно настроить под решаемую задачу с помощью мнения эксперта).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлова О.А., Попова Ю.Б., Шестопалов М.Ю. Диагностика технических объектов на

основе методов кластеризации информации: Уч. пособие.- СПб: СЗТУ, 2009 – 114 с.

2. K.L. Wu, M.S. Yang. "A cluster validity index for fuzzy clustering", Pattern Recognition Letters 26, pp.1275-1291, 2005.

3. D.W. Kim, K.H. Lee, D. Lee, "On cluster validity index for estimation of the optimal number of fuzzy clusters", Pattern Recognition 37, pp.2009-2025, 2004.

4. Bezdek J.C., "Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms", Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, USA, 1981.

5. El-Melegy M., Zanaty E.A., Abd-Elhafiez W.M., Farag A. "On cluster validity indexes in fuzzy and hard clustering algorithms", IEEE International Conference on Image Processing, 2007. Сетевой ресурс - http://ieeexplore.ieee.org/xpl/freeabs_all.jsp?arnumber=4379496

Надійшла до редколегії 21.11.2011

УДК 517.5

Савкіна М.Ю., к. ф.-м. н.

Характеристична функція сумісного розподілу двох квадратичних форм, що використовується при обчисленні моментів оцінок параметрів моделі сплайнової регресії

Знайдемо формулу, за допомогою якої можна обчислювати значення характеристичної функції сумісного розподілу двох квадратичних форм від нормально розподілених випадкових величин. Такі характеристичні функції використовуються для знаходження нижньої та верхньої границі для математичного сподівання та дисперсії оцінки точки переходу в моделі нелінійної сплайнової регресії, де функція регресії - лінійний сплайн на відрізку $[0, 1]$ з одним вузлом. Розташування вузла невідоме та підлягає оцінюванню.

Ключові слова: модель нелінійної регресії, оцінка параметрів, лінійний сплайн

Savkina M.Yu., cand. ph.-math. science

The characteristic function of the simultaneous distribution of two quadratic forms which is applied for calculation of the moments of the estimates of parameters of spline regression model

The formula using it can be calculated values of the characteristic function of the simultaneous distribution of two quadratic forms of normal random quantities is found. Such characteristic functions are used for finding low and upper boundaries for mathematical expectation and variance of estimate of knot point of nonlinear spline regression model, where function of regression is linear spline on segment $[0, 1]$ with one knot point. The location of knot point isn't known and to be estimated.

Key Words: nonlinear regression model, estimate of parameters, linear spline

E-mail: marta@imath.kiev.ua

Статтю представив д.т.н. Гарашенко Ф.Г.

Розглянемо модель регресії

$$x_i = f(\tau_i) + \xi_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (1)$$

де ξ_0, \dots, ξ_n - незалежні у сукупності нормально розподілені випадкові величини з $E\xi_i = 0$ та $D\xi_i = \sigma^2$, а функція регресії має вигляд

$$f(\tau) = \begin{cases} a\tau + b, & \text{якщо } 0 \leq \tau \leq \tau^*, \\ c\tau + d, & \text{якщо } \tau^* \leq \tau \leq 1, \\ a\tau^* + b = c\tau^* + d. \end{cases} \quad (2)$$

Якщо точка з'єднання τ^* відома, модель (1), (2) є лінійною по параметрах a, b, c, d , які підлягають оцінюванню. Якщо точка з'єднання τ^* невідома, модель стає нелінійною по параметрах, а τ^* перетворюється на невідомий параметр моделі, який також треба оцінювати.

Зауважимо, що невідомі параметри моделі (1), (2) будуть залежними, але функцію $f(\tau)$ можна подати в іншому вигляді

$$f(\tau) = (a\tau + b) + c_1(\tau - \tau^*)_+, \quad (2')$$

де $c_1 = c - a$, а $(\tau - \tau^*)_+$ - зрізана степенева функція [1]. В цих позначеннях a, b, c_1, τ^* - параметри, які підлягають оцінюванню; вони будуть незалежними.

Запропоновано такий алгоритм отримання оцінки τ^* на підставі траєкторії x_0, x_1, \dots, x_n , який можна вважати модифікацією методу найменших квадратів. Спочатку припускається, що точка переходу τ^* розташована в точці τ_k . Для отримання оцінки параметрів a, b, c_1 скористаємося методом найменших квадратів, який полягає в мінімізації суми

$$\sum_{i=0}^n (x_i - (a\tau_i + b) - c_1(\tau_i - \tau_k)_+)^2$$

по відношенню до параметрів a, b, c_1 . Найменше значення цієї суми, яке називається залиш-

ковою сумою квадратів, позначимо через s_k^2 .
Покладаючи послідовно $k = 1, 2, \dots, n-1$,
отримаємо $n-1$ значень $s_1^2, s_2^2, \dots, s_{n-1}^2$, се-
ред яких вибираємо найменше $s_{k_0}^2$, а за оцін-
ку точки переходу τ^* приймається точка τ_{k_0} :
 $\hat{\tau}^* = \tau_{k_0}$.

Оцінка $\hat{\tau}^*$ є випадковою величиною; її ма-
тематичне сподівання можна подати у вигляді

$$E\hat{\tau}^* = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{n} p(\Delta_l),$$

де

$$\Delta_l = (s_1^2 > s_l^2, \dots, s_{l-1}^2 > s_l^2, \\ s_{l+1}^2 > s_l^2, \dots, s_{n-1}^2 > s_l^2).$$

В роботі [2] знайдено такі межі для $p(\Delta_l)$:

$$\max\{0, 1 - p_2\} < p(\Delta_l) < \\ < \min\{1 - p_1, \min_{i,j} p(s_i^2 > s_l^2, s_j^2 > s_l^2)\}, \quad (3)$$

де

$$p_1 = \sum_{k=1, k \neq l}^n p(s_k^2 < s_l^2) - \\ - \sum_{k < j, k, j \neq l} p(s_k^2 < s_l^2, s_j^2 < s_l^2),$$

$$p_2 = \sum_{k=1, k \neq l}^n p(s_k^2 < s_l^2) - \\ - \max_j \sum_{k=1, k \neq j, l} p(s_k^2 < s_l^2, s_j^2 < s_l^2).$$

Як бачимо, нижня та верхня межа для $p(\Delta_l)$
в формулі (3) складаються з доданків вигля-
ду $p(s_k^2 < s_l^2)$ та $p(s_k^2 < s_l^2, s_j^2 < s_l^2)$, тобто для
того, щоб знайти зазначені межі, треба обчи-
слити ці доданки.

Доданки вигляду $p(s_k^2 < s_l^2)$ можна обчи-
слити декількома способами.

В роботі [3] доведено, що $s_k^2 - s_l^2$ є квадра-
тичною формою від нормально розподілених
випадкових величин x_0, x_1, \dots, x_n з $Ex_i = a\tau_i +$
 $+b + c_1(\tau_i - \tau^*)$ та $Dx_i = \sigma^2$:

$$s_k^2 - s_l^2 = \tilde{x}' A_l \tilde{x},$$

де

$$\tilde{x}' = (x_0, x_1, \dots, x_n), \quad A_l = P_l - P_k,$$

$$P_k = T_k(T_k' T_k)^{-1} T_k', \quad P_l = T_l(T_l' T_l)^{-1} T_l',$$

$$T_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{n} & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{k}{n} & 1 & 0 \\ \frac{k+1}{n} & 1 & \frac{1}{n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \frac{n-k}{n} \end{pmatrix}, \quad T_l = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{n} & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{l}{n} & 1 & 0 \\ \frac{l+1}{n} & 1 & \frac{1}{n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \frac{n-l}{n} \end{pmatrix}.$$

Далі, в роботі [3] отримано, що A_l має тільки
два ненульові власні числа λ та $-\lambda$, а випад-
кову величину $s_k^2 - s_l^2$ можна подати у вигляді

$$s_k^2 - s_l^2 = (y'_0)^2 - (y'_1)^2,$$

$$\text{де } y'_0 = \sqrt{\lambda} y_0, \quad y'_1 = \sqrt{\lambda} y_1,$$

y_0, y_1 - незалежні нормально розподілені ви-
падкові величини з $Ey_0 = b_{\mu, \lambda}$, $Ey_1 = b_{\mu, -\lambda}$ та
 $Dy_0 = Dy_1 = \sigma^2$,

$$b_{\mu, \lambda} = \tilde{b}'_{\lambda} * \tilde{\mu}, \quad b_{\mu, -\lambda} = \tilde{b}'_{-\lambda} * \tilde{\mu},$$

$$\tilde{\mu} = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)',$$

$$\mu_i = a\tau_i + b + c_1(\tau_i - \tau^*), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

$\tilde{b}_{\lambda}, \tilde{b}_{-\lambda}$ - власні вектори, які відповідають вла-
стним числам λ та $-\lambda$.

Ймовірність $p(s_k^2 > s_l^2)$ запропоновано об-
числювати за допомогою формули

$$p(s_k^2 > s_l^2) = \int_0^{\infty} h_+(z) dz, \quad (4)$$

де $h_+(z)$ - щільність розподілу суми випадко-
вих величин $(y'_0)^2$ та $-(y'_1)^2$. Завдяки низки
перетворень в інтегралі (4) отримано форму-
лу, в якій $p(s_k^2 > s_l^2)$ є сумою двох скінченних
однократних інтегралів.

В роботі [2] ймовірність $p(s_k^2 > s_l^2)$ запро-
поновано обчислювати за допомогою характе-
ристичної функції $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$ випад-
кової величини $s_k^2 - s_l^2$ за формулою

$$p(s_k^2 > s_l^2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi_2(t) \sin tu \, dt \, du.$$

Для функції $\varphi_2(t)$ отримано аналітичну фор-
мулу

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2 \lambda^2 \sigma^4}} e^{-\frac{2t^2 \lambda^2 \sigma^4 (b_{\mu, \lambda}^2 + b_{\mu, -\lambda}^2)}{1 + 4t^2 \lambda^2 \sigma^4}} * \\ * \sin \frac{t \lambda \sigma^2 (b_{\mu, \lambda}^2 - b_{\mu, -\lambda}^2)}{1 + 4t^2 \lambda^2 \sigma^4}.$$

Що стосується доданків вигляду $p(s_k^2 < s_l^2, s_j^2 < s_l^2)$, в роботі [2] доведено теорему, згідно якої

$$p(s_k^2 < s_l^2, s_j^2 < s_l^2) = \frac{1}{(2\pi)^2} *$$

$$* \lim_{y \rightarrow -\infty} \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c \int_{-c}^c \frac{e^{-it_1 y} - 1}{it_1} \frac{e^{-it_2 y} - 1}{it_2} * \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad (5)$$

де $\varphi(t_1, t_2)$ – характеристична функція двовимірної випадкової величини $(s_k^2 - s_l^2, s_j^2 - s_l^2)$. Обчислення $p(s_k^2 < s_l^2, s_j^2 < s_l^2)$ за формулою (5) викликає принципові труднощі. Для практичного використання введемо більш зручну формулу, але для цього накладемо умову на характеристичну функцію $\varphi(t_1, t_2)$.

Теорема 1. Якщо $\varphi(t_1, t_2) \in L_2(R^2)$, то

$$p(s_k^2 > s_l^2, s_j^2 > s_l^2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_0^\infty I_1(u_1, u_2) du_1 du_2, \quad (6)$$

де

$$I_1(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (\cos(t_1 u_1 + t_2 u_2) \varphi_1(t_1, t_2) + \sin(t_1 u_1 + t_2 u_2) \varphi_2(t_1, t_2)) dt_1 dt_2,$$

$\varphi_1(t_1, t_2)$ та $\varphi_2(t_1, t_2)$ – дійсна та уявна частини характеристичної функції $\varphi(t_1, t_2)$.

Доведення. Згідно умови теореми $\varphi(t_1, t_2) \in L_2(R^2)$, а оператор Фур'є

$$g(u_1, u_2) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-i(t_1 u_1 + t_2 u_2)} \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

є унітарним лінійним оператором в просторі $L_2(R^2)$ [4], тому $g(u_1, u_2) \in L_2(R^2)$. Такий оператор має обернений, тобто

$$\varphi(t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-i(t_1 u_1 + t_2 u_2)} g(u_1, u_2) du_1 du_2. \quad (7)$$

В роботі [2] доведено, що щільність розподілу $p(u_1, u_2)$ двовимірної випадкової величини $(s_k^2 - s_l^2, s_j^2 - s_l^2)$ існує; згідно з означенням ха-

рактеристичної функції маємо

$$\varphi(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-i(t_1 u_1 + t_2 u_2)} p(u_1, u_2) du_1 du_2. \quad (8)$$

Функція розподілу випадкової величини однозначно визначається своєю характеристичною функцією (теорема єдиності [5]), тому з (7) та (8) маємо $p(u_1, u_2) = \frac{1}{2\pi} g(u_1, u_2)$ майже всюди, тобто

$$p(u_1, u_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-i(t_1 u_1 + t_2 u_2)} \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad \text{майже всюди.} \quad (9)$$

Оскільки

$$\varphi(t_1, t_2) = \varphi_1(t_1, t_2) + i\varphi_2(t_1, t_2),$$

з формули (9) випливає

$$p(u_1, u_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} * \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (\cos(t_1 u_1 + t_2 u_2) - i \sin(t_1 u_1 + t_2 u_2)) * (\varphi_1(t_1, t_2) + i\varphi_2(t_1, t_2)) dt_1 dt_2 = \frac{1}{(2\pi)^2} (I_1(u_1, u_2) + iI_2(u_1, u_2)),$$

де

$$I_2(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (\cos(t_1 u_1 + t_2 u_2) \varphi_2(t_1, t_2) - \sin(t_1 u_1 + t_2 u_2) \varphi_1(t_1, t_2)) dt_1 dt_2.$$

Функція $p(u_1, u_2)$ дійсна, тому $I_2(u_1, u_2) \equiv 0$, і

$$p(u_1, u_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} I_1(u_1, u_2). \quad (10)$$

Далі,

$$p(s_k^2 > s_l^2, s_j^2 > s_l^2) = \int_0^\infty \int_0^\infty p(u_1, u_2) du_1 du_2; \quad (11)$$

підставляємо (10) в (11), звідки отримуємо (6).

Теорему 1 доведено.

Як бачимо, при обчисленні $p(s_k^2 > s_l^2, s_j^2 > s_l^2)$ по формулі (6) використовуються дійсна та уявна частини характеристичної функції

$\varphi(t_1, t_2)$. Знайдемо їх у явному вигляді.

Спочатку зауважимо, що випадкова величина $s_j^2 - s_l^2$ також є квадратичною формою від нормально розподілених випадкових величин x_0, x_1, \dots, x_n :

$$s_j^2 - s_l^2 = \vec{x}' A_2 \vec{x},$$

де

$$A_2 = \vec{x}' (P_l - P_j) \vec{x},$$

$$P_j = T_j (T_j' T_j)^{-1} T_j',$$

$$T_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{n} & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{k}{n} & 1 & 0 \\ \frac{j+1}{n} & 1 & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \frac{n-j}{n} \end{pmatrix}.$$

Позначимо $A(t_1, t_2) = t_1 A_1 + t_2 A_2$.

Теорема 2. Мають місце рівності

$$\varphi_1(t_1, t_2) = (a * \cos \gamma - b * \sin \gamma) * \theta, \quad (12)$$

$$\varphi_2(t_1, t_2) = (b * \cos \gamma + a * \sin \gamma) * \theta, \quad (13)$$

де

$$a = a_0 * (a_1 * a_2 - b_1 * b_2) - b_0 * (a_1 * b_2 + b_1 * a_2); \quad (14)$$

$$b = a_0 * (a_1 * b_2 + b_1 * a_2) - b_0 * (a_1 * a_2 - b_1 * b_2); \quad (15)$$

$$a_j = \sqrt{\frac{\sqrt{1 + 4 * (\lambda_j \sigma^2)^2 + 1}}{2 + 8 * (\lambda_j \sigma^2)^2}}, \quad j = 0, 1, 2; \quad (16)$$

$$b_j = \frac{\lambda_j}{|\lambda_j|} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + 4 * (\lambda_j \sigma^2)^2} - 1}{2 + 8 * (\lambda_j \sigma^2)^2}}, \quad j = 0, 1, 2; \quad (17)$$

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2;$$

$$\gamma_j = \frac{b_{\mu, \lambda_j}^2 * \lambda_j \sigma^2}{1 + 4 * (\lambda_j \sigma^2)^2}, \quad j = 0, 1, 2;$$

$$\theta = e^{-2(\lambda_0 \gamma_0 + \lambda_1 \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2)},$$

$$b_{\mu, \lambda_j} = \vec{b}_{\lambda_j} * \vec{\mu}, \quad j = 0, 1, 2;$$

$\vec{b}_{\lambda_0}, \vec{b}_{\lambda_1}, \vec{b}_{\lambda_2}$ – власні вектори, які відповідають власним числам $\lambda_0 = \lambda_0(t_1, t_2)$, $\lambda_1 = \lambda_1(t_1, t_2)$, $\lambda_2 = \lambda_2(t_1, t_2)$ матриці $A(t_1, t_2)$.

Доведення. В роботі [2] отримано таку формулу для $\varphi(t_1, t_2)$:

$$\varphi(t_1, t_2) = e^{-\sum_{j=1}^3 2b_{\mu, \lambda_j}^2(t_1, t_2) \frac{\lambda_j^2(t_1, t_2) \sigma^4}{1 + 4\lambda_j^2(t_1, t_2) \sigma^4}} * e^{i \sum_{j=1}^3 b_{\mu, \lambda_j}^2(t_0, t_1) \frac{\lambda_j(t_1, t_2) \sigma^2}{1 + 4\lambda_j^2(t_1, t_2) \sigma^4}} * \frac{1}{\prod_{j=1}^3 \sqrt{1 - 2i\lambda_j(t_1, t_2) \sigma^2}}, \quad (18)$$

Подано комплексні числа $\frac{1}{\sqrt{1 - 2i\lambda_j \sigma^2}}$,

$j = 0, 1, 2$, в алгебраїчній формі $a_j + ib_j$. Для знаходження $a_j, b_j, j = 0, 1, 2$, скористаємося рівністю

$$\frac{1}{1 - 2i\lambda_j \sigma^2} = a_j^2 - b_j^2 + 2ia_j b_j. \quad (19)$$

З рівності (19) маємо таку систему для a_j, b_j :

$$\begin{cases} a_j^2 - b_j^2 + 4a_j b_j \lambda_j \sigma^2 = 1 \\ a_j b_j - \lambda_j \sigma^2 (a_j^2 - b_j^2) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

З рівнянь системи (20) отримаємо

$$a_j b_j = \frac{\lambda_j \sigma^2}{1 + 4\lambda_j^2 \sigma^4}. \quad (21)$$

Підставляємо (21) в будь-яке рівняння (20). Отримаємо бікватратне рівняння для a_j :

$$a_j^4 - \frac{1}{1 + 4\lambda_j^2 \sigma^4} a_j^2 - \frac{\lambda_j^2 \sigma^4}{1 + 4\lambda_j^2 \sigma^4} = 0,$$

розв'язком якого є (16).

Далі, з (16) та (21) маємо (17).

Таким чином, отримаємо

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2i\lambda_0 \sigma^2} \sqrt{1 - 2i\lambda_1 \sigma^2} \sqrt{1 - 2i\lambda_2 \sigma^2}} = (a_0 + ib_0)(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a + ib, \quad (22)$$

де a і b визначаються формулами (14), (15).

Підставимо (22) в (18). Маємо

$$\begin{aligned} \varphi(t_1, t_2) &= e^{-\sum_{j=1}^3 2\lambda_j(t_1, t_2) b_{\mu, \lambda_j}^2(t_1, t_2) \frac{\lambda_j(t_1, t_2) \sigma^4}{1 + 4\lambda_j^2(t_1, t_2) \sigma^4}} * \\ & * (\cos \gamma + i \sin \gamma) * (a + ib) = e^{-2(\lambda_0 \gamma_0 + \lambda_1 \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2)} * \\ & * ((a * \cos \gamma - b * \sin \gamma) + i(b * \cos \gamma + a * \sin \gamma)) = \\ & = \varphi_1(t_1, t_2) + i\varphi_2(t_1, t_2), \end{aligned}$$

де $\varphi_1(t_1, t_2)$ та $\varphi_2(t_1, t_2)$ визначаються формулами (12), (13).

Теорему 2 доведено.

З а у в а ж е н н я. Оскільки $a_j, b_j, \gamma_j, b_{\mu, \lambda_j}, j = 0, 1, 2; a, b, \gamma, \theta$ залежать від $\lambda_j(t_1, t_2), j = 0, 1, 2$, вони є функціями від $t_1, t_2 : a_j = a_j(t_1, t_2), b_j = b_j(t_1, t_2), \gamma_j = \gamma_j(t_1, t_2), b_{\mu, \lambda_j} = b_{\mu, \lambda_j}(t_1, t_2), j = 0, 1, 2; a = a(t_1, t_2), b = b(t_1, t_2), \gamma = \gamma(t_1, t_2), \theta = \theta(t_1, t_2)$.

Теорема 2 дає формули (6), (7) для дійсної та уявної частини характеристичної функції $\varphi(t_1, t_2)$, але ці формули містять невідомі функції $\lambda_0(t_1, t_2), \lambda_1(t_1, t_2), \lambda_2(t_1, t_2)$. Інтеграли у

$$= \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \alpha_3 a_{00} + \beta_3 a_{10} + \gamma_3 a_{20} & \alpha_3 a_{01} + \beta_3 a_{11} + \gamma_3 a_{21} & \dots & \alpha_3 a_{0n} + \beta_3 a_{1n} + \gamma_3 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n a_{00} + \beta_n a_{10} + \gamma_n a_{20} & \alpha_n a_{01} + \beta_n a_{11} + \gamma_n a_{21} & \dots & \alpha_n a_{0n} + \beta_n a_{1n} + \gamma_n a_{2n} \end{pmatrix},$$

формулі (6) природно обчислювати за допомогою квадратурних формул, а для цього достатньо мати лише значення функцій $\varphi_1(t_1, t_2), \varphi_2(t_1, t_2)$ у визначених точках. Наведемо алгоритм, завдяки якому можна знаходити значення цих функцій (а значить і функцій $\varphi_1(t_1, t_2), \varphi_2(t_1, t_2)$) при фіксованих t_1, t_2 .

Алгоритм знаходження власних чисел та власних векторів матриці $A(t_1, t_2)$.

Маємо

$$A(t_1, t_2) =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{00}(t_1, t_2) & a_{01}(t_1, t_2) & \dots & a_{0n}(t_1, t_2) \\ a_{10}(t_1, t_2) & a_{11}(t_1, t_2) & \dots & a_{1n}(t_1, t_2) \\ a_{20}(t_1, t_2) & a_{21}(t_1, t_2) & \dots & a_{2n}(t_1, t_2) \\ a_{30}(t_1, t_2) & a_{31}(t_1, t_2) & \dots & a_{3n}(t_1, t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0}(t_1, t_2) & a_{n1}(t_1, t_2) & \dots & a_{nn}(t_1, t_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\text{rang}(A(t_1, t_2)) = 3$, матрицю $A(t_1, t_2)$ можна подати у вигляді

$$A(t_1, t_2) =$$

якщо

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0;$$

$\alpha_s, \beta_s, \gamma_s, s = 3, \dots, n$, – сталі, які треба знайти.

Для їх знаходження розв'язуємо $n - 2$ лінійні системи третього порядку:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_s \\ \beta_s \\ \gamma_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{s0} \\ a_{s1} \\ a_{s2} \end{pmatrix},$$

$$s = 3, \dots, n.$$

Таким чином, ми отримаємо таке рівняння для знаходження власних чисел матриці $A(t_1, t_2)$:

$$|A(t_1, t_2) - \lambda I| =$$

$$= \lambda^{n-2} \begin{vmatrix} d_0 - \lambda & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 - \lambda & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

де

$$d_0 = a_{00} + \sum_{i=3}^n \alpha_i a_{0i},$$

$$d_1 = a_{10} + \sum_{i=3}^n \alpha_i a_{1i},$$

$$d_2 = a_{20} + \sum_{i=3}^n \alpha_i a_{2i},$$

$$b_0 = a_{01} + \sum_{i=3}^n \beta_i a_{0i},$$

$$b_1 = a_{11} + \sum_{i=3}^n \beta_i a_{1i},$$

$$b_2 = a_{21} + \sum_{i=3}^n \beta_i a_{2i},$$

$$c_0 = a_{02} + \sum_{i=3}^n \gamma_i a_{0i},$$

$$c_1 = a_{12} + \sum_{i=3}^n \gamma_i a_{1i},$$

$$c_2 = a_{22} + \sum_{i=3}^n \gamma_i a_{2i}.$$

Далі,

$$|A(t_1, t_2) - \lambda I| =$$

$$= \lambda^{n-2} (\lambda^3 + (d_0 + b_1 + c_2) \lambda^2 + A \lambda + B) = 0,$$

де

$$A = d_0 b_1 + d_0 c_2 + b_1 c_2 - d_2 c_0 - c_1 b_2 - d_1 b_0,$$

$$B = d_0 b_2 c_1 + b_0 d_1 c_2 + d_2 b_1 c_0 -$$

$$- d_0 b_1 c_2 - b_0 c_1 d_2 - d_1 c_0 b_2.$$

Помітимо, що

$$\begin{aligned} d_0 + b_1 + c_2 &= a_{00} + \sum_{i=3}^n \alpha_i a_{0i} + a_{11} + \\ &+ \sum_{i=3}^n \beta_i a_{1i} + a_{22} + \sum_{i=3}^n \gamma_i a_{2i} = a_{00} + a_{11} + a_{22} + \\ &+ \sum_{i=3}^n (\alpha_i a_{0i} + \beta_i a_{1i} + \gamma_i a_{2i}) = \sum_{i=0}^n a_{ii} = \\ &= \text{tr} A(t_1, t_2) = \text{tr } t_1 A_1 + \text{tr } t_2 A_2 = 0. \end{aligned}$$

Отже, для знаходження ненульових власних чисел матриці $A(t_1, t_2)$ маємо кубічне

рівняння

$$\lambda^3 + A \lambda + B = 0. \quad (23)$$

Оскільки всі власні числа матриці $A(t_1, t_2)$ дійсні, всі корені рівняння (23) теж дійсні. Перший корінь рівняння (позначимо його λ_0) знайдемо методом дотичних. Визначимо проміжок, на якому будуть виконані достатні умови збіжності цього методу.

Так як рівняння (23) має три дійсних кореня, функція $f(\lambda) = \lambda^3 + A \lambda + B = 0$ має дві точки екстремуму: $\lambda^{(1)} = -\sqrt{-\frac{A}{3}}$ та $\lambda^{(2)} = \sqrt{-\frac{A}{3}}$. Очевидно, $\lambda_0 \in [-\sqrt{-\frac{A}{3}}, \sqrt{-\frac{A}{3}}]$.

Якщо $\lambda_0 \neq -\sqrt{-\frac{A}{3}}$, $\lambda_0 \neq \sqrt{-\frac{A}{3}}$ та $\lambda_0 \neq 0$, то $\lambda_0 \in (-\sqrt{-\frac{A}{3}}, 0)$ у випадку, коли $B < 0$, або $\lambda_0 \in (0, \sqrt{-\frac{A}{3}})$ у випадку, коли $B > 0$.

Маємо: $f'(\lambda) < 0$ та $f''(\lambda) < 0$ на інтервалі $(-\sqrt{-\frac{A}{3}}, 0)$; $f'(\lambda) < 0$ та $f''(\lambda) > 0$ на інтервалі $(0, \sqrt{-\frac{A}{3}})$. В обох випадках $f(0)f''(0) > 0$, тобто $\lambda = 0$ буде точкою нульового наближення для метода дотичних. Далі обчислення робляться за формулою

$$\lambda_0^{(k+1)} = \lambda_0^{(k)} - \frac{f(\lambda_0^{(k)})}{f'(\lambda_0^{(k)})}$$

до досягнення заданої точності.

Другий та третій корені рівняння (23) знаходимо за формулами

$$\lambda_1 = -\frac{\lambda_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{2}\right)^2 - \frac{B}{\lambda_0}},$$

$$\lambda_2 = -\frac{\lambda_0}{2} - \sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{2}\right)^2 - \frac{B}{\lambda_0}}.$$

Знайдемо тепер власні вектори, які відповідають власним числам $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. За означенням власний вектор є нетривіальним розв'язком однорідної системи лінійних рівнянь

$$\begin{pmatrix} z_{00} - \lambda & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$* \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ . \\ . \\ . \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Після відповідних перетворень над строками системи маємо

$$\begin{pmatrix} a_{00} - \lambda & a_{01} & a_{02} & a_{03} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & -1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & . & \dots & . \\ \alpha_n & \beta_n & \gamma_n & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} *$$

$$* \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ . \\ . \\ . \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Покладемо $z_2 = \gamma$. Отримаємо таку систему рівнянь відносно $z_0, z_1, z_3, \dots, z_n$:

$$\begin{pmatrix} a_{00} - \lambda & a_{01} & a_{03} & \dots & z_{0n} \\ a_{10} & a_{11} - \lambda & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \alpha_3 & \beta_3 & -1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ \alpha_n & \beta_n & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} *$$

$$* \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_3 \\ . \\ . \\ . \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{02}\gamma \\ -a_{12}\gamma \\ -\gamma_3\gamma \\ . \\ . \\ . \\ -\gamma_n\gamma \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Розв'яжемо її за правилом Крамера.

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{00} - \lambda & a_{01} & a_{03} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} - \lambda & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \alpha_3 & \beta_3 & -1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ \alpha_n & \beta_n & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} d_0 - \lambda & b_0 & a_{03} & \dots & a_{0n} \\ d_1 & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n-2} \begin{vmatrix} d_0 - \lambda & b_0 \\ d_1 & b_1 - \lambda \end{vmatrix};$$

$$\Delta_0(\lambda) = \begin{vmatrix} -a_{02}\gamma & a_{01} & a_{03} & \dots & a_{0n} \\ -a_{12}\gamma & a_{11} - \lambda & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ -\gamma_3\gamma & \beta_3 & -1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ -\gamma_n\gamma & \beta_n & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \gamma \begin{vmatrix} -c_0 & b_0 & a_{03} & \dots & a_{0n} \\ -c_1 & b_1 - \lambda & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n-2}\gamma \begin{vmatrix} -c_0 & b_0 \\ -c_1 & b_1 - \lambda \end{vmatrix};$$

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{00} - \lambda & -a_{02}\gamma & a_{03} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & -a_{12}\gamma & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \alpha_3 & -\gamma_3\gamma & -1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ \alpha_n & -\gamma_n\gamma & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \gamma \begin{vmatrix} d_0 - \lambda & -c_0 & a_{03} & \dots & a_{0n} \\ d_1 & -c_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta_j(\lambda) = \\ a_{00} - \lambda & a_{01} & a_{03} & \dots & -a_{02}\gamma & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} - \lambda & a_{13} & \dots & -a_{12}\gamma & \dots & a_{1n} \\ \alpha_3 & \beta_3 & -1 & \dots & -\gamma_3\gamma & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_n & \beta_n & 0 & \dots & -\gamma_n\gamma & \dots & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n-2}\gamma \begin{vmatrix} d_0 - \lambda & -c_0 \\ d_1 & -c_1 \end{vmatrix};$$

$$= \gamma \begin{vmatrix} d_0 - \alpha_j a_{0j} - \lambda & b_0 - \beta_j a_{0j} & a_{03} & \dots & -c_0 - \gamma_j a_{0j} & \dots & a_{0n} \\ d_1 - \alpha_j a_{1j} & b_1 - \beta_j a_{1j} - \lambda & a_{13} & \dots & -c_1 - \gamma_j a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_j & \beta_j & 0 & \dots & -\gamma_j & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n-2}\gamma \begin{vmatrix} d_0 - \lambda - \alpha_j a_{0j} & b_0 - \beta_j a_{0j} & -c_0 - \gamma_j a_{0j} \\ d_1 - \alpha_j a_{1j} & b_1 - \beta_j a_{1j} & -c_1 - \gamma_j a_{1j} \\ \alpha_j & \beta_j & -\gamma_j \end{vmatrix}, j = 3, \dots, n.$$

Таким чином, розв'язком системи (24) буде

$$z_0 = z_0(\lambda) = \gamma \frac{\Delta_0(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, z_1 = z_1(\lambda) = \gamma \frac{\Delta_1(\lambda)}{\Delta(\lambda)},$$

$$z_3 = z_3(\lambda) = \gamma \frac{\Delta_3(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \dots, z_n = z_n(\lambda) = \gamma \frac{\Delta_n(\lambda)}{\Delta(\lambda)}.$$

Покладаємо

$$Z(\lambda) = \sqrt{\sum_{i=0}^n z_i(\lambda)};$$

отримаємо

$$\bar{b}_{\lambda_j} = \left(\frac{z_0(\lambda_j)}{Z(\lambda_j)}, \frac{z_1(\lambda_j)}{Z(\lambda_j)}, \frac{z_3(\lambda_j)}{Z(\lambda_j)}, \dots, \frac{z_n(\lambda_j)}{Z(\lambda_j)} \right),$$

$$j = 0, 1, 2.$$

Список використаних джерел

1. Зав'язлов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. — Москва: Наука, 1980. — 352 С.
2. Савкіна М.Ю. Межі для зсунення оцінки точки переходу в моделі сплайнової регресії. //Вісник Київського університету. — 2004.—3. — С.300–304.
3. Савкіна М.Ю. Уточнення меж для зсунення оцінки точки переходу в моделі нелінійної сплайнової регресії. //Вісник Київського університету. — 2008.—3. — С.165–172.
4. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. — Москва: Мир, 1978. — 400 С.
5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. — Москва: Наука, 1965. — 400 С.

Надійшла до редакції 11.11.11.

УДК 681.5

Олександр С. Слабоспицький*, к. ф. -м.н., доц.

Розщеплений рекурентний алгоритм оцінювання параметрів нелінійних дискретних динамічних систем при неklasичних припущеннях методом найменших квадратів з мінімальним відхиленням від точок "тяжіння"

Для нелінійних динамічних об'єктів з дискретним часом розглядається задача оцінювання стаціонарних параметрів, коли кожне окреме рівняння стану системи має свій власний вектор параметрів та в довільний момент для цих параметрів відомі їх точки "тяжіння". Для оцінки параметрів методом найменших квадратів з найменшою нормою відхилення від цих точок "тяжіння" та відповідної залишкової суми квадратів отримані розщеплені рекурентні алгоритми для вищезазначених систем при неklasичних припущеннях. Запропоновані дві форми представлення цієї рекурентної процедури оцінювання.

Ключові слова: оцінювання стаціонарних параметрів, оператор псевдообернення, дискретні нелінійні динамічні системи, метод найменших квадратів, розщеплені рекурентні алгоритми, залишкова сума квадратів, точки "тяжіння".

*E-mail: sl@univ.kiev.ua

Статтю представив д.т.н., проф. Гарашенко Ф.Г.

При розв'язанні різноманітних задач оцінювання стаціонарних параметрів складних систем [1] широко застосовується метод найменших квадратів (МНК) [2].

Поширення оцінки МНК на випадок, коли можуть порушуватися класичні припущення, що гарантують єдиність цієї оцінки, було здійснено у роботі [3] з використанням оператора псевдообернення по Муру-Пенроузу. Саме в останній публікації для регресійної моделі було отримано рекурентні алгоритми для оцінки параметрів МНК з найменшою евклідовою нормою та відповідної залишкової суми квадратів.

Задача оцінювання стаціонарних параметрів регресійної моделі методом найменших квадратів з найменшою нормою відхилення від відомих

Alexander S. Slabospitsky*,
Ph.D. (Physics & Mathematics), Associate Professor**Splitted recurrent parameter estimation algorithm of nonlinear discrete dynamic systems under non-classical assumptions by the least squares method with the minimum deviation from 'attraction' points**

The estimation problem of stationary parameters is considered for nonlinear dynamic objects with discrete time when each individual equation of system state has its own parameter vector and for these parameters their 'attraction' points are known at any moment. Splitted recurrent algorithms are obtained for parameter estimate by the least squares method with the least deviation norm from these 'attraction' points and corresponding residual sum of squares for above-mentioned systems under non-classical assumptions. Two representation forms of this recurrent estimation procedure are suggested.

Key words: stationary parameter estimation, pseudoinverse operator, discrete nonlinear dynamic systems, least squares method, splitted recurrent algorithms, residual sum of squares, 'attraction' points.

точок "тяжіння" при можливому порушенні класичних припущень, що гарантують єдиність цієї оцінки, була розглянута у роботі [4]. У ній були отримані явна та дві рекурентні форми представлення для підрахунку цієї оцінки МНК, а також рекурент для відповідної залишкової суми квадратів.

У статті [5] останні результати було поширено на клас нелінійних дискретних динамічних систем. Отримані в [5] рекурентні процедури виявилися досить громіздкими. Але з'ясувалося, що структуру останніх рекурентних алгоритмів можна суттєво спростити, коли кожне окреме рівняння стану системи має свій власний вектор відомих параметрів. Саме з такою ситуацією не рідко приходиться стикатися на практиці.

У даній роботі отримані явна та дві рекурентні форми представлення для оцінки параметрів МНК з найменшою нормою відхилення від відомих точок "тяжіння" для нелінійних дискретних динамічних систем при можливому порушенні класичних припущень, що гарантують єдиність цієї оцінки. Для відповідної

залишкової суми квадратів отримана рекурентна процедура.

Розглянемо задачу оцінювання вектора невідомих стаціонарних параметрів α для нелінійних динамічних об'єктів з дискретним часом математична модель яких задається у такому вигляді:

$$x(k+1) = F(x(k), u(k), k)\alpha + g(x(k), u(k), k) + \xi(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

де вектор фазового стану $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k)$ - вектор керувань, $\xi(k)$ - вектор похибок моделі, вектор невідомих параметрів $\alpha \in \mathbb{R}^p$, \mathbb{N} - множина натуральних чисел, $F(x(k), u(k), k)$, $g(x(k), u(k), k)$ - задані матрична та векторна функції відповідно.

Припустимо, що кожне окреме рівняння стану системи (1) має свій власний вектор невідомих параметрів $\alpha^{(j)}$, $j = \overline{1, n}$, тобто справедливо:

$$F(x(k), u(k), k) = \begin{pmatrix} f_1^T(x(k), u(k), k) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2^T(x(k), u(k), k) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_n^T(x(k), u(k), k) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha^{(1)} \\ \alpha^{(2)} \\ \vdots \\ \alpha^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$f_j(x(k), u(k), k), \alpha^{(j)} \in \mathbb{R}^{p_j}, \quad j = \overline{1, n}, \quad p = \sum_{j=1}^n p_j.$$

Тоді j -те рівняння співвідношення (1) можна записати таким чином:

$$x_j(k+1) = f_j^T(x(k), u(k), k)\alpha^{(j)} + g_j(x(k), u(k), k) + \xi_j(k), \quad j = \overline{1, n}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

$$\text{де } x(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix}, \quad g(x(k), u(k), k) = \begin{pmatrix} g_1(x(k), u(k), k) \\ g_2(x(k), u(k), k) \\ \vdots \\ g_n(x(k), u(k), k) \end{pmatrix}, \quad \xi(k) = \begin{pmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \vdots \\ \xi_n(k) \end{pmatrix}.$$

Позначимо

$$Q(\alpha, N) = \sum_{k=1}^N \|\xi(k)\|^2,$$

де $\|\cdot\|$ - евклідова норма.

Будемо вважати, що можливе порушення класичних припущень, які гарантують єдиність оцінки МНК вектора параметрів α об'єкту (1) по вимірам $x(k)$ та $u(k)$. Тоді множину усіх цих оцінок можна задати у вигляді:

$$\text{Argmin}_{\alpha} Q(\alpha, N) = \{\hat{\alpha}_c(N), \hat{\alpha}_c(N) = \tilde{F}_N^* \tilde{x}_N + (E_p - \tilde{F}_N^* \tilde{F}_N) c, c \in \mathbb{R}^p\}. \quad (4)$$

де $(^*)$ - оператор псевдообернення по Муру- Пенроузу, E_p - одинична матриця порядку p .

$$\tilde{x}_N = \begin{pmatrix} x(2) - g(x(1), u(1), 1) \\ x(3) - g(x(2), u(2), 2) \\ \dots \\ x(N+1) - g(x(N), u(N), N) \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}_N = \begin{pmatrix} F(x(1), u(1), 1) \\ F(x(2), u(2), 2) \\ \dots \\ F(x(N), u(N), N) \end{pmatrix}.$$

Припустимо, що для вектора невідомих параметрів α математичної моделі (1) в кожен момент N задана його точка "тяжіння"

$$\alpha_*(N) = (\alpha_*^{(1)p}(N), \alpha_*^{(2)p}(N), \dots, \alpha_*^{(n)p}(N))^T, \quad \alpha_*^{(j)}(N) \in \mathbb{R}^{p_j}, \quad j = \overline{1, n}, \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

Тоді єдина оцінка МНК $\hat{\alpha}(N)$ з найменшою нормою відхилення від вектора $\alpha_*(N)$ на множині усіх оцінок (4) має таку форму представлення [5]:

$$\hat{\alpha}(N) = \tilde{F}_N^+ \tilde{x}_N + (E_p - \tilde{F}_N^+ \tilde{F}_N) \alpha_*(N), N \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Введемо позначення

$$\tilde{x}_N^{(j)} = \begin{pmatrix} x_j(2) - g_j(x(1), u(1), 1) \\ x_j(3) - g_j(x(2), u(2), 2) \\ \dots \\ x_j(N+1) - g_j(x(N), u(N), N) \end{pmatrix}, \tilde{F}_N^{(j)} = \begin{pmatrix} f_j^T(x(1), u(1), 1) \\ f_j^T(x(2), u(2), 2) \\ \dots \\ f_j^T(x(N), u(N), N) \end{pmatrix}, N \in \mathbb{N}, j = \overline{1, n}.$$

В свою чергу єдина оцінка МНК $\hat{\alpha}^{(j)}(N)$ з найменшою нормою відхилення від вектора $\alpha_*^{(j)}(N)$ для системи (3) приймає вигляд ($j = \overline{1, n}$) [4]:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}^{(j)}(N) &= \tilde{F}_N^{(j)+} \tilde{x}_N^{(j)} + [E_{p_j} - \tilde{F}_N^{(j)+} \tilde{F}_N^{(j)}] \alpha_*^{(j)}(N) = \\ &= (\tilde{F}_N^{(j)T} \tilde{F}_N^{(j)})^+ \tilde{F}_N^{(j)T} \tilde{x}_N^{(j)} + [E_{p_j} - (\tilde{F}_N^{(j)T} \tilde{F}_N^{(j)})^+ \tilde{F}_N^{(j)T} \tilde{F}_N^{(j)}] \alpha_*^{(j)}(N) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^N f_j(x(k), u(k), k) f_j^T(x(k), u(k), k) \right) \left[\sum_{k=1}^N f_j(x(k), u(k), k) (x_j(k+1) - g_j(x(k), u(k), k)) \right] + \\ &+ \left[E_{p_j} - \left(\sum_{k=1}^N f_j(x(k), u(k), k) f_j^T(x(k), u(k), k) \right) \left(\sum_{k=1}^N f_j(x(k), u(k), k) f_j^T(x(k), u(k), k) \right)^+ \right] \alpha_*^{(j)}(N), N \in \mathbb{N}. \quad (6) \end{aligned}$$

Рекуренти для оцінки $\hat{\alpha}(N)$ та відповідної залишкової суми квадратів $q(N) = Q(\hat{\alpha}(N), N)$ були отримані у роботі [5], але вони мали досить складну структуру. Проведемо спрощення структури цих рекурентів, враховуючи припущення (2).

Теорема 1. Якщо матричні функції $F(x(k), u(k), k)$ мають структуру виду (2), то для оцінки МНК $\hat{\alpha}(N)$ з найменшою нормою відхилення від вектора $\alpha_*(N)$ для системи (1) справедлива така явна форма представлення:

$$\hat{\alpha}(N) = (\hat{\alpha}^{(1)T}(N), \hat{\alpha}^{(2)T}(N), \dots, \hat{\alpha}^{(n)T}(N))^T, \quad N \in \mathbb{N}.$$

де $\hat{\alpha}^{(j)}(N)$ - оцінка МНК з найменшою нормою відхилення від вектора $\alpha_*^{(j)}(N)$ для системи (3) згідно (6), $\hat{\alpha}^{(j)}(N) \in \mathbb{R}^{p_j}$, $j = \overline{1, n}$.

Доведення. Дійсно, врахування припущення (2) при аналізі матричних функцій \tilde{F}_N та властивостей оператора псевдообернення по Муру-Пенроузу дозволяє стверджувати:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(N) &= \tilde{F}_N^+ \tilde{x}_N + [E_p - \tilde{F}_N^+ \tilde{F}_N] \alpha_*(N) = (\tilde{F}_N^T \tilde{F}_N)^+ \tilde{F}_N^T \tilde{x}_N + [E_p - (\tilde{F}_N^T \tilde{F}_N)^+ \tilde{F}_N^T \tilde{F}_N] \alpha_*(N) = \\ &= \left(\left[\sum_{k=1}^N f_1(x(k), u(k), k) f_1^T(x(k), u(k), k) \right] \left[\sum_{k=1}^N f_1(x(k), u(k), k) (x_1(k+1) - g_1(x(k), u(k), k)) \right] \right) + \\ &\left(\left[\sum_{k=1}^N f_2(x(k), u(k), k) f_2^T(x(k), u(k), k) \right] \left[\sum_{k=1}^N f_2(x(k), u(k), k) (x_2(k+1) - g_2(x(k), u(k), k)) \right] \right) + \\ &\dots \\ &\left(\left[\sum_{k=1}^N f_n(x(k), u(k), k) f_n^T(x(k), u(k), k) \right] \left[\sum_{k=1}^N f_n(x(k), u(k), k) (x_n(k+1) - g_n(x(k), u(k), k)) \right] \right) \end{aligned}$$

$$+ \left[\begin{array}{c} E_{p_1} - \left(\sum_{k=1}^N f_1(x(k), u(k), k) f_1^T(x(k), u(k), k) \right)^* \left(\sum_{k=1}^N f_1(x(k), u(k), k) f_1^T(x(k), u(k), k) \right) \right] \alpha_*^{(1)}(N) \\ E_{p_2} - \left(\sum_{k=1}^N f_2(x(k), u(k), k) f_2^T(x(k), u(k), k) \right)^* \left(\sum_{k=1}^N f_2(x(k), u(k), k) f_2^T(x(k), u(k), k) \right) \right] \alpha_*^{(2)}(N) \\ \dots \\ E_{p_n} - \left(\sum_{k=1}^N f_n(x(k), u(k), k) f_n^T(x(k), u(k), k) \right)^* \left(\sum_{k=1}^N f_n(x(k), u(k), k) f_n^T(x(k), u(k), k) \right) \right] \alpha_*^{(n)}(N) \end{array} \right], N \in \mathbb{N}.$$

Порівняння останнього виразу з оцінками (6) завершує доведення теореми.

Таким чином, теорема 1 задачу побудови рекурентного алгоритму для оцінки $\hat{\alpha}(N)$ розщепила на n більш простих задач знаходження рекурентів для оцінок $\hat{\alpha}^{(j)}(N)$, $j = \overline{1, n}$.

Теорема 2. Для оцінки МНК $\hat{\alpha}(N) = \left(\hat{\alpha}^{(1)\top}(N), \hat{\alpha}^{(2)\top}(N), \dots, \hat{\alpha}^{(n)\top}(N) \right)^T$ з найменшою нормою відхилення від заданої точки "тяжіння" $\alpha_*(N)$ розщеплений рекурентний алгоритм має вигляд: якщо $\delta_j(N+1) > 0$, то

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\alpha}^{(j)}(N+1) = \hat{\alpha}^{(j)}(N) + \frac{1}{\delta_j(N+1)} P_j(N) f_j(x(N+1), u(N+1), N+1) \times \\ \times [x_j(N+2) - f_j^T(x(N+1), u(N+1), N+1) \hat{\alpha}^{(j)}(N) - g_j(x(N+1), u(N+1), N+1)] + \\ + \left[P_j(N) - \frac{1}{\delta_j(N+1)} P_j(N) f_j(x(N+1), u(N+1), N+1) f_j^T(x(N+1), u(N+1), N+1) P_j'(N) \right] \times \\ \times [\alpha_*^{(j)}(N+1) - \alpha_*^{(j)}(N)], \\ R_j(N+1) = R_j(N) - \frac{1}{\delta_j(N+1)} \left[R_j(N) f_j(x(N+1), u(N+1), N+1) f_j^T(x(N+1), u(N+1), N+1) P_j(N) + \right. \\ \left. + P_j(N) f_j(x(N+1), u(N+1), N+1) f_j^T(x(N+1), u(N+1), N+1) R_j(N) \right] + \\ + \frac{\gamma_j(N+1)}{\delta_j^2(N+1)} P_j(N) f_j(x(N+1), u(N+1), N+1) f_j^T(x(N+1), u(N+1), N+1) P_j(N), \\ P_j(N+1) = P_j(N) - \frac{1}{\delta_j(N+1)} P_j(N) f_j(x(N+1), u(N+1), N+1) f_j^T(x(N+1), u(N+1), N+1) P_j(N), \end{array} \right.$$

у протилежному випадку

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\alpha}^{(j)}(N+1) = \hat{\alpha}^{(j)}(N) + \frac{1}{\gamma_j(N+1)} R_j(N) f_j(x(N+1), u(N+1), N+1) \times \\ \times [x_j(N+2) - f_j^T(x(N+1), u(N+1), N+1) \hat{\alpha}^{(j)}(N) - g_j(x(N+1), u(N+1), N+1)] + \\ + P_j(N) [\alpha_*^{(j)}(N+1) - \alpha_*^{(j)}(N)], \\ R_j(N+1) = R_j(N) - \frac{1}{\gamma_j(N+1)} R_j(N) f_j(x(N+1), u(N+1), N+1) f_j^T(x(N+1), u(N+1), N+1) R_j(N), \\ P_j(N+1) = P_j(N), \end{array} \right.$$

з початковими умовами: $\hat{\alpha}^{(j)}(0) = \alpha_*^{(j)}(0)$, $R_j(0) = O_{p_j}$, $P_j(0) = E_{p_j}$,

де $\gamma_j(N+1) = 1 + f_j^T(x(N+1), u(N+1), N+1)R_j(N)f_j(x(N+1), u(N+1), N+1)$,

$\delta_j(N+1) = f_j^T(x(N+1), u(N+1), N+1)P_j(N)f_j(x(N+1), u(N+1), N+1)$, $j = \overline{1, n}$, O_{p_j} – нульова матриця порядку p_j .

Доведення. Не важко впевнитися, що справедливості цієї теореми впливає з теореми 1 та застосування результатів роботи [4] до систем виду (3).

Також можна запропонувати другу форму представлення отриманого у теоремі 2 розщепленого рекурентного алгоритму оцінювання, якщо прийняти до уваги роботу [4].

Теорема 3. Розщеплений рекурентний алгоритм для оцінки МНК $\hat{\alpha}(N) = (\hat{\alpha}^{(1)T}(N), \hat{\alpha}^{(2)T}(N), \dots, \hat{\alpha}^{(n)T}(N))^T$ з найменшою нормою відхилення від заданої точки “тяжіння” $\alpha_*(N)$ приймає форму:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}^{(j)}(N+1) = & \hat{\alpha}^{(j)}(N) + R_j(N+1)f_j(x(N+1), u(N+1), N+1) \times \\ & \times [x_j(N+2) - f_j^T(x(N+1), u(N+1), N+1)\hat{\alpha}^{(j)}(N) - g_j(x(N+1), u(N+1), N+1)] + \\ & + P_j(N+1)[\alpha_*^{(j)}(N+1) - \alpha_*^{(j)}(N)], \end{aligned}$$

причому, якщо $\delta_j(N+1) > 0$, то

$$\left\{ \begin{aligned} R_j(N+1) = & R_j(N) - \frac{1}{\delta_j(N+1)} \left[R_j(N)f_j(x(N+1), u(N+1), N+1)f_j^T(x(N+1), u(N+1), N+1)P_j(N) + \right. \\ & \left. + P_j(N)f_j(x(N+1), u(N+1), N+1)f_j^T(x(N+1), u(N+1), N+1)R_j(N) \right] + \\ & + \frac{\gamma_j(N+1)}{\delta_j^2(N+1)} P_j(N)f_j(x(N+1), u(N+1), N+1)f_j^T(x(N+1), u(N+1), N+1)P_j(N), \\ P_j(N+1) = & P_j(N) - \frac{1}{\delta_j(N+1)} P_j(N)f_j(x(N+1), u(N+1), N+1)f_j^T(x(N+1), u(N+1), N+1)P_j(N), \end{aligned} \right.$$

у протилежному випадку

$$\left\{ \begin{aligned} R_j(N+1) = & R_j(N) - \frac{1}{\gamma_j(N+1)} R_j(N)f_j(x(N+1), u(N+1), N+1)f_j^T(x(N+1), u(N+1), N+1)R_j(N), \\ P_j(N+1) = & P_j(N), \end{aligned} \right. \quad (6)$$

з початковими умовами: $\hat{\alpha}^{(j)}(0) = \alpha_*^{(j)}(0)$, $R_j(0) = O_{p_j}$, $P_j(0) = E_{p_j}$,

де $\gamma_j(N+1) = 1 + f_j^T(x(N+1), u(N+1), N+1)R_j(N)f_j(x(N+1), u(N+1), N+1)$,

$\delta_j(N+1) = f_j^T(x(N+1), u(N+1), N+1)P_j(N)f_j(x(N+1), u(N+1), N+1)$, $j = \overline{1, n}$.

Звернемося до побудови відповідного розщепленого рекуренту для залишкової суми квадратів $q(N) = Q(\hat{\alpha}(N), N)$. Для цього прийемо до уваги, що

$$Q(\alpha, N) = \sum_{j=1}^n Q_j(\alpha^{(j)}, N),$$

де $Q_j(\alpha^{(j)}, N) = \sum_{k=1}^N \xi_j^2(k)$, $j = \overline{1, n}$.

Тоді $q(N) = \sum_{j=1}^n q_j(N)$, де $q_j(N) = Q_j(\hat{\alpha}^{(j)}(N), N)$, $j = \overline{1, n}$.

Тепер залишилося скористатися роботою [4] для побудови рекурентної процедури для залишкової суми квадратів $q_j(N) = Q_j(\hat{\alpha}^{(j)}(N), N)$ для оцінки МНК $\hat{\alpha}^{(j)}(N)$ з найменшою нормою відхилення від заданої точки "тяжіння" $\alpha_*^{(j)}(N)$ для системи (3), $j = \overline{1, n}$. В результаті стає очевидною справедливості такого твердження.

Теорема 4. Розщеплений рекурентний алгоритм для залишкової суми квадратів $q(N) = Q(\hat{\alpha}(N), N) = \sum_{j=1}^n q_j(N)$ для оцінки МНК $\hat{\alpha}(N) = (\hat{\alpha}^{(1)T}(N), \hat{\alpha}^{(2)T}(N), \dots, \hat{\alpha}^{(n)T}(N))^T$ з найменшою нормою відхилення від заданої точки "тяжіння" $\alpha_*(N)$ для системи (1) має вигляд:

$$q_j(N+1) = \begin{cases} q_j(N), & \text{якщо } \delta_j(N+1) > 0, \\ q_j(N) + \frac{1}{\gamma_j(N+1)} \left[x_j(N+2) - f_j^T(x(N+1), u(N+1), N+1) \hat{\alpha}^{(j)}(N) - \right. \\ \left. - g_j(x(N+1), u(N+1), N+1) \right]^2, & \text{у протилежному випадку,} \end{cases}$$

з початковою умовою $q_j(0) = 0$,

де $\gamma_j(N+1) = 1 + f_j^T(x(N+1), u(N+1), N+1) R_j(N) f_j(x(N+1), u(N+1), N+1)$, $j = \overline{1, n}$.

У підсумку, для нелінійної дискретної динамічної системи (1) задача побудови рекурентного алгоритму для оцінки МНК $\hat{\alpha}(N)$ з найменшою нормою відхилення від вектора $\alpha_*(N)$ розщепилася на n більш простих задач знаходження для систем типу (3) рекурентів для оцінок МНК $\hat{\alpha}^{(j)}(N)$ з найменшою нормою відхилення від векторів $\alpha_*^{(j)}(N)$, $j = \overline{1, n}$. В залежності від архітектури обчислювальної техніки, яка використовується, може стати у нагоді одна з двох отриманих рекурентних форм представлення розщепленого алгоритму для підрахунку цієї оцінки МНК. Якість оцінювання параметрів для системи (1)

можна контролювати паралельним підрахунком, залишкової суми квадратів $q(N) = Q(\hat{\alpha}(N), N)$ для оцінки МНК $\hat{\alpha}(N)$. рекурентна процедура якої розщепилася в свою чергу на n рекурентних алгоритмів для залишкових сум квадратів $q_j(N) = Q_j(\hat{\alpha}^{(j)}(N), N)$ для оцінок МНК $\hat{\alpha}^{(j)}(N)$ для систем виду (3), $j = \overline{1, n}$.

Використання отриманих розщеплених алгоритмів дозволить зменшити об'єм потрібних обчислень і тим самим підвищити ефективність розв'язання відповідних задач оцінювання вектора невідомих параметрів для розглянутого класу нелінійних дискретних динамічних систем (1) у припущенні (2).

Список використаних джерел

1. Ljung L. System Identification: Theory for the User. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1987. – 544 p.
2. Hsia T.C. System identification. Least-squares methods. – Toronto: Lexington Books, 1977. – 165 p.
3. Albert A. Regression and the Moore-Penrose Pseudoinverse. – New York: Academic Press, 1972. – 180 p.
4. Слабостіцький О.С. Використання додаткової інформації в рекурентному

- оцінюванні параметрів систем з дискретним часом методом найменших квадратів при неklasичних припущеннях// Вісник Київського університету Серія: фіз.-мат. науки. – 2008. – №4. – с. 179-182.
5. Слабостіцький О.С. Алгоритм рекурентного оцінювання параметрів нелінійних дискретних динамічних систем методом найменших квадратів з мінімальним відхиленням від точок "тяжіння" при неklasичних припущеннях// Журнал обчисл. та прикл. матем. – 2010. – №4. – с. 94-100.

Надійшла до редколегії 27.10.2011

УДК 539.3

Лідія М. Терещенко, к.ф.-м.н., с.н.с

Розв'язання задачі статичної
магнітопружності для шаруватого еліпса

Розглянуто розв'язання задачі про напружено-деформований стан магніто-м'якого феромагнетика, що містить включення в вигляді шаруватого еліпса при дії однорідного магнітного поля.

Ключові слова: магнітопружність, шаруватий еліпс, магніто-м'які феромагнетики.

E-mail: lida_tereshchenko@mail.ru

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, професор Анісімов А.В.

Розвиток сучасної техніки, експлуатація якої протікає в складних умовах навантаження при взаємодії різних фізичних факторів, надає поштовх до розробки та створення теорії спряжених полів в пружному тілі. Проблема взаємодії фізичних полів в деформованому тілі набуває особливо важливого значення при аналізі надійності та міцності елементів конструкцій, що використовуються в радіоелектроніці, а також дровтових джгутів, які знаходяться під дією магнітного поля і мають переріз у вигляді шаруватого еліпса.

В даній роботі розглядається розв'язання задачі про взаємодію однорідного магнітного поля з магніто-м'яким феромагнетиком, який містить шаруватий еліпс.



Рис.1

В роботі визначаються основні характеристики напружено-деформованого стану та індукованого магнітного поля. Основні рівняння магнітопружності лінеаризуються за допомогою припущення, що компоненти магнітного поля (напруженість - \vec{H} , індукцію - \vec{B}

L. M. Tereshchenko, PhD

Decision of task of static magnetoelasticity
for the laminated ellipse

This article considered solve the stress-strain state unlimited magneto-soft ferromagnetic, with laminated ellipse and is under the action of homogeneous external magnetic field.

Key Words: magnetoelasticity, laminated ellipse, magneto-soft ferromagnetic.

та намагніченість - \vec{M}) в деформованому тілі можна розбити на дві складові: жорсткий недеформований стан ($\vec{H}_0, \vec{B}_0, \vec{M}_0$) та збурений стан ($\vec{h}, \vec{b}, \vec{m}$), обумовлений деформацією тіла [1-5].

Система рівнянь статичної магнітопружності для тіла та включень має вигляд:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{1-2\gamma} \text{grad div } \vec{u} + \frac{2\gamma}{(1+\chi)G} (\vec{B}^0 \cdot \text{grad}) \vec{h} &= 0 \\ \text{rot } \vec{h} &= 0; \quad \text{div } \vec{h} = 0; \quad \text{rot } \vec{h}^{(k)} = 0; \\ \text{div } \vec{h}^{(k)} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де $k = 2 \dots 3$ відповідно перше або друге включення.

Для описання граничних умов та розв'язання задачі вводиться еліптична система координат

$$x_1 = a \sinh \eta \cos \theta; \quad x_2 = a \cosh \eta \sin \theta. \quad (2)$$

Граничні умови на поверхні включень в еліптичній системі координат ($\eta = \eta_0$) після всіх спрощень відповідно до [3] мають вигляд

$$\begin{aligned} F_{n1} &= F_{n1}^{(2)}; \quad F_{n2} = F_{n2}^{(2)}; \\ F_{n1}^{(2)} &= F_{n1}^{(3)}; \quad F_{n2}^{(2)} = F_{n2}^{(3)}; \\ (1+\chi_1)h_{\eta} - (1+\chi_2)h_{\eta}^{(2)} &= 0 \\ (1+\chi_2)h_{\eta}^{(2)} - (1+\chi_3)h_{\eta}^{(3)} &= 0 \quad (3) \\ h_{\theta} - h_{\theta}^{(2)} &= - \frac{[H_{01}]}{a \cos \theta \cosh \eta_0} \left(n_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + n_2 \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

$$h_y^{(2)} - h_y^{(3)} = - \frac{[H_{01}]}{a \cos \theta \cosh \eta_0} \left(n_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + n_2 \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \right)$$

Розв'язок системи рівнянь (1) можна представити через гармонійні функції [3]. На поверхні включень покладемо $\eta = \eta_0$,

$$B_{02}^{(e)} = 0$$

$$\vec{h} = \text{grad} \vec{\Phi}; \quad \nabla^2 \vec{\Phi} = 0;$$

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + 4(1 - \gamma_1) \vec{Z} - \text{grad}(\vec{r} \cdot \vec{Z} + Z_0);$$

$$\vec{u}_0 = - \frac{2\chi_1(1 - 2\gamma_1)}{(1 + \chi_1)G_1} \vec{B}_0 \vec{O}. \quad (4)$$

$$\vec{h}^{(k)} = \text{grad} \vec{\Phi}^{(k)}; \quad \nabla^2 \vec{\Phi}^{(k)} = 0, \quad (5)$$

де $\Phi_0^{(1)}, \Phi_0$ - потенціал всередині і поза включенням, χ_1 - магнітна сприйнятливості тіла.

Для розв'язання задачі необхідно визначити магнітне поле всередині включень. Для цього розв'яжемо задачу магнітостатики згідно [3]. Виберемо магнітні потенціали поза і всередині включень у вигляді:

$$\Phi_0 = \frac{B_{01}}{\mu_1} a \text{sh} \eta \cos \theta + C_{15} a e^{-\eta} \cos \theta;$$

$$\Phi_0^{(2)} = \frac{B_{01}^{(2)}}{\mu_2} a \text{sh} \eta \cos \theta;$$

$$\Phi_0^{(3)} = \frac{B_{01}^{(3)}}{\mu_3} a \text{sh} \eta \cos \theta \quad (6)$$

Підставимо в граничні умови значення потенціалів (6)

$$\mu_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} = \mu_0 \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta} = \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial \theta} \quad (7)$$

Та знайдемо невідомі сталі

$$B_{01}^{(2)} = \frac{B_{01} \mu_2 (\text{ch} \eta_0 + \text{sh} \eta_0)}{\mu_2 \text{ch} \eta_0 + \mu_1 \text{sh} \eta_0};$$

$$B_{01}^{(3)} = \frac{B_{01} \mu_3 (\text{ch} \eta_0 + \text{sh} \eta_0)}{\mu_3 \text{ch} \eta_0 + \mu_1 \text{sh} \eta_0}$$

$$C_{15} = \frac{B_{01} (\mu_1 - \mu_0) \text{sh} \eta_0 \text{ch} \eta_0}{\mu_1 e^{-\eta_0} (\mu_0 \text{ch} \eta_0 + \mu_1 \text{sh} \eta_0)} \quad (8)$$

В точній постановці рівняння магнітопружності будуть рівняннями із змінними коефіцієнтами, тому у випадку, коли

співвідношення осей еліпса $\epsilon = \frac{\text{sh} \eta_0}{\text{ch} \eta_0}$ достатньо

мале, можна прийняти $\lim_{\eta_0 \rightarrow 0} C_{15} = 0$.

Гармонічні функції Z_0, \vec{Z}, Φ згідно [1,2] для розв'язку задачі поза включеннями мають такий вигляд:

$$\vec{O} = C_6 a \cos \theta e^{-\eta}; \quad Z_2 = 0; \quad Z_1 = 2C_6 e^{-\eta} \cos \theta;$$

$$Z_0 = A\eta + B e^{-2\eta} \cos 2\theta; \quad A = -2B - 2C_6 \text{sh}^2 \eta_0 \quad (9)$$

де C, A, C_6, B - невідомі сталі.

Підставляючи функції (9) в формули (4), знайдемо переміщення та поверхневі сили в тілі

$$u_1 = 2 \cos \theta e^{-\eta} \left((3 - 4\gamma_1) C + \frac{2B}{a} + C \text{sh} \eta_0 e^{\eta_0} \right) - \frac{2\chi_1 B_{01} (1 - 2\gamma_1) C_6 a \cos \theta e^{-\eta}}{(1 + \chi_1) G_1} + 2 \frac{C (\text{sh}^2 \eta_0 - \text{sh}^2 \eta) \text{ch} \eta \cos \theta}{\text{sh}^2 \eta + \cos^2 \theta};$$

$$u_2 = \frac{2 \sin \theta e^{-\eta}}{a} (2B + C \text{sh} \eta e^{\eta_0}) + 2 \frac{C (\text{sh}^2 \eta_0 - \text{sh}^2 \eta) \text{sh} \eta \sin \theta}{\text{sh}^2 \eta + \cos^2 \theta}. \quad (10)$$

$$h_\eta = - \frac{C_6 \cos \theta e^{-\eta}}{\sqrt{\text{sh}^2 \eta + \cos^2 \theta}};$$

$$h_\theta = - \frac{C_6 e^{-\eta}}{\sqrt{\text{sh}^2 \eta + \cos^2 \theta}} \sin \theta$$

$$F_{s1} = - \frac{\cos \theta}{\sqrt{\text{sh}^2 \eta + \cos^2 \theta}} \left\{ - \frac{(1 + 4\chi_1) B_{01}^2 \text{ch} \eta}{2\mu_1 (1 + \chi_1)} + \frac{B_{01} C_6 e^{-\eta} (1 + 4\chi_1 \gamma_1)}{(1 + \chi_1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{4G_1 e^{-\eta}}{a} \left(\frac{2B}{a} + C (1 - 2\gamma_1 + \text{ch} \eta e^{\eta_0}) \right) \right\}. \quad (11)$$

$$F_{s2} = - \frac{\sin \theta}{\sqrt{\text{sh}^2 \eta + \cos^2 \theta}} \left\{ \frac{B_{01}^2 \text{sh} \eta}{2\mu_1 (1 + \chi_1)} + \frac{B_{01} C_6 e^{-\eta} (1 + 4\chi_1 \gamma_1)}{(1 + \chi_1)} + \right.$$

$$+ \frac{4G_1 e^{-\eta}}{a} \left(\frac{2B}{a} + C(1 - 2\gamma_1 + \operatorname{sh} \eta e^{\eta}) \right) \Bigg\}$$

Розв'язки системи рівнянь (5), що описують магнітопружний стан включень, запишемо так:

$$\Phi^{(2)} = C_1 a \operatorname{sh} \eta \cos \theta; \quad \Phi^{(3)} = C_{11} a \operatorname{sh} \eta \cos \theta$$

$$u_1^{(2)} = C_3 a \operatorname{sh} \eta \cos \theta - \frac{2\chi_2 B_{01}^{(2)} (1 - 2\gamma_2) C_1 a \operatorname{sh} \eta \cos \theta}{(1 + \chi_2) G_2}$$

$$u_1^{(3)} = C_{33} a \operatorname{sh} \eta \cos \theta - \frac{2\chi_3 B_{01}^{(3)} (1 - 2\gamma_3) C_{11} a \operatorname{sh} \eta \cos \theta}{(1 + \chi_3) G_3}$$

$$u_2^{(2)} = C_4 a \operatorname{ch} \eta \sin \theta; \quad u_2^{(3)} = C_{44} a \operatorname{ch} \eta \sin \theta;$$

$$F_{n1}^{(2)} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \eta + \cos^2 \theta}} \left\{ \frac{(1 + 4\chi_2) B_{01}^{(2)2} \operatorname{ch} \eta}{2\mu_2 (1 + \chi_2)} + \frac{B_{01}^{(2)} C_1 \operatorname{ch} \eta (1 + 4\chi_2 \gamma_2)}{(1 + \chi_2)} \right.$$

$$\left. + \frac{2G_2 \operatorname{ch} \eta}{1 - 2\gamma_2} (C_3 (1 - \gamma_2) + C_4 \gamma_2) \right\};$$

$$F_{n2}^{(2)} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \eta + \cos^2 \theta}} \left\{ -\frac{B_{01}^{(2)2} \operatorname{sh} \eta}{2\mu_2 (1 + \chi_2)} - \frac{B_{01}^{(2)} C_1 \operatorname{sh} \eta (1 + 4\chi_2 \gamma_2)}{(1 + \chi_2)} \right.$$

$$\left. + \frac{2G_2 \operatorname{sh} \eta}{1 - 2\gamma_2} (C_4 (1 - \gamma_2) + C_3 \gamma_2) \right\}$$

$$h_{\eta}^{(2)} = \frac{C_1 \cos \theta \operatorname{ch} \eta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \eta + \cos^2 \theta}};$$

$$h_{\theta}^{(2)} = -\frac{C_1 \sin \theta \operatorname{sh} \eta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \eta + \cos^2 \theta}}.$$

$$F_{n1}^{(3)} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \eta + \cos^2 \theta}} \left\{ \frac{(1 + 4\chi_3) B_{01}^{(3)2} \operatorname{ch} \eta}{2\mu_3 (1 + \chi_3)} + \frac{B_{01}^{(3)} C_{11} \operatorname{ch} \eta (1 + 4\chi_3 \gamma_3)}{(1 + \chi_3)} \right.$$

$$\left. + \frac{2G_3 \operatorname{ch} \eta}{1 - 2\gamma_3} (C_{33} (1 - \gamma_3) + C_{44} \gamma_3) \right\};$$

$$F_{n2}^{(3)} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \eta + \cos^2 \theta}} \left\{ -\frac{B_{01}^{(3)2} \operatorname{sh} \eta}{2\mu_3 (1 + \chi_3)} - \frac{B_{01}^{(3)} C_{11} \operatorname{sh} \eta (1 + 4\chi_3 \gamma_3)}{(1 + \chi_3)} \right.$$

$$\left. - \frac{B_{01}^{(3)} C_{11} \operatorname{sh} \eta (1 + 4\chi_3 \gamma_3)}{(1 + \chi_3)} + \frac{2G_3 \operatorname{sh} \eta}{1 - 2\gamma_3} (C_{44} (1 - \gamma_3) + C_{33} \gamma_3) \right\}$$

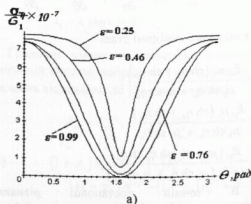
$$h_{\eta}^{(3)} = \frac{C_{11} \cos \theta \operatorname{ch} \eta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \eta + \cos^2 \theta}};$$

$$h_{\theta}^{(3)} = -\frac{C_{11} \sin \theta \operatorname{sh} \eta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \eta + \cos^2 \theta}}. \quad (12)$$

Підставляючи формули (6) – (12) в граничні умови (3) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових функціях, одержуємо систему алгебраїчних рівнянь та знайдемо невідомі сталі.

Для дослідження напруженого стану біля еліптичних включень розроблено програмне забезпечення, яке дозволило провести ряд чисельних експериментів для моделі що розглядається. Зокрема, дослідження проводились для таких матеріалів, як ферит, афер та технічне залізо. Виберемо магніто – м'який феромагнітний матеріал з наступними механічними та магнітними характеристиками:

- 1) ферит — $\gamma_1 = 0,3$; $G_1 = 6,8 \cdot 10^4$ МПа; $1 + \chi_1 = 110$.
- 2) алфер — $\gamma_1 = 0,3$; $G_1 = 6,3 \cdot 10^4$ МПа; $1 + \chi_1 = 30$.
- 3) технічне залізо — $\gamma_1 = 0,28$; $G_1 = 11 \cdot 10^5$ МПа; $1 + \chi_1 = 2500$.



залежить від механічних і магнітних властивостей тіла і включень.

Список літератури

1. Терещенко Л.М. Розв'язання задач статичної магнітопружності в середовищі Maple // Вісник Київського Університету. Сер. фіз.-мат. наук. – 2011. – Вип. 1. – С.5-10.
2. Pao Y.-H., Yeh C.-S. A linear theory for soft ferromagnetic elastic solids // Int. J. Engin. Sci.-1973.- 11. P. 415-435.
3. Подільчук Ю.Н., Терещенко Л.Н. Магнитоупругое поле в ферромагнитной среде с эллиптическим включением // Прикл. механика. - 2002. – Т. 38, № 5. - С. 84-92.
4. Райхер Ю.Л., Столбов О.В., Степанов Г.В. Деформация круговой мембраны из ферроэласти в однородном магнитном поле. Журнал технической физики. - 2008, том 78, вып.9. - С.69-76.
5. Петренко А.В. Периодическая задача электромагнитоупругости для тела с эллиптическими полостями или трещинами. Вісник Донецького національного університету, Сер. А: Природничі науки. - 2008, вип. 2. - С.556-561.

Надійшла до редколегії 17.11.2011

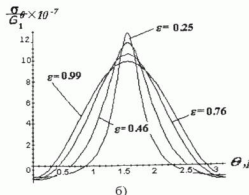


Рис.2

На рис.2 зображена залежність нормальних напружень в тілі з еліптичним включенням від зміни кута, відношення осей та при різних матеріалах тіла та включень. Як видно з графіків, максимальне значення напруження σ_n досягається при значенні кута $\theta = 0$, а напруження σ_θ - при $\theta = \frac{\pi}{2}$. З чисельних даних випливає, що чим менше значення ϵ , тим більша концентрація напружень виникає в околі включення.

В результаті проведеної роботи виявлено, що напружено-деформований стан тіла з еліптичними включеннями суттєвим чином

УДК 517.98

О. В. Терещенко, аспірантка
І. М. Вергунова, к.ф.-м.н.**Особливості побудови інтегральних
зображень для температури в кусково-
однорідній півплощині***Робота присвячена розробці методів рішення
плоскої задачі термопружності для тіл із
довільно розташованими включеннями.**Ключові слова: термопружність, інтегральні
рівняння, функція Гріна.*

E-mail: o_lena@inbox.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусаїнов Д.Я.

Розповсюдження тепла у тілі завжди супроводжується виникненням у ньому напружень та деформацій. Тому існує багато моделей, в яких відображені залежності температури від часу, від теплофізичних сталих матеріалу, різних форм взаємодії полів температур та деформацій, способу задання температурних полів та ін.

Багато робіт присвячено розв'язуванню зв'язаних задач термопружності (наприклад, роботи А.Д. Коваленка [1], К.Г. Хорошева [2], В.Г. Карнаухова [3], В. Новацького, О.П. Червенка, Л.А. Фільштинського). Внаслідок поширеного науково-технічного застосування одержали широкий розвиток теорії теплопровідності та термопружності для ізотропних пластин та оболонок, послаблених порожнинами та тріщинами. Для розв'язку таких задач використовували методи: комплексних потенціалів, функцій Гріна, сингулярних інтегральних рівнянь, дисторсії, інтегральних перетворень, асимптотичні, малого параметра, кінцевих елементів.

В результаті досліджень науковців одержані загальні методи та їхні застосування до розв'язання задач для пластин та оболонок з однозв'язними областями (без порожнин та тріщин або з однією порожниною, тріщиною

O.V. Tereshchenko, student PhD
I.M. Vergunova, PhD**Features of building integrated images for
temperature piecewise-homogeneous half-
plane***The work is devoted to developing methods for
solving of the plane problem thermoelasticity for
bodies with arbitrary situated inclusions.**Key Words: thermoelasticity, integrated
equation, Grin's function.*

або включенням). Загальні методи до розв'язання задач у загальних випадках багатозв'язних тіл з порожнинами, тріщинами або включеннями ще не розроблені.

Тому робота присвячена розробці методів рішення плоскої задачі термопружності для тіл із довільно розташованими одне відносно одного включеннями (порожнинами, тріщинами).

Слід вказати, що рішення задач термопружності для півпростору та півплощини з порожнинами та тріщинами розглядалися у роботах К.Г. Хорошева на основі використання інтегралів типу Коші, методів конформних відображень та розкладення функцій у ряди Лорана. В результаті за допомогою узагальнюючих комплексних потенціалів для півплощини із внутрішніми включеннями (тріщинами, порожнинами) у його роботах одержані загальні представлення комплексних потенціалів теплопровідності та термопружності, які точно задовольняють граничним умовам, а задачі зведені до розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих сталих, що входять до комплексних потенціалів.

В представленій роботі проводиться дослідження відносно розробки

комбінованого методу, що поєднує методи граничних та скінчених елементів на основі використання функції Гріну для півплощини.

Розглянемо кусково-однорідну область D , яка являє собою півплощину зі скінченим числом включень довільної форми. В роботі [9] інтегральні зображення розв'язків задачі теплопровідності для кусково-однорідних тіл виведені для скінчених областей. Для застосування цих зображень до нескінченних чи напівскінченних областей, необхідно задати додаткові гіпотези відносно розглядуваних функцій. Ці гіпотези відносяться до поведінки функцій на нескінченності і визначаються як умови регулярності [4]. Як показано в роботі [4], умови регулярності виконуються завжди, якщо функція $\theta(x, t)$ веде себе на нескінченності, принаймні, як фундаментальний розв'язок відповідної задачі теплопровідності однорідних тіл, тобто для $\Gamma \rightarrow \infty$,

$$\theta(x, t) \sim G^*(x, \xi, t - t') = o(\exp(-\Gamma^2 / (4k_0 t))) .$$

Фундаментальний розв'язок і функція Гріна для півплощини відносно розглядуваної задачі відомі, наприклад [5]. Зокрема, фундаментальний розв'язок має вигляд:

$$G^*(x, \xi, t - t') = \frac{S(t - t')}{4\pi k_0(t - t')} \exp(-\Gamma^2 / (4k_0(t - t'))) \quad (1.1)$$

де k_0 - коефіцієнт теплопровідності; $S(t - t')$ - функція Хевісайда, яка вводиться, щоб показати, що розв'язок тотожно дорівнює нулю при $t' > t$. Ця умова відома під назвою «умови причинності» [4].

$$\Gamma^2 = (x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i), i = 1, 2. \quad (1.2)$$

Функція Гріна для даної задачі має вигляд:

$$G(x, \xi, t - t') = \frac{S(t - t')}{4\pi k_0(t - t')} [\exp(-\Gamma^2 / (4k_0(t - t'))) - \exp(-\Gamma^2 / (4k(t - t')))], \quad (1.3)$$

$$\text{де } \Gamma^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 \quad (1.2')$$

Сингулярність, яка з'явиться в інтегральних зображеннях в момент часу $t' = t$ детально досліджується в роботі [4].

Щоб уникнути зупинки процесу інтегрування точно в точці, в якій задається дельта-функція Дірака, необхідно відняти або додати до верхньої границі інтегрування нескінченно малу величину ε і перейти до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$. В результаті одержимо інтегральні зображення температури в кусково-однорідній півплощині:

$$\begin{aligned} \theta_0(x_1, x_2, t) = & -\frac{a_0}{(1 + \varepsilon_0)} \int_{t_0 - \infty}^t \int_{\Gamma} T_{\Gamma}(\xi_1, t') \frac{\partial G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2; t - t')}{\partial n(\xi_1, \xi_2)} \times \\ & \times d\xi_1 d\xi_2 + \int_{t_0 - \infty}^t \int_{\Gamma} \psi(\xi_1, \xi_2) G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2; t - t_0) d\xi_1 d\xi_2 - \\ & - \frac{a_0}{(1 + \varepsilon_0)\lambda_{t_0}} \int_{t_0}^t \int_{\Gamma} W_{\Gamma}'(\xi_1, \xi_2; t') G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2; t - t') \times \\ & \times G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2; t - t') d\xi_1 d\xi_2 dt' + \frac{a_0}{(1 + \varepsilon_0)\lambda_{t_0}} \times \\ & \times \frac{\gamma_0 \rho_0}{(\lambda_0 + 2\mu_0)} \int_{t_0}^t \int_{\Gamma} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \times \\ & \times G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2; t - t') d\xi_1 d\xi_2 dt' + \\ & + \frac{a_0}{(1 + \varepsilon_0)\lambda_{t_0}} \int_{t_0}^t \int_{D_p} W_{\Gamma}'(\xi_1, \xi_2; t') G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2; t - t') \times \\ & \times d\xi_1 d\xi_2 dt' - \frac{a_0}{(1 + \varepsilon_0)\lambda_{t_0}} \frac{\gamma_0 \rho_0}{(\lambda_0 + 2\mu_0)} \int_{t_0}^t \int_{D_p} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \times \\ & \times G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2; t - t') d\xi_1 d\xi_2 dt' + \frac{a_0}{(1 + \varepsilon_0)} \times \\ & \times \int_{t_0}^t \int_{\Gamma_p} \theta_{0,\Gamma}(\xi_1, \xi_2; t') n_{\Gamma}^0(\xi_1, \xi_2) G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2; t - t') d\gamma(\xi_1, \xi_2) dt' - \\ & - \frac{a_0}{(1 + \varepsilon_0)} \int_{t_0}^t \int_{\Gamma_p} \theta_0(\xi_1, \xi_2; t') G_{,\Gamma}(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2; t - t') \times \\ & \times n_{\Gamma}^0(\xi_1, \xi_2) d\gamma(\xi_1, \xi_2) dt' - \end{aligned}$$

$$- \int_{D_p} \psi(\xi_1, \xi_2) G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2; t - t_0) d\xi_1 d\xi_2, \\ x_1, x_2 \in D_0 \quad (1.5)$$

і для області D_p

$$\begin{aligned} \theta_p(x_1, x_2, t) = & - \frac{a_p}{(1 + \varepsilon_p) \lambda_{tp}} \int_{t_0}^t \int_{D_p} W'_i(\xi_1, \xi_2; t') G^*(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2; t - t') \times \\ & \times d\xi_1 d\xi_2 dt' + \frac{a_p}{(1 + \varepsilon_p) \lambda_{tp}} \frac{\gamma_p \rho_p}{(\lambda_p + 2\mu_p)} \int_{t_0}^t \int_{D_p} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \times \\ & \times G^*(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2; t - t') d\xi_1 d\xi_2 dt' + \\ & + \frac{a_p}{(1 + \varepsilon_p)} \int_{t_0}^t \int_{\Gamma_p} \theta_{p,i}(\xi_1, \xi_2; t') n_i^p(\xi_1, \xi_2) \times \\ & \times G^*(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2; t - t') d\gamma(\xi_1, \xi_2) dt' - \\ & - \frac{a_p}{(1 + \varepsilon_p)} \int_{t_0}^t \int_{\Gamma_p} \theta_p(\xi_1, \xi_2; t') G_{,i}^*(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2; t - t') \times \\ & \times n_i^p(\xi_1, \xi_2) d\gamma(\xi_1, \xi_2) dt' - \\ & - \int_{D_p} \psi(\xi_1, \xi_2) G^*(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2; t - t_0) d\xi_1 d\xi_2, \\ & x_1, x_2 \in D_p, \quad (1.6) \end{aligned}$$

де G – функція Гріна (1.3), а G^* – фундаментальний розв'язок (1.1).

На основі (1.5) та (1.6) будуються відповідні граничні інтегральні рівняння для кусково-однорідної півплощини з граничними умовами першого роду.

Алгоритм розв'язання системи граничних інтегральних рівнянь.

Проінтегрувати граничні інтегральні рівняння відповідних зображень (1.5) та (1.6) в явному вигляді досить складно і можливо тільки для тіл простої геометрії та простих граничних умов. Тому для розв'язання таких систем граничних інтегральних рівнянь застосовують чисельний або чисельно-

аналітичний методи, зокрема, прямий і непрямий методи граничних елементів [4, 6].

Для чисельної реалізації побудови розв'язків плоскої задачі теплопровідності в кусково-однорідній півплощині, яка складається із матриці та скінченного числа включень, обмежених кусково-гладкими контурами, застосовується прямий метод граничних елементів [4]. При цьому границі Γ_p , $p = 1, \dots, P$, розбиваються на ряд елементів. Геометрію цих елементів можна моделювати прямими лініями, круговими арками, параболою і т.д., як про це детально описано в роботі [4]. Крім цього,

припускається, що функції θ і $\frac{\partial \theta}{\partial n}$

змінюються по довжині кожного елемента на кожному кроці по часу у відповідності з обраними інтерполяційними функціями просторових координат та змінною по часу, а саме:

$$\theta(\xi, t') = f(x_m, \xi) g(t_n) \theta(x_m, t_n) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \theta(\xi, t')}{\partial n(\xi)} = f(x_m, \xi) g(t_n) \frac{\partial \theta(x_m, t_n)}{\partial n(x_m)} \quad (2.2)$$

де $f(x, \xi)$ і $g(t)$ – інтерполяційні функції.

Оскільки характер залежності від часу функцій θ і $\frac{\partial \theta}{\partial n}$ наперед невідомий, то для

одержання чисельного розв'язку необхідно застосувати спосіб покрокового інтегрування по часу. Так як функції Гріна, які входять в рівняння, самі залежать від часу, то можна брати великі кроки по часу. При побудові цього чисельного розв'язку можна скористатися двома різними із кроком за часом схемами: перша схема розглядає кожний крок по часу як нову задачу, тому в кінці кожного кроку підраховується значення

функцій θ і $\frac{\partial \theta}{\partial n}$ в досить великому числі

внутрішніх точок, з тим, щоб використовувати їх як псевдопочаткові значення для наступного кроку; в другій схемі процес інтегрування по часу завжди починається з моменту часу t_0 і, таким

чином, не дивлячись на зростаючу кількість проміжних кроків протягом часу, в даному випадку немає потреби повторно

підраховувати значення функцій θ і $\frac{\partial \theta}{\partial n}$ у

внутрішніх точках. Перша схема використовувалась у роботі [7], другою схемою користувались в [4].

При використанні першої схеми може виникнути проблема при використанні кроку по часу внаслідок того, що при $\Delta t \rightarrow 0$ підінтегральна функція в інтегралах по області стає менш гладкою і прямує до дельта-функції Дірака [8]. Складність чисельного інтегрування функції з особливістю такого характеру може призвести до проблеми чисельного характеру.

В другій схемі інтеграли по області обумовлені наявністю початкових умов ψ при $t = t_0$ і теплового джерела W_i . Якщо ψ і W_i задовольняють умови $\Delta \psi = 0$, $\Delta W_i = 0$ відповідно, то інтеграли по області зводяться до еквівалентних граничних інтегралів, що знижує розмірність задач і є, в свою чергу, важливою перевагою даної схеми.

Тому для розв'язання поставленої задачі теплопровідності в кусково-однорідній півплощині з граничними умовами першого та другого роду застосуємо прямий метод граничних елементів [1] та другу схему покрового інтегрування по часу.

Розбиваючи границі Γ_p на L_p елементів, $p = 1, \dots, P$, а інтервал часу на N кроків, покладемо функції інтерполяції постійними,

$$+ k_0 \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{m=1}^{L_p} \theta(x_m^{(p)}, t_N) \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Gamma_p^{(m)}} \frac{\partial G(x_m^{(p)}, \xi, t_N - t')}{\partial n^P(\xi)} d\gamma(\xi) dt' \quad (2.5)$$

та

$$c_2(x_i^{(q)}) \theta(x_i^{(q)}, t_N) = \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P k_p \sum_{m=1}^{L_p} \frac{\partial \theta(x_m^{(p)}, t_N)}{\partial n^P(x_m^{(p)})} \times$$

а саме: $f(x_m, \xi) = 1$, $g(t_n) = 1$, і,

також, покладемо значення невідомих щільностей елементів, тобто

$$\theta(\xi, t') = \theta(x_m^{(p)}, t_n) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \theta(\xi, t')}{\partial n(\xi)} = \frac{\partial \theta(x_m^{(p)}, t_n)}{\partial n^P(x_m^{(p)})} \quad (2.4)$$

де $x_m^{(p)}$ - вузлова точка граничного елементу.

Тоді дискретний аналог граничних інтегральних рівнянь запишемо так:

$$\begin{aligned} c_1(x_i^{(q)}) \theta(x_i^{(q)}, t_N) = & - \frac{k_0}{\lambda_{t0}} \sum_{n=0}^N \sum_{p=1}^P \lambda_p \sum_{m=1}^{L_p} \frac{\partial \theta(x_m^{(p)}, t_N)}{\partial n^P(x_m^{(p)})} \times \\ & \times \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Gamma_p^{(m)}} G(x_m^{(p)}, \xi, t_N - t') d\gamma(\xi) dt' - k_0 \iint_{t_0}^{t_N} \int_{\Gamma} T_{\Gamma}(\xi, t') \times \\ & \times \frac{\partial G(x_m^{(p)}, \xi, t_N - t')}{\partial n(\xi)} d\gamma(\xi) dt' + \\ & + \int_D \psi(\xi) G(x_i^{(q)}, \xi, t_N - t_0) ds(\xi) + \\ & + \frac{k_0}{\lambda_{t0}} \int_{t_0}^t \int_{D_p} W_i'(\xi, t') G(x_i^{(q)}, \xi, t_N - t') ds(\xi) dt' - \\ & - \frac{k_0}{\lambda_{t0}} \int_{t_0}^t \left(\sum_{p=1}^P \int_{D_p} W_i'(\xi, t') G(x_i^{(q)}, \xi, t_N - t') ds(\xi) \right) dt' - \\ & - \sum_{p=1}^P \int_{D_p} \psi(\xi) G(x_i^{(q)}, \xi, t_N - t_0) ds(\xi) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Gamma_p^{(m)}} G(x_m^{(p)}, \xi, t_N - t') d\gamma(\xi) dt' - \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P k_p \sum_{m=1}^{L_p} \theta(x_m^{(p)}, t_N) \times \\ & \times \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Gamma_p^{(m)}} \frac{\partial G(x_m^{(p)}, \xi, t_N - t')}{\partial n^P(\xi)} d\gamma(\xi) dt' + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_0}^t \left(\sum_{p=1}^P \frac{k_p}{\lambda_{tp}} \int_{D_p} W_t'(\xi, t') G(x_i^{(q)}, \xi, t_N - t') ds(\xi) \right) dt' + \\
& + \sum_{p=1}^P \int_{D_p} \psi(\xi) G(x_i^{(q)}, \xi, t_N - t_0) ds(\xi), \\
& i = 1, \dots, L_p; \quad q = 1, \dots, P, \quad (2.6)
\end{aligned}$$

де $c_1(x)$ та $c_2(x)$ в рівняннях (2.5) та (2.6) мають наступний вигляд за гладких контурів Γ_p :

$$c_1(x_1, x_2) = 1/2; \quad c_2(x_1, x_2) = 1/2.$$

Інтеграли по контурам $\Gamma_p^{(m)}$ – це інтеграли вздовж граничних елементів, які треба розуміти в сенсі головного значення Коші.

Розділяючи рівняння (2.5), (2.6) на невідомі і відомі величини, одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих значень температури та її нормальної похідної у вузлах граничних елементів, а саме:

$$\theta(x_j^{(k)}, t_N), \frac{\partial \theta(x_j^{(k)}, t_N)}{\partial n(x_j^{(k)})}, \quad j = 1, \dots, L_q; \quad k = 1, \dots, P.$$

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь такого типу пропонується розв'язувати методом Гауса, інтеграли від функцій Гріна та її похідних обчислювати за допомогою квадратур Гауса.

Отже, запропонований підхід в результаті якого для розглянутої задачі одержані рівняння інтегральних зображень для температури в кусково-однорідній півплощині на основі використання функції Гріну для півплощини, які розв'язуються чисельно прямим методом граничних

елементів. Використовуючи дискретний аналог граничних інтегральних рівнянь задачу зведено до розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих значень температури та її нормальної похідної у вузлах граничних елементів.

Література:

1. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. – К.: Наук. думка, 1970. – 309 с.
2. Калюков С.А., Хорошев К.Г. Термoeлектроупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами // Теор. и прикл. механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 124-133.
3. Карнаухов В.П. Связанные задачи термоупругости. – К.: Наук. думка, 1982. – 260 с.
4. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
5. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487 с.
6. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
7. Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. – М.: Мир, 1982. – 284 с.
8. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
9. Tereshchenko V.M. Green functions of a quasi-static problem of thermoelasticity // Journal of Mathematical Science. – 1995. – Vol. 77. – N. 5. – P. 3458-3462.

Надійшла до редколегії 20.10.2011

УДК 004.02

Тимофєєв В.Г., аспірант.

**Проблема виконуваності у пропозиційній
та реномінативній композиційно-
номінативній логіці**

Композиційно-номінативні логіки базуються на алгебрах часткових предикатів, та будуються у семантико-синтаксичному стилі. В цій роботі ми пропонуємо та досліджуємо методи розв'язання проблеми виконуваності, тобто, методи перевірки виконуваності формул, для пропозиційної та реномінативної композиційно-номінативної логіки. Ця проблема є важливою, зокрема, у задачах верифікації специфікацій, представлених у логічних мовах.

Ключові слова: композиційно-номінативні логіки, часткові предикати, виконуваність, істинність.

*E-mail: tvuniv@gmail.com

Статтю представив д.т.н. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

Проблема виконуваності, або проблема перевірки виконуваності формул, є однією із класичних проблем у логіці. Для конкретної формули вона полягає у визначенні, чи має формула інтерпретацію у певній логіці, на якій вона приймає істинне значення. Останнім часом зростання інтересу до цієї проблеми обумовлено її практичним значенням, якого вона набула у сферах верифікації, синтезу, аналізу програм, тестування та ін. В цій роботі ми досліджуємо проблему виконуваності у рамках композиційно-номінативного підходу [1], що має на меті побудову ієрархії логік різних рівнів абстрактності та загальності, на методологічній основі, яка природна для програмування. Цей підхід ґрунтується на принципах композиційності та номінативності, які є похідними відомого принципу розвитку від абстрактного до конкретного.

Аналіз проведений у [1] дозволяє стверджувати, що такі нові логіки мають базуватися на довірливих (в т.ч., можливо, ієрархічних) класах номінативних даних. Такі дані являють собою пари ім'я-значення. Часткові предикати над номінативними даними з іменами з множини I називаються квазіарними. Нові предикати будуються із базових за допомогою

V.G. Tymofieiev*, PhD student.

**Satisfiability Problem in Propositional and
Renominative Composition-Nominative
Logic**

Composition-nominative logics are algebra-based logics of partial predicates constructed in a semantic-syntactic style. In the paper we present and investigate methods for solving satisfiability problem, i.e., methods for checking satisfiability of formulas for propositional and nominative composition-nominative logic. This problem is important, for instance, in the domain of verification of specifications presented in logical languages.

Keywords: composition-nominative logics, partial predicates, satisfiability, validity.

спеціальних операцій — композицій. У відповідності до композиційно-номінативного підходу, запропоновані логіки (композиційно-номінативні логіки, КНЛ) [2] будуються у семантико-синтаксичному стилі. Ці логіки базуються на алгебрах часткових предикатів. Такі алгебри утворюють семантичну базу КНЛ. Ці алгебри можуть визначатися на різних рівнях абстрактності та загальності. Класи термів алгебр часткових предикатів можуть розглядатися як множини формул відповідних логік. У [2] для таких логік побудовано аксіоматичне числення та досліджено їх властивості.

На черговому кроці розвитку композиційно-номінативних логік ми досліджуємо проблему виконуваності для цих логік, вивчаючи її на різних рівнях (пропозиційний рівень, реномінативний рівень та кванторний рівень). В цій роботі розглядаються пропозиційний та реномінативний рівні. Ми вказуємо механізм зведення проблеми виконуваності у КНЛ до проблеми виконуваності у класичних логіках. Такий підхід надає можливості застосовувати існуючі методи для її вирішення.

Композиційно-номінативні логіки

При побудові КНЛ розглядаються декілька рівнів абстрактності, зокрема пропозиційний,

сингулярний та номінативний. Рівень абстрактності визначає як саме трактуються дані. Алгебри часткових предикатів (АЧП) є семантичною базою КНЛ. Тому на різних рівнях абстрактності розглядаються різні АЧП.

Нехай $Bool = \{F, T\}$ — множина логічних значень, $Pr \subseteq Dt \rightarrow Bool$ — підмножина множини часткових предикатів, визначених на деякій множині даних, C — множина n -арних композицій типу $Pr^n \rightarrow Pr$. Тоді пара (Pr, C) є алгеброю часткових предикатів. Множина Dt інтерпретується як можливий світ, предикати з множини Pr розглядаються як властивості станів світу, а композиції розглядаються як оператори, що будують нові предикати із базових.

Для визначення композицій використовуються наступні позначення ($P, Q \in Pr, d \in Dt$):

$P(d) \downarrow = b$ означає, що предикат P над даним d визначений і дорівнює b ;

$P(d) \uparrow$ означає, що предикат P над даним d не визначений.

Інші, не визначені тут, позначення та терміни слід розуміти у сенсі [2]. На пропозиційному рівні дані розглядаються на найвищому рівні абстрактності — як «чорні скриньки».

Базовими композиціями виступають Клінівські операції диз'юнкції \vee та заперечення \neg , що визначаються наступним чином:

$$(P \vee Q)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } P(d) \downarrow = T \text{ або } Q(d) \downarrow = T, \\ F, \text{ якщо } P(d) \downarrow = F \text{ та } Q(d) \downarrow = F, \\ \text{невизначено в інших випадках.} \end{cases}$$

$$(\neg P)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } (d) \downarrow = F, \\ F, \text{ якщо } P(d) \downarrow = T, \\ \text{невизначено, якщо } P(d) \uparrow. \end{cases}$$

Похідні композиції (кон'юнкція $\&$ та ін.) визначаються звичайним способом.

На сингулярному рівні дані розглядаються як конкретні («білі скриньки»). В цьому випадку отримуємо єдиний клас даних (сінглетон). Відповідні алгебри називаються *сингулярними*.

Номінативний рівень поєднує перші два рівні. Дані розглядаються як «сірі скриньки», що побудовані із «білих» та «чорних». Ці дані називаються *номінативними* даними. Для їх визначення використовуються множина імен V та множина базових значень A . В цій роботі ми обмежуємося розглядом номінативних даних

рангу 1, які являють собою часткові функції з V в A . Їх клас позначається ${}^V A$. Такі дані називаються *іменними множинами* і, зазвичай, подаються у формі множини $\{v_1 \mapsto a_1, \dots, v_n \mapsto a_n, \dots\}$, де $v_1, \dots, v_n, \dots \in V$, $a_1, \dots, a_n, \dots \in A$. Той факт, що пара ім'я-значення з іменем v та значенням a належить до d , будемо позначати $v \mapsto a \in_n d$, або писати $a = d(v)$. Предикати та функції над іменними множинами є квазіарними. Їх класи позначаються Pr^A та Fn^A відповідно. Таким чином, на номінативному рівні дані Dt конкретизуються як іменна множина ${}^V A$.

У порівнянні із попередніми рівнями, що визначають відносно прості алгебри, номінативний рівень є більш багатим. Він може декомпонуватися на різні підрівні, у тому числі, на реномінативний та кванторний рівень.

В алгебрах *реномінативного* рівня дозволяється перейменування компонентів даних. Додатковою композицією виступає унарна параметризована композиція *реномінації* $R_v^A: Pr^A \rightarrow Pr^A$, яка визначається наступною формулою:

$$R_{v_1, \dots, v_n}^A(P)(d) = P(\{v \mapsto a \in_n d, v \notin \{v_1, \dots, v_n\}\} \vee \{v_i \mapsto a_i \mid x_i \mapsto a_i \in_n d, i \in \{1, \dots, n\}\}).$$

Тут $\bar{v} = (v_1, \dots, v_n)$ — це список попарно різних змінних, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $v_i, x_i \in V$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $P \in Pr^A$, $d \in {}^V A$. Операція \vee (накладання) визначається наступним чином. Для іменних множин d_1 , d_2 та $d = d_1 \vee d_2$ маємо, що пара $v \mapsto a \in_n d$ тоді і лише тоді, коли або $v \mapsto a \in_n d_1$, або $v \mapsto a \in_n d_2$ та $v \mapsto b \notin_n d_2$ для будь-яких $b \in A$.

Важливою властивістю композицій КНЛ, що розглядаються тут, є монотонність. Будемо казати, що $P \subseteq Q$, де $P, Q \in Pr$, якщо для будь-якого $d \in Dt$ такого, що $P(d) \downarrow = b$, маємо $Q(d) \downarrow = b$. Також, $(P_1, \dots, P_n) \subseteq (Q_1, \dots, Q_n)$, якщо $P_i \subseteq Q_i$ для всіх $i \in \{1, \dots, n\}$. n -арна композиція $c: Pr \times \dots \times Pr \rightarrow Pr$ називається *монотонною* тоді і тільки тоді, коли з $(P_1, \dots, P_n) \subseteq (Q_1, \dots, Q_n)$ випливає $c(P_1, \dots, P_n) \subseteq c(Q_1, \dots, Q_n)$. Легко пересвідчитись, що композиції \vee , \neg , R_v^A є монотонними.

На кожному з рівнів абстрактності можна задавати різні класи предикатів. Для номінативного рівня найважливішими є класи *еквітонних* предикатів (позначається EPr^A) та *повнототальних еквітонних* предикатів.

Еквітонні предикати зберігають значення предикату при розширенні даного-аргументу. Повнототальні предикати, крім цього, обов'язково визначені на максимальних розширеннях даних. Більш детальний опис цих класів та їх властивостей можна знайти у [1, 2].

Узагальнюючи, можна сказати, що композиційно-номінативні логіки базуються на різних алгебрах часткових предикатів.

Надалі ми розглядаємо пропозиційний та реномінативний рівень композиційно-номінативних логік.

Опишемо мову чистої (без функціональних символів у сигнатурі) композиційно-номінативної логіки. Нехай Ps — довільна множина, яку будемо називати множиною предикатних символів. Нехай C — множина імен базових композицій. Множина C , як зазначено вище, визначається рівнем КНЛ. Алфавіт мови КНЛ складається із символів з множин Ps , C , та V . Головними конструкціями КНЛ є формули. Формули (терми відповідних алгебр) будуються індуктивно наступним чином:

- 1) кожен предикатний символ $p \in Ps$ є атомарною формулою;
- 2) якщо Φ_1, \dots, Φ_n — формули, $c \in C$ — n -арна композиція, то $c\Phi_1 \dots \Phi_n$ є формулою.

Єдиними не інтерпретованими символами у формулах КНЛ (КНЛ-формулах) є предикатні символи. Інтерпретацією формули КНЛ є трійка $J = (A, Pr, I)$, де Pr — клас предикатів на A , I — всюди визначена функція $I: Ps \rightarrow Pr$. Пара (Pr, C) утворює (під)алгебру. Це пояснює чому АЧП виступають семантичною базою КНЛ. На реномінативному рівні множина Pr конкретизується як Pr^A . Інтерпретація $J = (A, Pr, I)$ називається *тотальною*, якщо I відображає кожен $p \in Ps$ у тотальну функцію $I(p) \in Pr^A$.

Інтерпретацією КНЛ формули Φ на фіксованій інтерпретації J є предикат Φ_J . Якщо Φ — атомарна формула, то $\Phi_J = I(\Phi)$. Інакше Φ_J визначається відповідно до семантики операцій композицій.

Надалі ми розглядаємо формули у їх традиційній формі запису, використовуючи інфіксні операції та дужки. Дужки можуть опускатися виходячи із загальноприйнятих пріоритетів операцій.

Проблема виконуваності КНЛ-формул

КНЛ-формула Φ виконувана на інтерпретації $J = (D, Pr, I)$, якщо існує дане

$d \in D$ таке, що $\Phi_J(d) \downarrow = T$. Будемо позначати це $J \models \Phi$. КНЛ-формула Φ є виконуваною у класі предикатів Pr , якщо існує інтерпретація $J = (D, Pr, I)$ на якій Φ виконувана. Будемо позначати це $(D, Pr) \models \Phi$. КНЛ-формула Φ називається виконуваною, якщо існує інтерпретація J на якій Φ виконувана. Будемо позначати це $\models \Phi$.

Властивість виконуваності формул пов'язана із властивістю всюди істинності. КНЛ-формула Φ називається *всюди істинною на інтерпретації* $J = (D, Pr, I)$, якщо не існує такого $d \in D$, що $\Phi_J(d) \downarrow = F$. Будемо позначати це $J \models \Phi$. КНЛ-формула Φ називається *всюди істинною у класі предикатів* Pr , якщо для будь-якої інтерпретації $J = (D, Pr, I)$ має місце $J \models \Phi$. Будемо позначати це $(D, Pr) \models \Phi$. Формула Φ називається *всюди істинною*, якщо $J \models \Phi$ для будь-якої інтерпретації J . Зазначимо, що на відміну від класичних логік предикатів першого порядку, у КНЛ з істинністю формули на інтерпретації не випливає її виконуваність. Іншими словами, в силу можливої присутності часткових предикатів, в КНЛ не має місця імплікація $J \models \Phi \Rightarrow J \models \Phi$. Називатимемо формули Φ та Ψ *еквівиконуваними*, якщо вони обидві виконувані або не виконувані.

Позначимо TPr підмножину всіх тотальних предикатів із Pr , тобто предикатів, що визначені на всіх даних із відповідної області визначення.

Теорема 1. Нехай $Pr \subseteq D \rightarrow \text{Bool}$ — клас часткових предикатів, (Pr, C) — алгебра предикатів, Φ — терм (формула) цієї алгебри. Якщо всі композиції C монотонні, то $(D, Pr) \models \Phi$ тоді і тільки тоді, коли $(D, TPr) \models \Phi$.

Доведення. Щоб довести що теорему, достатньо показати, що для кожної інтерпретації $J = (D, Pr, I_1)$ такої, що $J \models \Phi$, ми можемо побудувати інтерпретацію $K = (D, TPr, I_2)$ таку, що $K \models \Phi$. Нехай Ps — множина предикатних символів, що зустрічаються у Φ . Для кожного $p \in Pr$ визначимо предикат $\text{ext}(p)$ такий, що для кожного $d \in D$ $\text{ext}(p)(d) = p(d)$, якщо $p(d)$ визначено, та $\text{ext}(p)(d) = T$, якщо $p(d)$ невизначено. Зауважимо, що $\text{ext}(p) \in TPr$ та $p \subseteq \text{ext}(p)$. Для кожного $p \in Ps$ покладемо $I_2(p) = \text{ext}(I_1(p))$. Внаслідок монотонності композицій, неважко отримати, що $\Phi_J \subseteq \Phi_K$. Із $J \models \Phi$ тепер випливає $K \models \Phi$. ♦

Теорема 1 обґрунтовує те, що для перевірки виконуваності формули Φ мови композиційно-

номінативної логіки достатньо обмежитися розглядом лише тотальних інтерпретацій.

Пропозиційний рівень КНЛ

Нехай $TCPr \subset Pr$ — множина тотальних константних предикатів $TCPr = \{True, False\}$ така, що для кожного $d \in Dt$ $True(d) \downarrow = T$, $False(d) \downarrow = F$.

Теорема 2. Нехай Φ пропозиційна КНЛ-формула. Тоді $(Dt, TPr) \models \Phi$ тоді і лише тоді, коли $(Dt, TCPr) \models \Phi$.

Доведення. Щоб довести що теорему, достатньо показати, що для кожної інтерпретації $J = (Dt, TPr, I_1)$ такої, що $J \models \Phi$, ми можемо побудувати інтерпретацію $K = (Dt, TCPr, I_2)$ таку, що $K \models \Phi$. Нехай Ps — множина предикатних символів, що зустрічаються у Φ . Оскільки $J \models \Phi$, існує $d \in Dt$ таке, що $\Phi_A(d) \downarrow = T$. Для кожного $p \in Ps$ покладемо $I_2(p)$ рівним тотальному константному предикату, що приймає значення $I_1(p)(d)$. Легко показати, що $\Phi_A(d) \downarrow = T$, що означає, що $K \models \Phi$. ♦

Теорема 2 обґрунтовує те, що для перевірки виконуваності пропозиційних КНЛ-формул достатньо обмежитися лише інтерпретаціями в класі тотальних константних функцій. Ця редукція може бути посилена. На пропозиційному рівні КНЛ можна розглядати на сингулярному рівні абстракції.

Теорема 3. Нехай $d \in Dt$. Тоді $(Dt, TCPr) \models \Phi$ тоді і тільки тоді, коли $(\{d\}, TCPr) \models \Phi$.

Доведення очевидне.

Об'єднуючи теореми 1-3 отримуємо наступний ланцюг редукцій:

$$(Dt, Pr) \models \Phi \Leftrightarrow (Dt, TPr) \models \Phi \Leftrightarrow \\ (Dt, TCPr) \models \Phi \Leftrightarrow (\{d\}, TCPr) \models \Phi.$$

На останній ділянці цього ланцюга кожному предикатному символу у Φ ставиться у відповідність константний предикат, що набуває значення T або F , та визначений на одноеlementній множині. Фактично, це означає, що для перевірки $\models \Phi$ на пропозиційному рівні ми можемо використовувати методи перевірки виконуваності для класичної пропозиційної логіки. Серед можливих підходів до перевірки виконуваності пропозиційних формул відмітимо алгоритм DPLL (Davis-Putnam-Logemann-Loveland algorithm) [3], модифікації якого широко застосовуються.

Реномінативний рівень КНЛ

На номінативному рівні тлумачення даних часткові предикати над іменними множинами розглядаються як найзагальніший клас предикатів. Отже, конкретизувавши множину даних як множину Dt , ми конкретизуємо також $\models \Phi$ як $(\forall A, Pr^A) \models \Phi$.

Для реномінативних композиційно-номінативних логік (РКНЛ) пропонується техніка зведення проблеми виконуваності КНЛ формули логіки (РКНЛ-формули) до проблеми виконуваності формули класичної логіки предикатів. Будемо казати, що РКНЛ-формула Φ знаходиться у реномінативній нормальній формі (РНФ), якщо композиція реномінації застосовується лише до предикатних символів. Це означає, що для будь-якої підформули Φ вигляду $R_{\vec{x}}^{\vec{v}}(\Psi)$ маємо, що $\Psi \in Ps$. В такому випадку, підформулу $R_{\vec{x}}^{\vec{v}}(P)$ називатимемо *реномінативним атомом*. Для приведення будь-якої РКНЛ-формули до нормальної форми використовуються наступні перетворення:

$$R_{\vec{x}}^{\vec{v}}(\neg P) \Rightarrow \neg R_{\vec{x}}^{\vec{v}}(P) \\ R_{\vec{x}}^{\vec{v}}(P \vee Q) \Rightarrow R_{\vec{x}}^{\vec{v}}(P) \vee R_{\vec{x}}^{\vec{v}}(Q). \\ R_{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m}^{\gamma_1, \dots, \gamma_n, \delta_1, \dots, \delta_m} (R_{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m}^{\gamma_1, \dots, \gamma_n, \delta_1, \dots, \delta_m} (P)) \Rightarrow \\ R_{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m}^{\gamma_1, \dots, \gamma_n, \delta_1, \dots, \delta_m} (P).$$

Тут $\alpha_i = s(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m / x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$, $\beta_j = z(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m / x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ де $r(b_1, \dots, b_q / c_1, \dots, c_q) = r$, якщо $r \in \{b_1, \dots, b_q\}$, $r(b_1, \dots, b_q / c_1, \dots, c_q) = c_i$, якщо $r = b_i$ для деякого i .

Легко перевірити, що застосування перетворень 1-3 призводить до отримання еквівалентної формули.

Відмітно, що наведені перетворення зберігають пропозиційну структуру формули, у тому сенсі, що вони не змінюють взаємного порядку композицій у структурі формули, за виключенням реномінації.

Нехай Φ — довільна РКНЛ-формула у реномінативній нормальній формі, Ps — множина предикатних символів із Φ . Наступним кроком є уніфікація реномінативних атомів, де реномінація застосовується до одних і тих самих предикатних символів. Під уніфікацією тут розуміється приведення реномінативних атомів до вигляду, коли перейменовуються одні й ті самі компоненти даних. Нехай $P \in Ps$, $R_{\vec{x}}^{\vec{v}}(P)$, $R_{\vec{y}}^{\vec{w}}(P)$ — два різних реномінативних атоми, які є

підформулами Φ . Вектори \bar{v} та \bar{w} розширюються для приведення зазначених входжень до вигляду $R_z^{\bar{v}}(P)$, $R_z^{\bar{w}}(P)$. Це робиться за допомогою наступного правила: $R_z^{\bar{v}}(P) = R_{z,\bar{v}}^{\bar{v}}(P)$, $z \neq v_i$. Вхідження P без операції реномінації замінюються на $R_z^{\bar{v}}(P)$. Але, якщо жодне із входжень предикату P у Φ не є частиною терму із композицією реномінації $R_z^{\bar{v}}$, то такі входження залишаються без змін. Легко пересвідчитись, що ці трансформації перетворюють формулу у еквівиконувану. Після цього ми будемо еквівиконувану формулу Ψ класичної логіки предикатів. Виконуваність формул в цій логіці розуміється традиційним чином. Формула Ψ отримується із формули Φ шляхом заміни кожного входження $R_{x_1, \dots, x_n}^{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n}(P)$ на n -арний предикат $P(x_1, \dots, x_n)$. Таким чином, множина предикатних символів у Ψ співпадає з аналогічною множиною у Φ . Вхідження предикатів, які не утворюють реномінативних атомів, замінюються у Ψ 0-арними предикатами.

Теорема 4. Для будь-якої формули Φ реномінативної композиційно-номінаційної логіки можна конструктивно побудувати безкванторну формулу Ψ класичної логіки предикатів таку, що Φ та Ψ еквівиконувані.

Доведення. Достатньо показати, що Φ та Ψ еквівиконувані, де Ψ — формула побудована описаним вище шляхом.

Розглянемо випадок, коли Φ виконувана. Нехай $J = \langle \mathcal{A}, TP^A, I \rangle$ — інтерпретація, $a \in \mathcal{A}$ таке, що $\Phi(a) \downarrow = T$. Розгляд тільки тотальних інтерпретацій обумовлений теоремою 1. Нехай K — функція інтерпретації предикатних символів із Ψ , що ставить у відповідність кожному n -арному предикатному символу P деяке n -арне відображення над A . Для кожного реномінативного атома $R_{x_1, \dots, x_n}^{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n}(P)$, що зустрічається у РНФ формули Φ , покладемо

$$K(P(a(x_1), \dots, a(x_n))) = (R_{x_1, \dots, x_n}^{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n}(P))_J(a).$$

Для інших кортежів $K(P)$ може визначатись довільним чином. Незаважко помітити, що при такій інтерпретації предикатів із Ψ маємо, що Ψ теж виконувана, а саме, $\Psi(a) \downarrow = T$. Тут, під записом $\Psi(a)$ розуміється підстановка відповідних значень даного a у аргументи предикатів із Ψ , тобто, якщо входження предикату P у формулі Ψ відповідає входженню

$R_{x_1, \dots, x_n}^{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n}(P)$ у формулі Φ , то аргументами P у $\Psi(a)$ суть $a(x_1), \dots, a(x_n)$.

Аналогічно, можна показати, що з виконуваності Ψ у логіці предикатів випливає виконуваність Φ у РКНЛ. ♦

Таким чином, для розв'язання проблеми, що розглядається, можна використовувати методи перевірки виконуваності у класичній логіці предикатів. Отримані еквівиконувані формули останньої можуть у подальшому бути перетворені у формули чистої пропозиційної логіки, за умови, що множина даних A містить достатню кількість значень для розрізнення всіх кортежів (x_1, \dots, x_n) , які зустрічаються у Φ . Хоча останнє обмеження не є істотним, якщо розглядається загальна проблема виконуваності, тобто, множина даних не конкретизується. Отже, на реномінативному рівні проблема перевірки виконуваності КНЛ-формул може бути зведена до перевірки виконуваності пропозиційних формул. Проілюструємо описану редукцію наступними прикладами. Для зручності, будемо використовувати інфіксний запис КНЛ-формул, використовуючи дужки для обрамлення аргументів операцій де це потрібно.

Приклад 1. Розглянемо РКНЛ-формулу Φ із трьома базовими предикатами: P, Q, S .

$$\Phi = R_{x_1}^{\bar{v}_1}(P \vee Q) \& \neg R_{x_1, x_2}^{\bar{v}_1, \bar{v}_2}(P \vee R_{x_1, x_2}^{\bar{v}_1, \bar{v}_2}(Q) \& S).$$

Нехай множина V містить x_1, y_1, x_2, y_2 .

Згідно до описаного методу, побудуємо реномінативну нормальну форму формули Φ , застосовуючи прості перетворення. Отримуємо формулу Φ_1 :

$$\Phi_1 = (R_{x_1}^{\bar{v}_1}(P \vee R_{x_1}^{\bar{v}_1}(Q)) \& \neg(R_{x_1, x_2}^{\bar{v}_1, \bar{v}_2}(P \vee R_{x_1, x_2}^{\bar{v}_1, \bar{v}_2}(Q) \& S).$$

Тепер уніфікуємо входження реномінативних атомів $R_{x_1}^{\bar{v}_1}(P$ та $R_{x_1, x_2}^{\bar{v}_1, \bar{v}_2}(P$, а також $R_{x_1}^{\bar{v}_1}(Q$ та $R_{x_1, x_2}^{\bar{v}_1, \bar{v}_2}(Q$. Отримуємо формулу Φ_2

$$\Phi_2 = (R_{x_1, x_2}^{\bar{v}_1, \bar{v}_2}(P \vee R_{x_1, x_2}^{\bar{v}_1, \bar{v}_2}(Q) \& \neg(R_{x_1, x_2}^{\bar{v}_1, \bar{v}_2}(P \vee R_{x_1, x_2}^{\bar{v}_1, \bar{v}_2}(Q) \& S).$$

Тепер можна побудувати формулу логіки предикатів Ψ , що має 0-арний предикат s , бінарний предикат p та тернарний предикат q .

$$\Psi = (p(y_1, x_2) \vee q(y_1, x_2, y_1)) \& \neg(p(y_1, y_2) \vee q(y_1, y_2, y_2)) \& s.$$

Ця формула виконувана. Наприклад, можна розглянути множину натуральних чисел як множину даних A . Тоді остання формула s

еквівиконувану по відношенню до наступної формули пропозиційної логіки: $(p_1 \vee q_1) \& \neg(p_2 \vee q_2) \& s$, яка є виконуваною. Таким чином, ми встановили $\models \Phi$. Відмітимо, що $(V, \{a\}) \models \Phi$ не вірно. Справді, якщо множина даних одноелементна, формула Ψ буде еквівиконувана із пропозиційною формулою $(p \vee q) \& \neg(p \vee q) \& s$, яка не є виконуваною.

Приклад 2. Розглянемо РКНЛ формулу Φ із двома базовими предикатами P та Q . Нехай V містить x_1, y_1, x_2, y_2 ,

$$\Phi = R_{x_1, x_2}^{y_1, y_2}(P \& Q) \& \neg R_{x_1}^{x_2}(R_{y_1}^{y_2} P)$$

РНФ формули Φ має вигляд:

$$\Phi_1 = R_{x_1, x_2}^{y_1, y_2} P \& R_{x_1, x_2}^{y_1, y_2} Q \& \neg R_{x_1}^{x_2} P$$

Уніфікацію реномінативних атомів проводити не потрібно, отже еквівиконувана формула Ψ логіки предикатів має два бінарні предикати p та q :

$$\Psi = p(y_1, y_2) \& q(y_1, y_2) \& \neg p(y_1, y_2).$$

Ця формула не виконувана, що свідчить про те, що Φ теж не виконувана.

Висновки

В цій роботі ми визначили та дослідили проблему перевірки виконуваності для пропозиційної та реномінативної композиційно-номінативної логіки. Для цих рівнів КНЛ ми запропонували можливі способи редукції, з тим, щоб мати можливість застосовувати для розв'язання цієї проблеми вже розроблені алгоритми для класичних логік. Для пропозиційної КНЛ ми вказали техніку перетворення початкової КНЛ-формули у

еквівиконувану формулу класичної пропозиційної логіки. Для КНЛ-формул реномінативного рівня ми запропонували метод редукції проблеми виконуваності до аналогічної проблеми у класичній логіці предикатів.

У подальшому планується дослідити проблему виконуваності для композиційно-номінативних логік кванторного рівня, коли в наявності є композиція квантифікації за компонентами даного. Відомо, що ця проблема нерозв'язна в повному обсязі. Зокрема, в термінах проблеми перевірки виконуваності КНЛ-формул кванторного рівня можна сформулювати проблему виконуваності формул логіки першого порядку. Остання, як відомо, не є розв'язною. Незважаючи на це, визначення та дослідження розв'язних фрагментів КНЛ кванторного рівня є важливою задачею. Зокрема, в контексті КНЛ викликає інтерес спеціалізована постановка проблеми виконуваності, яка часто зустрічається на практиці у галузях пов'язаних із верифікацією програмних чи апаратних систем, аналізом програм, тестуванням та ін. Мова йде про проблему виконуваності відносно теорій (satisfiability modulo theories, SMT) [4]. При такій постановці деякі функціональні та предикатні символи інтерпретовані, а певні аксіоми теорій мають справджуватися на допустимих інтерпретаціях. Для більшості теорій, що розглядаються із практичної точки зору, проблема SMT розв'язна в загальному випадку тільки для бескванторних фрагментів відповідних мов [5].

Список використаних джерел

1. Nikitchenko N. A composition-nominative approach to program semantics / N. Nikitchenko // Technical report IT-TR 1998-020, Technical University of Denmark. — 1998. — 103 p.
2. Нікітченко М.С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. — Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2008. — 528 с.
3. Davis M. A Machine Program for Theorem-Proving / M. Davis, G. Logemann, D. Loveland // Comm. of the ACM, 5(7). — 1962. — P. 7:394-397.
4. Nieuwenhuis R. Solving SAT and SAT modulo theories: from an abstract Davis-Putnam-Logemann-Loveland procedure to DPLL(T) / R. Nieuwenhuis, A. Oliveras, C. Tinelli // Journal of the ACM, 53. — 2006. — P. 937-977.
5. Kroening D. Decision procedures — an algorithmic point of view / D. Kroening, O. Strichman. — Springer, 2008. — 304 pp.

Надійшла до редколегії 28.10.11

Юнькова О.О., к.ф.-м.н., доцент
Кулян А.В., студент

Математичне моделювання та побудова оптимальної структури інвестиційного портфеля

Розглядається проблема побудови математичної моделі та управління портфелем цінних паперів як задача оптимального керування динамічною системою.

Ключові слова: математична модель, оптимальний портфель, оптимальне керування.

E-mail: v.kulyan@gmail.com

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Сучасні наукові дослідження математиків і економістів в області фінансового аналізу спрямовані на вивчення різних змістовних інтерпретацій і узагальнень, розгляд багатокритеріальних задач з великою кількістю критеріїв, на вивчення і застосування задач у динамічній постановці, способах адекватного опису формування ринкових цін активів, на розробку чисельних методів для розв'язання задач великої розмірності. Водночас, залишається відкритим багато питань, пов'язаних з моделюванням процесу прийняття рішень, зокрема, у динамічному випадку.

Динамічні моделі управління активами і зобов'язаннями знайшли успішне застосування у сфері довгострокового фінансового планування, де необхідність неодноразового прийняття рішень визначається сутністю процесу. Приклади застосування таких моделей реалізовано для пенсійних фондів, страхових компаній, інвестиційних компаній, банків, університетських фондів.

В роботі [3] наведена загальна схема активного управління портфелем акцій і вона включає питання моделювання динаміки, ідентифікації параметрів, аналізу поведінки траєкторій математичної моделі та інтегрального управління.

Розглянемо підходи, що дають змогу моделювати динаміку формування ринкової вартості портфеля акцій на основі наведеної у роботі [3] математичної моделі формування ринкової

Yunkova O.O., Ph.D., Ass. Prof.
Kulian A.V., stud.

Mathematical modeling and construction of optimal portfolio structure

The problems of construct of mathematical model and dynamic portfolio control for optimal portfolio selection are investigated.

Key Words: mathematical model, optimal portfolio, optimal control.

вартості однієї акції та проаналізуємо їх у детермінованому випадку.

На інтервалі часу $t \in [t_0, T]$ рівняння, що описує прибутковість портфеля акцій r_p , має вигляд

$$r_p(t) = \sum_i x_i(t) r_i(t). \quad (1)$$

де x_i – частка акцій i -того виду у портфелі; r_i – очікувана прибутковість акцій i -того виду. Продиференціювавши обидві частини (1) за t , отримаємо

$$\frac{dr_p(t)}{dt} = \sum_i (r_i(t) \frac{dx_i(t)}{dt} + x_i(t) \frac{dr_i(t)}{dt}). \quad (2)$$

Уведемо нормуючі вирази, які за змістом є оберненим часом реакції системи на зміну динаміки очікуваної прибутковості та структури портфеля

$$\sum_i \frac{\dot{r}_i(t)}{r_i(t)} = 1, \quad \sum_i \frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} = 1, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Для $i \neq j$ мають місце співвідношення

$$\sum_i x_i(t) r_i(t) \frac{f_j}{r_j(t)} = \sum_i x_i(t) r_i(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) \times r_i(t) \frac{f_j}{r_j(t)},$$

$$\sum_i \frac{x_i(t)r_i(t)}{x_i(t)} \frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_i x_i(t)r_i(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) \times r_i(t) \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)}. \quad (3)$$

Динамічна модель формування ринкової вартості портфеля акцій матиме вигляд

$$\frac{dr_p(t)}{dt} = 2r_p(t) - \sum_i \sum_j x_i(t)r_i(t) \left(\frac{f_j}{r_j(t)} \times \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)} \right). \quad (4)$$

Диференціальне рівняння (4), при припущеннях, зроблених вище, описує динаміку поведінки портфеля ризикованих цінних паперів. Більш детальний його аналіз вказує на дві важливі властивості, які характеризують ринкову вартість портфеля і полягають в тому, що ця динаміка залежить від динаміки як очікуваної прибутковості акцій, так і зміни структури портфеля.

У рівнянні (4) f_j є правою частиною диференціального рівняння, яке описує динаміку формування ринкової вартості акції і за своєю структурою відповідає ринковій моделі Шарпа

$$\frac{dr_j(t)}{dt} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r_j(t) + \sum_{i=1}^N \beta_{ij} r_i(t), \quad t \in [t_0, T]. \quad (5)$$

Тут: $r_j(t)$ – ринкова ціна акції у момент часу $t \in [t_0, T]$; α_1, α_2 – невідомі параметри моделі; $SM_{ind}(t)$ – функція індексу фондового ринку; $I(t)$ – функція індексу інфляції.

Перейдемо до формулювання та розв'язання деяких із згаданих вище задач.

У загальному вигляді траєкторна задача для динамічної моделі формування ринкової вартості портфеля акцій (4) є такою

$$J(r_p, x_1, x_2, \dots, x_N) = \int_D \dots F(x_1, \dots, x_N, r_p, \frac{\partial r_p}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial r_p}{\partial x_N}) dx_1 \dots dx_N.$$

$$r_p(t_0) = r_{p_0}, \quad r_p(T) = r_{p_T}.$$

Тут D – множина допустимих портфелів у задачі Марковця. Для побудови конструктивних оптимізаційних алгоритмів для розв'язання задач

інвестиційного менеджменту можна застосувати також ефективну множину, попередньо побудувавши її на основі допустимої множини. Необхідна умова оптимальності наведеного функціонала є такою

$$F_{r_p} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} F_{r_{x_i}} = 0.$$

Наведена задача варіаційного числення дає можливість побудувати траєкторію оптимальної диверсифікації портфеля акцій на основі очікуваних прибутковостей акцій.

Оскільки метою моделювання є опис та аналіз динаміки формування ринкової вартості портфеля акцій, динаміку його складових будемо розглядати у вигляді (5). Векторно-матричний вигляд динаміки формування ринкової вартості N акцій може бути записаний так

$$\begin{pmatrix} \frac{dr_1}{dt} \\ \frac{dr_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dr_N}{dt} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{1N} \\ \beta_{21} & 0 & \beta_{23} & \beta_{2N} \\ \beta_{N1} & \beta_{N2} & \beta_{N3} & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N \end{pmatrix},$$

де $A_i = \alpha_{i1} SM_{ind}(t) + \alpha_{i2} I(t)$, $i = \overline{1, N}$.

Або ж у вигляді

$$\frac{dr}{dt} = (B^{(1)} + b(t)\Lambda^{(1)} + c(t)\Lambda^{(2)})r(t), \quad t \in [t_0, T], \quad (6)$$

де:

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{1N} \\ \beta_{21} & 0 & \beta_{23} & \beta_{2N} \\ \beta_{N1} & \beta_{N2} & \beta_{N3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda^{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_N^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{(2)} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_N^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$\lambda^{(1)T} = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{N1}), \quad \lambda^{(2)T} = (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{N2}).$$

Системі звичайних диференціальних рівнянь (6) відповідають початкові умови $r(t_0, \Lambda) = r_0(\Lambda)$, $t_0 = t_0(\Lambda)$, де Λ – об'єднана матриця параметрів моделі.

Перейдемо до аналізу динамічної моделі (5) і розглянемо задачу про побудову функцій чутливості.

Для зручності перетворень праву частину позначимо через $f(t, r, \alpha)$, де $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$.

Вважатимемо також, що мають місце початкові умови $r(t_0) = r_0 = r_0(\alpha)$, $t_0 = t_0(\alpha)$, а також, що α є скаляром і $\alpha = \alpha_1$, оскільки при короткотерміновому моделюванні динаміки формування ціни акції α_2 є сталою. У такій постановці β_y – коефіцієнти кореляції між акціями, які можна обчислити на основі відомої статистичної інформації. Згідно [2], за умови, що права частина (5) неперервна за своїми аргументами і неперервно-диференційована за r, α , а також за неперервної диференційованості функцій r_0, t_0 за α_1 існує неперервна похідна

$$u(t, \alpha_1) = \frac{\partial r(t, \alpha_1)}{\partial \alpha_1}. \quad \text{Ця похідна задовольняє}$$

диференціальному рівнянню

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f(r(t, \alpha_1)}{\partial r} u + \frac{\partial f(r(t, \alpha_1)}{\partial \alpha_1} \quad (7)$$

при початковій умові

$$u(t_0) = \frac{dr_0(\alpha_1)}{d\alpha_1} - f(r_0(\alpha_1), t_0(\alpha_1), \alpha_1) \frac{dt_0(\alpha_1)}{d\alpha_1}. \quad (8)$$

Рівняння (8) отримано прямим диференціюванням (7) за α_1 , а початкова умова – із диференціювання інтегрального рівняння

$$r(t, \alpha_1) = \int_{t_0(\alpha_1)}^t f(r(\tau, \alpha_1), \tau, \alpha_1) d\tau + r_0(t_0, \alpha_1) \quad (9)$$

і має вигляд

$$u(t, \alpha_1) = \frac{\partial r(t, \alpha_1)}{\partial \alpha_1} = \int_{t_0(\alpha_1)}^t \left[\frac{\partial f(r(\tau, \alpha_1), \tau, \alpha_1)}{\partial r} u(\tau, \alpha_1) + \frac{\partial f(r(t, \alpha_1), \tau, \alpha_1)}{\partial \alpha_1} \right] d\tau + \frac{dr_0(\alpha_1)}{d\alpha_1} - f(r(t_0(\alpha_1), \alpha_1), t_0(\alpha_1), \alpha_1) \frac{dt_0(\alpha_1)}{d\alpha_1}. \quad (10)$$

Початкову умову для функції чутливості $u(t_0)$ отримаємо, поклавши в (10) $t = t_0$. Отже, для (5) побудовано початкову умову та функцію чутливості, що описує залежність ціни акції від параметра α_1 . Застосуємо функцію чутливості до ідентифікації параметрів α_1, α_2 математичної моделі (5).

Математична задача має такий вигляд $\min_{\alpha_1, \alpha_2} (r_i(t, \alpha_1, \alpha_2) - z_i(t))^2, \quad t \in [t_0, T]$.

Тут $z_i(t)$ – спостереження за поведінкою ціни

акції на ринку. Короткострокове моделювання динаміки ціни акції на ринку дає можливість модель (5) та задачу оптимізації її параметрів записати у вигляді

$$\frac{dr_i(t)}{dt} = \alpha I(t) r_i(t) + \sum_{j=1}^N \beta_j r_j(t), \quad t \in [t_0, T]$$

$$\min_{\alpha} (r_i(t, \alpha) - z_i(t))^2, \quad t \in [t_0, T].$$

Зауваження стосовно параметрів моделі α_1, α_2 справедливе, оскільки рівень інфляції можна вважати постійним і малим для невеликих проміжків часу. Як і раніше, динаміка системи у загальному вигляді описується рівнянням $\dot{r} = f(t, r, \alpha)$.

Рівняння моделі мають вигляд

$$\dot{r} = f(t, r, \beta), \quad r(t_0) = r_0. \quad (11)$$

Тут β – аналог вектора невідомих параметрів α . Побудуємо апроксимацію для вектор-функції $r(\beta + \Delta\beta, t)$

$$r(\beta + \Delta\beta, t) = r(\beta, t) + u(t)\Delta\beta, \quad (12)$$

$$\text{де } u(t) = \left. \frac{\partial r(t, \beta)}{\partial \beta} \right|_{\beta=0}.$$

Це матриця чутливості, яка є розв'язком відповідного рівняння чутливості (7) при $\beta = \beta_0, \quad r(t_0) = 0$.

Функціонал якості ідентифікації виберемо у вигляді

$$J = \int_{t_0}^T (r(t) - \bar{r}(t))^T (r(t) - \bar{r}(t)) dt. \quad (13)$$

Підставляючи (12) у функціонал і мінімізуючи за $\Delta\beta$, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$C\Delta\beta = P,$$

де $C = \int_{t_0}^T U^T(t)U(t)dt$ – матриця ідентифікації;

$$P = \int_{t_0}^T U^T(t)\Delta r(t)dt, \quad \Delta r(t) = r(t, \alpha) - \bar{r}(t, \beta),$$

$r(t, \alpha)$ – зареєстроване значення ринкової вартості акції у момент часу t ; $r(t, \beta)$ – розв'язок задачі Коші (11) при $\beta = \beta_0$.

Якщо матриця C не є особливою, то

$$\Delta\beta = C^{-1}P.$$

Рівність $\det C \neq 0$ називають умовою ідентифікованості. Оцінку параметра α знаходимо за K кроків

$$\alpha = \beta + \sum_{i=1}^k \Delta \beta_i.$$

Знайшовши параметр α , масмо можливість сформулювати задачу побудови траєкторії ринкової ціни акції і короткострокового прогнозування ринкової ціни акції. Тобто, необхідно побудувати оптимальний процес, що починається у заданій точці (x_0, r_0) і надає обраному критерію якості оптимального значення.

$$J = \sum_i x_i r_i(T) = \sum_i x_i (r_i(T) - r_i(t_0)) + \sum_i x_i r_i(t_0) =$$

$$\sum_i x_i \int_{t_0}^T f_i(r(t), u(t)) dt + const =$$

$$\int_{t_0}^T \sum_i x_i f_i(r(t), u(t)) dt + const.$$

Із наведеного вище слідує, що $J = I + const$, де I – функціонал в задачі принципу максимуму Понтрягіна, в якому функція f^0 має вигляд

$$f^0(x, u) = \sum_i c_i f_i(x, u).$$

Тому розв'язок даної задачі можна отримати, застосувавши відповідну теорему про оптимальність розв'язку задачі оптимального керування із закріпленим часом.

Для спрощення подальших викладок математичну модель (4) в більш загальній формі запишемо

$$\dot{r}_p = f^p(r_p, x, \dot{x}, r_i, \dot{r}_i). \quad (14)$$

Граничну умову, що характеризує ринкову вартість портфеля акцій у початковий t_0 момент часу сформулюємо у вигляді

$$r_p(t_0) = r_{p_0}. \quad (15)$$

Критерій якості запишемо у вигляді

$$J = \sum_i x_i(T) r_i(T). \quad (16)$$

Для розв'язання задачі оптимального керування (14), (15), (16) застосуємо метод послідовних наближень.

Як змінна фазового стану розглядається ринкова вартість портфеля акцій r_p . За керуючі параметри, згідно з моделлю, розглядаємо вектор

$$u(t) = (x_i(t), r_i(t), \frac{dx_i(t)}{dt}, \frac{dr_i(t)}{dt}).$$

Обчислювальна процедура методу послідовних наближень полягає у конструюванні послідовності допустимих керувань $\{u^k(t)\}$ такої, що на кожному наступному кроці

$$u^{k+1}(t) = Ru^k(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

де u^0 – деяке початкове наближення вектора керувань; $Ru(t)$ – довільна допустима функція, що надає максимуму функції Гамільтона за керуванням.

В розвиток побудованої математичної моделі та формулювання для неї задачі оптимального керування можна побудувати послідовність оптимальних на інтервалах часу керувань, яка б враховувала можливості оптимальної диверсифікації портфеля акцій у фіксовані моменти часу.

Запропонована в даній роботі методологія побудови та дослідження якісних властивостей математичних моделей однієї акції та портфеля акцій дає можливість проведення глибокого конструктивного аналізу при прийнятті рішень про оптимальну диверсифікацію портфеля акцій.

Список використаних джерел

1. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. - К.: Наукова думка. 1985. – с.304.
2. Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чувствительность систем управления. – М.: Наука, 1981. – с. 464.
3. Гаращенко Ф.Г., Кулян В.Р., Рутцкая В.В. Качественный анализ математических моделей инвестиционного менеджмента// Кибернетика и вычислительная техника. – 2005. – 148. – с. 3-10.
4. Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. Алгоритм метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления. – М.: Наука, 1971. – с.247.

Надійшла до редакції 23.11.2011р.

РАДІОФІЗИКА

УДК 621.039.6

Бех І.І. к.ф.-м.н., доц., Ільченко В.В., д.ф.-м.н., проф., Онищенко Ю.М., студ.

Розрахунок енергетичного розподілу автоелектронів, емітованих вольфрамом

Проведено числовий розрахунок енергетичного розподілу електронів, емітованих вольфрамом, для випадку трикутного потенціального бар'єру і з урахуванням сил зображень. Показано що при використанні точного розв'язку рівняння Шредінгера при постійній напруженості електричного поля енергетичний розподіл електронів практично не залежить від температури. В той час як при використанні квазікласичного наближення для розрахунку прозорості потенціального бар'єру при постійній напруженості електричного поля спостерігається сильна залежність енергорозподілу електронів від температури.

Ключові слова: автоелектронна емісія, тунелювання, енергетичний розподіл.

*E-mail: sun@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Анісімов І.О.

Вступ

Польова емісія, також відома як тунельний ефект, є дуже серйозною альтернативою термоелектронної емісії. Термін тунелювання (tunneling) означає проходження частинкою області (або проникнення в область), що обмежена потенціальним бар'єром, висота якого є більшою, ніж повна енергія даної частинки. Такий ефект неможливий з точки зору класичної механіки, однак має місце для квантових частинок, яким, як відомо, притаманний корпускулярно-хвильовий дуалізм. Хвильові властивості квантових частинок приводять і до іншого, аномального з точки зору класичної механіки, ефекту - надбар'єрного відбивання.

Енергетичний розподіл електронів при польовій емісії несе у собі велику кількість інформації про матеріал. Він показує, скільки електронів з певною енергією емітували у вакуум. Оскільки в основі польової емісії лежить квантовомеханічне тунелювання, електрони проходять через бар'єр у вакуум без втрати

I.I. Bekh, PhD, V.V. Il'chenko, Doct. Sci., Prof., Yu.M. Onyshchenko, student.

Calculation of energy distribution of the field emission electrons, emitted by the tungsten

The numerical calculation of the energy distribution of electrons emitted by the tungsten, for a triangular barrier and given the reflection images was done. It was shown that by using the direct decision of the Schrodinger equation at a constant electric field the energy distribution of electrons practically does not depend on temperature. While using the quasi-classical approximation for calculation of the transparency of potential barrier at constant electrical field strength, strong field dependence of electron energy distribution on temperature was observed

Key Words: field emission, tunneling, energy distribution.

енергії. Отже аналіз енергетичного розподілу дозволяє визначити внутрішню енергетичну структуру матеріалу.

У теорії автоелектронної емісії (теорія Фаулера-Нордгейма) [1] залежність прозорості потенціального бар'єру від кінетичної енергії електрона розраховувалась в квазікласичному наближенні методом Вентцеля-Крамерса-Брілюена з використанням "універсального" аналітичного виразу, де лише межі інтегрування (точки повороту) характеризують форму бар'єру. Проте з точного розв'язку рівняння Шредінгера [2] випливає, що навіть у випадку, коли енергія падаючої на потенціальний бар'єр частинки більша за висоту цього бар'єру, коефіцієнт її відбиття може відрізнятися від нуля.

Метою даної роботи є розрахунок енергетичного розподілу електронів, емітованих вольфрамом з використанням точного розв'язку рівняння Шредінгера для випадку трикутного потенціального бар'єру з урахуванням ефекту Шоттки.

Інструменти аналізу та фізична модель

Для розв'язання поставленої задачі була обрана система комп'ютерної алгебри "Mathematica 7.0".

Точність обчислень та використані константи

Для всіх числових оцінок, що проводяться в роботі було обрано точність розрахунків до дванадцятого значущого знаку.

В обчисленнях використовувалась система СІ. Фізичні сталі були взяті такими:
маса електрона, $m = 9.109 \cdot 10^{-31}$ кг;
заряд електрона, $e = -1.602 \cdot 10^{-19}$ Кл;
стала Планка, $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с;
стала Больцмана, $k_B = 1.381 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.
діелектрична проникність вакууму $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м

Фізична модель

Густина електронного струму істотно залежить від напруженості зовнішнього електричного поля, прикладеного до поверхні емітера. Залежність від поля випливає з того, що зовнішнє прискорююче поле, складаючись з полем сил зображення зменшує роботу виходу

матеріалу (ефект Шотткі); це ілюструє рис. 1, де зовнішнє поле вважається однорідним.

Розрахунок енергетичного розподілу електронів проводився у моделі Зоммерфельда. В рамках цієї моделі вираз для потоку електронів, що падають на межу тверде тіло вакуум з енергіями у інтервалі $(W_x; W_x + dW_x)$ має вигляд:

$$\frac{dY_x}{dW_x} = \frac{4\pi m k_B T}{h^3} \ln \left[1 + \exp \left(-\frac{W_x - W_f}{k_B T} \right) \right]. \quad (1)$$

Прозорість трикутного потенціального бар'єру з урахуванням сил зображення

• Наближення Вентцеля-Крамєра-Брілюєна (ВКБ)

Це так зване квазікласичне наближення у квантовій механіці [1]. Суть наближеного методу: знаходження хвильової функції та рівнів енергії квантової системи за умови, що довжина хвилі де Бройля частинок системи набагато менша характерних величин зміни потенціального бар'єра. В квазікласичному наближенні метод Вентцеля-Крамєра-Брілюєна використовує "універсальний" аналітичний вираз, де лише межі інтегрування (точки повороту) характеризують форму бар'єру:

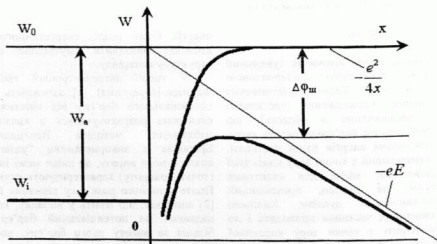


Рис. 1. Зниження роботи виходу зовнішнім прискорюючим полем.

W – енергія електрона; W_0 – висота потенціального бар'єру; W_f – рівень (енергія) Фермі;

$W_x = e\varphi = W_0 - W_f$ – робота виходу; $-\frac{e^2}{4x}$ – потенціал сил дзеркального відображення; eE – потенціал сил, діючих з боку зовнішнього поля; $\Delta\varphi_{sh}$ – пониження висоти потенціального бар'єру за рахунок ефекту Шотткі

$$D = D_0(W) \exp \left[-\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{W(x) - (W_0 - W_x)} dx \right] = D_0(W) \exp \left[-\frac{8\pi\sqrt{2qm}(W_0 - W)^{3/2}}{3\hbar E} \theta(W, E) \right], \quad (2)$$

де $\theta(W, E)$ - функція Нордгейма, що враховує пониження потенціального бар'єру по Шотткі [3], W_x - кінетична енергія електронів:

$$W(x) = -\frac{e^2}{4x} - eE \quad (3)$$

$$D_0 = \frac{16W}{W_0 \left(1 - \frac{W}{W_0}\right)} \quad (4)$$

• Точний розв'язок рівняння Шредінгера

Як відомо з літератури [4], наближення ВКБ справедливе, коли зміна довжини хвилі де Бройля, яка відповідає руху частинки в неоднорідному полі, буде малою на інтервалі шляху, що дорівнює цій довжині хвилі. Зазначена

умова порушується, коли нахил потенціалу змінюється дуже швидко, наприклад у випадку трикутного потенціального бар'єру. Для такого потенціалу нахил у будь-якій точці близький до нуля окрім точок розриву, де він прямує до нескінченності. Для того щоб розв'язати задачу знаходження прозорості такого бар'єру слід використовувати точний розв'язок рівняння Шредінгера в кожній області простору (всередині твердого тіла, всередині бар'єру, у вакуумі) і "зшити" отримані розв'язки на межах вказаних областей [4].

В результаті залежність прозорості потенціального бар'єру від кінетичної енергії електрона набуває вигляду:

$$D(W_x) = \begin{cases} \left[1 + \frac{W_0^2}{4W_x(W_0 - W_x)} \sinh^2[k_2 x(W_x)] \right]^{-1} & W_0 - \Delta\varphi_m > W_x, \\ \left[1 + \frac{mx^2(W_x)W_0}{2\hbar^2} \right]^{-1} & W_0 - \Delta\varphi_m = W_x, \\ \left[1 + \frac{W_0^2}{4W_x(W_0 - W_x)} \sin^2[k_3 x(W_x)] \right]^{-1} & W_0 - \Delta\varphi_m < W_x, \end{cases} \quad (5)$$

де:

$$k_2 = \sqrt{\frac{2m(W_0 - W_x - \Delta\varphi_m)}{\hbar^2}},$$

$$k_3 = \sqrt{\frac{2m(W_x - W_0 + \Delta\varphi_m)}{\hbar^2}},$$

$$x(W_x) = \frac{W_0 - \Delta\varphi_m - W_x}{eE}.$$

Об'єкт досліджень

Розрахунки проводилися для полікристалічного вольфраму з використанням таких параметрів: робота виходу $W_s = 4,56$ eВ, висота потенціального бар'єру $W_0 = 10,33$ eВ.

Результати числових обчислень та їхнє обговорення

На рис. 2 наведено залежності прозорості потенціального бар'єру трикутної форми висотою $W_0 = 10,33$ eВ від кінетичної енергії електронів, отримані з використанням точного розв'язку рівняння Шредінгера. Видно, що прозорість бар'єру досягає одиниці при енергії електронів, яка перевищує значення висоти потенціального бар'єру і надалі, в обмеженому діапазоні енергій, є одиницею лише для електронів із певними значеннями кінетичної енергії.

В цьому і полягає основна відмінність у ході залежності прозорості потенціального бар'єру від кінетичної енергії електронів при переході від розрахунку в квазікласичному наближенні методом Вентцеля-Крамєра-Брілюєна до точного розв'язку рівняння Шредінгера [2].

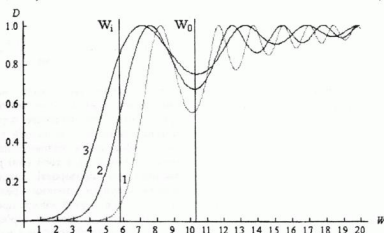


Рис. 2. Прозорість трикутного потенціального бар'єру, як функція від кінетичної енергії електронів при різних напруженостях електричного поля: 1 – $E=3 \cdot 10^9$ В/м; 2 – $E=5 \cdot 10^9$ В/м; 3 – $E=7 \cdot 10^9$ В/м

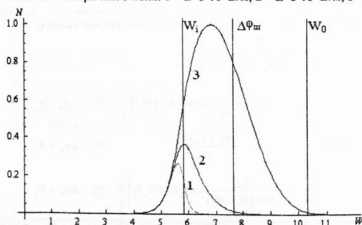


Рис. 3. Розподіл кількості електронів, емітованих вольфрамом, за енергіями, отриманий у наближенні ВКБ при напруженості поля $E=5 \cdot 10^9$ В/м та температурах: 1 – $T=1000$ К; 2 – $T=2000$ К; 3 – $T=3000$ К

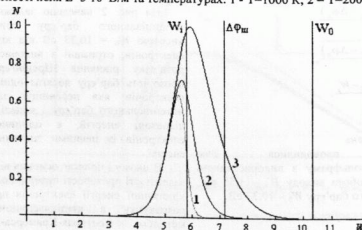


Рис. 4. Розподіл кількості електронів, емітованих вольфрамом, за енергіями, отриманий у наближенні ВКБ при напруженості поля $E=7 \cdot 10^9$ В/м та температурах: 1 – $T=1000$ К; 2 – $T=2000$ К; 3 – $T=3000$ К

На рис. 3 та рис. 4 наведено енергетичні розподіли електронів, емітованих вольфрамом, розраховані з використанням наближення ВКБ при напруженості електричного поля $5 \cdot 10^9$ В/м і $7 \cdot 10^9$ В/м для трьох різних температур. Отримані результати співпадають з наведеними в [1]. Зі збільшенням температури кількість електронів, що емітує тверде тіло, істотно зростає, і максимум піку зсувається в бік вищих енергій.

Подібна поведінка енергетичного розподілу кількості електронів, емітованих вольфрамом, розрахованого у наближенні ВКБ, спостерігається і при інших значеннях

напруженості електричного поля. При зниженні напруженості електричного поля спостерігається більш сильна різниця абсолютних значень кількості електронів при різних температурах, а збільшення напруженості електричного поля призводить до того, що вплив температури на енергетичний розподіл електронів слабшає.

На рис. 5 та рис. 6 наведено енергетичні розподіли електронів, емітованих вольфрамом, розраховані з використанням точного розв'язку рівняння Шредінгера. Порівняльний аналіз залежностей, розрахованих за тих же зовнішніх умов показує, що при використанні точного

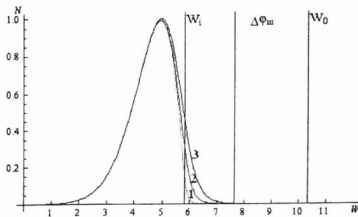


Рис. 5. Розподіл кількості електронів, емітованих вольфрамом, за енергіями, розрахований із використанням точного розв'язку рівняння Шредінгера при напруженості поля $E = 5 \cdot 10^9$ В/м та температурах: 1 - $T = 1000$ К; 2 - $T = 2000$ К; 3 - $T = 3000$ К

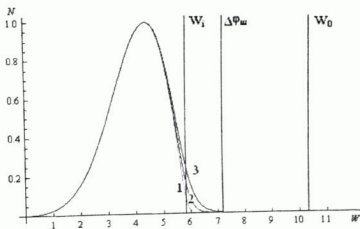


Рис. 6. Розподіл кількості електронів, емітованих вольфрамом, за енергіями, розрахований із використанням точного розв'язку рівняння Шредінгера при напруженості поля $E = 7 \cdot 10^9$ В/м та температурах: 1 - $T = 1000$ К; 2 - $T = 2000$ К; 3 - $T = 3000$ К

розв'язку рівняння Шредінгера залежність енергетичного розподілу кількості електронів від температури дуже слабка, спостерігається лише незначний зсув максимуму піку в бік вищих енергій при підвищенні температури. Подібні результати мають місце і при інших напруженостях електричного поля.

Висновки

При використанні точного розв'язку рівняння Шредінгера для обчислення прозорості бар'єру трикутної форми з врахуванням ефекту Шотткі остання досягає одиниці при енергії електронів, яка перевищує значення висоти потенціального бар'єру, і, надалі, в обмеженому діапазоні енергій, є одиницею лише для певних значень кінетичної енергії електронів.

Список використаних джерел

1. Елинсон М.И., Васильев Г.Ф. Автоэлектронная эмиссия. / — М.: "Государственное издательство физико-математической литературы",— 1958. — 274с.
2. Борисенко В.Е., Воробьева А.И., Уткина Е.А. Нанoeлектроника. / М. — БИНОМ.

Отримані результати показують, що у випадку використання квазікласичного наближення для розрахунку прозорості потенціального бар'єру спостерігається сильна залежність розподілу електронів, емітованих твердим тілом, від температури при постійній напруженості електричного поля. А при використанні точного розв'язку рівняння Шредінгера енергетичний розподіл електронів при постійній напруженості електричного поля практично не залежить від температури.

Використання точного розв'язку рівняння Шредінгера для обчислення прозорості потенціального бар'єру на межі тверде тіло – вакуум дозволяє глибше проаналізувати тунельні явища та прогнозувати ефекти, які не можуть бути отримані при використанні наближення Вентцеля-Крамєрс-Брілюєна.

Лаборатория знаний, — 2009. — 223 с.: - (Нанотехнология).

3. Добрецов Л.Н., Гомоюнова М.В. Эмиссионная электроника / — М.: Наука, 1966. — 564 с.
4. Бом Д. Квантовая теория. / Пер. с англ. Л.А. Шубиной. 2 издания: 2-ое, испр. — М.: Наука, 1965. — 727 с.

Надійшла до редколегії 01.10.2011

УДК 535.375

Іванісік А. І., к.ф.-м.н., доц., Ісаєнко* О. Ю.,
аспірант, Коротков П. А., д.ф.-м.н., проф.,
Понежа Г. В., к.ф.-м.н., с. н. с.**Випромінювання черенковського типу
при антистоксовому вимушеному
комбінаційному розсіюванні з рухомої
фокальної області самофокусування**

Проведено аналіз впливу швидкості руху фокальної області на частотно-кутову структуру випромінювання антистоксової компоненти вимушеного комбінаційного розсіювання при фазовій самомодуляції лазерних імпульсів у самофокусуємих рідинах. Врахована фазова самомодуляція антистоксового випромінювання. Пояснено формування протяжних частотно-кутових дуг антистоксової компоненти. У випадку збігання швидкості фокальної області з фазовою швидкістю антистоксової нелінійної поляризації на комбінаційній частоті генерується випромінювання черенковського типу.

Ключові слова: вимушене комбінаційне розсіювання світла, самофокусування, фазова самомодуляція, випромінювання черенковського типу.

*E-mail: o_isaenko@bigmir.net

Статтю представив д. ф.-м. н. Скришевський В. А.

Вступ

При самофокусуванні (СФ) внаслідок зміни миттєвої потужності лазерного імпульсу фокальна точка рухається зі швидкістю, яка не обмежена швидкістю світла у вакуумі [1]. Рух фокальної точки безпосередньо впливає на перебіг нелінійних оптичних процесів, у самофокусуємої середовищі, зокрема, на вимушене комбінаційне розсіювання світла (ВКР). У [3] було теоретично показано, що частота антистоксової компоненти (АК) у ВКР-активних самофокусуємих рідинах залежить від швидкості фокальної точки навіть у наближенні "ідеальної тонкої лінії", коли зміна миттєвої потужності лазерного імпульсу, веде лише до зміни фокусної відстані наведеної лінії. Реальна наведена лінія в самофокусуємої середовищі змінює також і свою товщину, що веде до фазової самомодуляції (ФС) лазерного випромінювання. Експериментально та теоретично спектр самомодульованих лазерних імпульсів наносекундного діапазону

A. I. Ivanisik, Ph.D., As.Prof., O. Iu. Isaenko, post-graduate student, P. A. Korotkov, Dr.Sci., Prof., G. V. Ponezha, Ph.D., principal research associate

**Cherenkov-type Radiation under Stimulated
Raman Scattering in Moving Self-focusing
Focal Area**

This study provides analysis of the focal area velocity impact on the frequency-angular structure of anti-Stokes radiation component in stimulated Raman scattering under self-phase modulating laser pulses in self-focusing liquids. Self-phase modulation of the anti-Stokes component is taken into account. Formation of extended anti-Stokes component frequency-angular arcs is explained. In the case when focal area velocity matches the phase velocity of anti-Stokes nonlinear polarization on the combination frequencies Cherenkov-type Radiation is generated.

Key words: stimulated Raman scattering, self-focusing, self-phase modulation, Cherenkov-type radiation.

тривалості досліджено в [4]. При перетині фокальною точкою вихідної межі середовища на фронті лазерного імпульсу стоксові спектральні розширення лазерного випромінювання сягають $\sim 100 \text{ см}^{-1}$, що інтерпретовано в термінах перехідного ефекту. Очевидно, що спектральні розширення лазерного випромінювання мають вести і до деякого розширення спектрів ВКР, оскільки ВКР переважно відбувається у фокальних областях [5]. З іншого боку, відомо, що в частотно-кутових спектрах антистоксових компонент ВКР спостерігаються частотно-кутові $\omega(\theta)$ смуги різної спектральної протяжності. Найбільш характерними є частотно-кутові смуги у вигляді параболоподібних дуг, які формально описуються умовою черенковського випромінювання [6]: $\cos\theta = v_{ph}(\omega)/v_p(\omega_s)$, де v_{ph} – фазова швидкість електромагнітної хвилі

на частоті ω , яка поширюється під кутом θ , v_p – фазова швидкість нелінійної поляризації на антистоксовій комбінаційній частоті ω_a .

Непоясненим залишився зв'язок між швидкістю фокальної точки, ФС лазерного випромінювання та утворенням конусного випромінювання черенковського типу, яке на частотно-кутових спектрах реєструється як дуги, характерні тим, що їхні частотні зсуви (сотні см^{-1} відносно комбінаційних антистоксових частот) при нульовому куті розсіяння не співпадають і не кратні частотам ВКР-активних молекулярних коливань. У даній роботі пропонується пояснення фізичного механізму утворення широкопasmового антистоксового випромінювання черенковського типу у ВКР-активних самофокусуємих рідинах.

Актуальність роботи обумовлена перспективністю поєднання можливостей ВКР, як ефективного методу перестроювання частоти лазерного випромінювання, та можливостей СФ, як методу просторового сканування потужними згустками електромагнітного поля із довільною швидкістю, для створення джерел когерентного випромінювання зі специфічними характеристиками.

Теоретичний розгляд

Джерелом випромінювання АК ВКР є хвиля $P^{NL}(t, r)$ нелінійної поляризації середовища. Інтенсивність АК залежить як від просторово-часового розподілу амплітуди, так і фази цієї хвилі, оскільки необхідним є фазове узгодження з полем антистоксового випромінювання. Частотно-кутова густина енергії $W_{\omega\theta}$ АК у дальньому полі для невеликих кутів розсіяння θ визначається формулою [3]:

$$W_{\omega\theta} = \frac{\omega^4 n_{\omega}}{8\pi^2 c^3} \left| \int_V dV \int_{-\infty}^{\infty} P^{NL}(t, r) \exp[i(\omega t - kr)] dt \right|^2, \quad (1)$$

де \mathbf{k} – хвильовий вектор розсіяного випромінювання з модулем $k = n\omega/c$ на частоті ω , $n = n(\omega)$ – показник заломлення, c – швидкість світла у вакуумі, t – час, \mathbf{r} – радіус-вектор, який сполучає початок системи координат з довільною точкою об'єму V , де існує нелінійна поляризація середовища. Фізичний зміст формули (2) полягає у розкладанні поляризації в кожній точці простору на неперервну за частотою сукупність монохроматичних точкових джерел

випромінювання з подальшим сумуванням поля випромінювання від цих джерел за просторовими координатами з урахуванням фази самих джерел і поля випромінювання, яке надходить у точку спостереження.

Для виконання розрахунків частотно-кутової густини енергії (1), необхідно визначити просторово-часову залежність $P^{NL}(t, r)$ в умовах СФ і ФС.

Вважатимемо, що за нехтування СФ і ФС лінійно поляризоване збуджуюче лазерне випромінювання за хвильовим вектором \mathbf{k}_L (у середовищі) і частотою ω_L поширюється вздовж осі z та має фазу $\varphi_L = \omega_L t - k_L z$. У тому ж напрямі поширюється і збуджена лазером стоксова комбінаційна компонента ВКР із хвильовим вектором \mathbf{k}_s та частотою ω_s . Ці дві хвилі породжують кубічну поляризацію середовища на антистоксовій комбінаційній частоті $\omega_a = 2\omega_L - \omega_s$ із хвильовим вектором $\mathbf{k}_{ap} = 2\mathbf{k}_L - \mathbf{k}_s$. Оскільки \mathbf{k}_L і \mathbf{k}_s мають однаковий напрямок, то вектор \mathbf{k}_{ap} теж спрямований уздовж осі z і його модуль $k_{ap} = 2k_L - k_s$.

У випадку СФ внаслідок збільшення Δl показника заломлення модуль k_L зростає на величину $\Delta k_L = k_L \Delta n / n$ і створюється фазова затримка $\delta\varphi_L(t, z)$ лазерного випромінювання: $\varphi_L = \omega_L t - k_L z - \delta\varphi_L(t, z)$. Затримка залежить від інтенсивності випромінювання та відстані, а отже, часу t і координати z та визначається виразом:

$$\delta\varphi_L(t, z) = \int_{-L/2}^z \Delta k_L(t, \zeta) d\zeta. \quad (2)$$

В (2) прийнято, що ВКР-активне самофокусуєме середовище розташоване в області $-L/2 \leq z \leq L/2$, ζ – поточна координата інтегрування на шляху між вхідною межею середовища і точкою z , в якій розглядається фаза. Затримку $\delta\varphi_L$ можна розрахувати достатньо точно, що і було зроблено в [4]. У даному випадку для приросту $\Delta k_L(t, \zeta)$ модуля хвильового вектора лазерного випромінювання внаслідок збільшення показника заломлення в кожній проміжній точці ζ на шляху $-L/2 \leq z$ використаємо наближення:

$$\Delta k_L(t, \zeta) = \Gamma_f \exp \left[- \left(\zeta - v_{fp} \left(t - \frac{z - \zeta}{v_g} \right) \right)^2 / b^2 \right], \quad (3)$$

де Γ_f – максимальний приріст Δk_L в центрі фокальної області (у фокальній точці), v_{fp} – швидкість фокальної точки з координатою $z_f = v_{fp}t$ (припускаємо, що швидкість є сталою і $z_f(t=0) = 0$), v_g – групова швидкість світла на частоті лазерного випромінювання, b – ефективна довжина фокальної області. Вираз (3) відображає ту ситуацію, що деякий часовий фрагмент лазерного імпульсу, який в момент t перебуває в точці z , був у точці ζ в момент $t' = t - (z - \zeta)/v_g$. В цей момент координата фокальної точки становила $z'_f = v_{fp}t' = v_{fp}(t - (z - \zeta)/v_g)$. Відповідно відстань між фрагментом і фокальною точкою була $\zeta - z'_f = \zeta - v_{fp}(t - (z - \zeta)/v_g)$. Це при гаусовому розподілі показника заломлення в фокальній області дає шуканий вираз (3) для $\Delta k_L(t, \zeta)$.

Фокальна область утворюється поблизу вихідної межі середовища. За умови $L \gg b$ поблизу вхідної межі $\Delta k_L(t, \zeta) \approx 0$. Отже в (2) нижню межу інтегрування можна замінити на $-\infty$.

ВКР переважно відбувається в центрі фокальної області СФ. Тому важливою є поведінка фази збуджуючого лазерного випромінювання саме в фокальній точці. Для фокальної точки підстановка $z = v_{fp}t$ або $t = z/v_{fp}$ у (2), (3) дає:

$$\delta\varphi_L(t, z = v_{fp}t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} b \Gamma_f \left| \frac{1}{1 - v_{fp}/v_g} \right|, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \delta\varphi_L}{\partial t} \Big|_{z=v_{fp}t} = -\Gamma_f \frac{v_{fp}}{1 - v_{fp}/v_g}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \delta\varphi_L}{\partial z} \Big|_{z=v_{fp}t} = \Gamma_f \frac{1}{1 - v_{fp}/v_g}. \quad (6)$$

Отже, з урахуванням СФ і ФС у фокальній точці частота ω_{Lf} лазерного випромінювання змінюється і становить:

$$\omega_{Lf} = \frac{\partial(\varphi_L)}{\partial t} \Big|_{z=v_{fp}t} = \omega_L + \Gamma_f \frac{v_{fp}}{1 - v_{fp}/v_g}, \quad (7)$$

а модуль хвильового вектора

$$k_{Lf} = -\frac{\partial(\varphi_L)}{\partial z} \Big|_{z=v_{fp}t} = k_L + \Gamma_f \frac{1}{1 - v_{fp}/v_g}. \quad (8)$$

В околі фокальної точки, використовуючи перші похідні і лінійну апроксимацію, для фазової затримки маємо:

$$\begin{aligned} \delta\varphi_L(t, z) &= \delta\varphi_L(t, z_f = v_{fp}t) + \frac{\partial \delta\varphi_L}{\partial t} \Big|_{z=v_{fp}t} (t - z_f/v_{fp}) + \\ &+ \frac{\partial(\varphi_L)}{\partial z} \Big|_{z=v_{fp}t} (z - z_f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} b \Gamma_f \left| \frac{1}{1 - v_{fp}/v_g} \right| - \\ &- \Gamma_f \frac{v_{fp}}{1 - v_{fp}/v_g} t + \Gamma_f \frac{1}{1 - v_{fp}/v_g} z. \end{aligned} \quad (9)$$

Фазова самомодуляція лазерного випромінювання переноситься на фазу φ стоксової компоненти [2]. Тому фаза φ_{ap} нелінійної поляризації $P^{NL} = P_0^{NL} \exp(-i\varphi_{ap})$ середовища на антистоксовій частоті можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} \varphi_{ap} &= 2\varphi_L - \varphi_s = 2(\omega_L t - k_L z - \delta\varphi_L) - \\ &- (\omega_s t - k_s z - \delta\varphi_s) = \omega_s t - k_s z - \delta\varphi_s. \end{aligned} \quad (10)$$

Проте необхідно враховувати, що між фокальною точкою та вихідною межею середовища також є зміна показника заломлення. Випромінені поляризацією хвилі на частоті ω змінюють свою фазу на деяку величину $\delta\varphi_m(t, z)$, яка залежить від координати випромінюючого джерела та часу. Аналогічно до того, як отримана $\delta\varphi_L(t, z)$, для $\delta\varphi_m(t, z)$ можна записати:

$$\delta\varphi_m(t, z) = \int_z^{L/2} \Delta k_m(t, \zeta) d\zeta,$$

$$\Delta k_m = \Gamma_f \exp \left[- \left(\zeta - v_{fp} \left(t - \frac{z - \zeta}{v_{ph}} \right) \right)^2 / b^2 \right]. \quad (11)$$

Відмінність полягає лише в тому, що замість групової швидкості v_g світла на частоті лазерного випромінювання, з якою рухався

часовий фрагмент лазерного імпульсу, фігурує фазова швидкість $v_{ph}(\omega)$ випромінених хвиль на частоті ω та змінені межі інтегрування. Вирази (11) враховують, що деякий фазовий фронт, який в момент t вийшов з точки z , буде в точці ζ , яка розташована на шляху від z до вихідної межі середовища з координатою $L/2$, в момент $t'' = t + (\zeta - z)/v_{ph}$. В цей момент координата фокальної точки становитиме $z_f'' = v_{gr} t'' = v_{gr} (t + (\zeta - z)/v_{ph})$. Відстань між вказаним фазовим фронтом і фокальною точкою буде $\zeta - z_f'' = \zeta - v_{gr} (t + (\zeta - z)/v_{ph}) = \zeta - v_{gr} \cdot (t - (z - \zeta)/v_{ph})$ і вона визначає показник заломлення у точці ζ .

Для джерел у фокальній точці, де амплітуда поляризації максимальна, фазова затримка $\delta\varphi_\omega$ становить:

$$\delta\varphi_\omega|_{t=z_f/v_{gr}} = \Gamma_f \int_{z_f}^{L/2} \exp \left[-(\zeta - z_f)^2 \left(1 - \frac{v_{gr}}{v_{ph}} \right)^2 / b^2 \right] d\zeta. \quad (12)$$

Вираз (12) показує, що $\delta\varphi_\omega$ на відміну від $\delta\varphi_L$ залежить від координати фокальної точки і має певну особливість для швидкостей $v_{gr} = v_{ph}$. Якщо досліджувати поведінку $\delta\varphi_\omega$ в області $v_{gr} \approx v_{ph}$, то можна використати інтерполяцію $\exp[-x^2] \approx 1 - x^2$ і отримати аналітичний вираз для $\delta\varphi_\omega$ у фокальній точці:

$$\delta\varphi_\omega|_{t=z_f/v_{gr}} = \Gamma_f \left[(L/2 - z_f) - (L/2 - z_f)^3 (1 - v_{gr}/v_{ph})^2 / 3b^2 \right]. \quad (13)$$

За аналогічних припущень для похідних:

$$\frac{\partial(\delta\varphi_\omega)}{\partial t} \Big|_{t=z_f/v_{gr}} = \frac{\Gamma_f v_{gr}}{b^2} \left(\frac{L}{2} - z_f \right) \left(1 - \frac{v_{gr}}{v_{ph}} \right), \quad (14)$$

$$\frac{\partial(\delta\varphi_\omega)}{\partial z} \Big|_{t=z_f/v_{gr}} = -\Gamma_f \left[1 + \frac{v_{gr}}{v_{ph} b^2} \left(\frac{L}{2} - z_f \right)^2 \left(1 - \frac{v_{gr}}{v_{ph}} \right) \right]. \quad (15)$$

В околі фокальної точки ($z \approx z_f$), використовуючи перші похідні, лінійну апроксимацію та нехтуючи членами пропорційними $(1 - v_{gr}/v_{ph})^2$, фазову затримку $\delta\varphi_\omega$ можна подати у вигляді:

$$\delta\varphi_\omega = \Gamma_f \left[L/2 + (v_{gr} (L/2 - z)^2 (1 - v_{gr}/v_{ph}) / b^2) t - \left(1 + \frac{v_{gr}}{v_{ph}} (L/2 - z)^2 (1 - v_{gr}/v_{ph}) / b^2 \right) z \right]. \quad (16)$$

З точністю до постійних членів фаза φ_{op} нелінійної поляризації з урахуванням обох фазових затримок $\delta\varphi_L$, $\delta\varphi_\omega$ і корекцією $k_{op} \rightarrow k_{op} + \Gamma_f$ (збільшення модулів хвильових векторів k_L і k_ω у фокальній точці внаслідок СФ, але без ФС) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \varphi_{op} &= \omega_\omega t - k_{op} z - \delta\varphi_L - \delta\varphi_\omega = \\ &= \left(\omega_\omega + \Gamma_f \frac{v_{gr}}{1 - v_{gr}/v_{ph}} - \Gamma_f v_{gr} \frac{(L/2 - z)^2 (1 - v_{gr}/v_{ph})}{b^2} \right) t - \\ &- \left(k_{op} + \Gamma_f \frac{1}{1 - v_{gr}/v_{ph}} - \Gamma_f \frac{v_{gr} (L/2 - z)^2 (1 - v_{gr}/v_{ph})}{b^2} \right) z. \end{aligned} \quad (17)$$

Припустимо, що амплітуда P_0^{NL} поляризації досягає максимального значення у фокальній точці, а розподіл амплітуди є гаусовим із напівшириною b на рівні e^{-1} по осі z і напівшириною a_f по x та y . Тоді для амплітуди поляризації маємо:

$$P_0^{NL} = P_{0,max}^{NL} \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{a_f^2} - \frac{(z - v_{gr} t)^2}{b^2} \right]. \quad (18)$$

Швидкий спад амплітуди поляризації за віссю z при віддаленні від точки z_f дає змогу використовувати лінійну апроксимацію (17) для затримки фази, оскільки похибка у визначенні фази поляризації нівелюється її малою амплітудою.

Підставляючи $P^{NL} = P_0^{NL} \exp(-i\varphi_{op})$ в (1), після аналітичного інтегрування по t , x , y для кута $\theta = 0$ отримуємо вираз, у якому необхідно виконати інтегрування лише по z :

$$W_{\text{об}} = \frac{\pi \omega^4 a_f^2 b^2 L^2}{4 v_{fp}^2 c^3} P_{0, \text{max}}^{NL} \left[\int_{-L/2}^{L/2} \exp \left[-\frac{b^2}{4 v_{fp}^2} (\omega - \omega_a - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\Gamma_f v_{fp}}{1 - v_{fp}/v_s} + \frac{\Gamma_f v_{fp}}{b^2} \left(\frac{L}{2} - z \right)^2 \left(1 - \frac{v_{fp}}{v_{ph}} \right) \right) \right] - \right. \\ \left. - i \left[k - k_{\text{сп}} - \frac{\omega - \omega_a}{v_{fp}} - \frac{\Gamma_f}{b^2} \left(\frac{L}{2} - z \right)^2 \left(1 - \frac{v_{fp}}{v_{ph}} \right)^2 z \right] dz \right]^2$$

Подальші розрахунки частотно-кутової густини енергії можна виконати лише чисельно.

Результати розрахунків

Розрахунки виконувалися для випадку збудження ВКР у толуюлі. Використані дані про залежність $n(\omega)$ з роботи [7]. Вважалося, що комбінаційний зсув частоти в толуюлі $(\omega_a - \omega_i)/2\pi c = 1004 \text{ см}^{-1}$, $a_f = 5 \text{ мкм}$. Значення Γ_f вибиралося оптимальним для кожної зі швидкостей фокальної області, тобто таким, яке забезпечує максимальну ефективність генерації антистоксової компоненти. Типове значення $\Gamma_f = 40 \text{ см}^{-1}$.

На рис. 1 подано залежність пікової густини енергії $W_{\text{об}}^{(\text{max})}$ осьового антистоксового випромінювання від швидкості фокальної області для $b = 0,1 \text{ см}$ та різних значень L : а) $L = 1 \text{ см}$, б) $L = 2 \text{ см}$, в) $L = 3 \text{ см}$. Густина енергії наведено у відносних одиницях. Відображені криві на графіку наведено у змінному масштабі, при цьому самі абсолютні значення енергій для вказаних L (1, 2, 3 см) приблизно співвідносяться як 1:15:40, відповідно.

Максимум $W_{\text{об}}^{(\text{max})}$ припадає на швидкість фокальної області $v_{fp} = 0,67c$, де c – швидкість світла у вакуумі. Навіть невеликі відхилення від цієї швидкості призводять до суттєвого зменшення густини енергії. У випадку зростання довжини L ділянки самофокусуєного середовища, яку пробігає фокальна область, спостерігається звуження діапазону допустимих швидкостей.

Швидкість фокальної області визначає частотне розташування піку енергії антистоксового випромінювання у спектрі. На рис. 2 показана залежність величини пікової густини енергії (у відносних одиницях) від

частотного зсуву $(\omega - \omega_a)/2\pi c$ відносно комбінаційної антистоксової частоти.

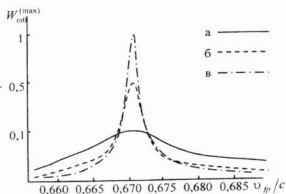


Рис. 1 Залежність пікової густини енергії випромінювання осьової АК від швидкості руху фокальної області v_{fp} для $b = 0,1 \text{ см}$ та різних значень L : а) $L = 1 \text{ см}$, б) $L = 2 \text{ см}$, в) $L = 3 \text{ см}$.

Максимальне значення пікової густини енергії має спостерігатися на частоті випромінювання, фазова швидкість якого збігається зі швидкістю фокальної області: $v_{ph} = v_{fp} = 0,67c$, $(\omega - \omega_a)/2\pi c = -197 \text{ см}^{-1}$.

На рис. 3 зображено залежність ширини спектра АК від швидкості руху фокальної області. Мінімальна ширина спектра реалізується у випадку $v_{fp} = 0,67c$ і складає близько $2,5 \text{ см}^{-1}$ за значення $L = 1 \text{ см}$ та $b = 0,1 \text{ см}$.

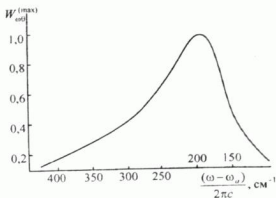


Рис. 2 Залежність пікової густини енергії випромінювання осьової АК від частотного зсуву для $b = 0,1 \text{ см}$ та $L = 1 \text{ см}$.

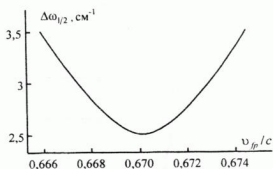


Рис. 3 Залежність ширини спектра випромінювання від швидкості руху фокальної області ($b = 0,1$ см та $L = 1$ см).

Для швидкості $v_{fp} = 0,67c$ спектр осової АК подано на рис. 4. Максимум енергії припадає на частоту $(\omega - \omega_a) / 2\pi c = -197$ см⁻¹.

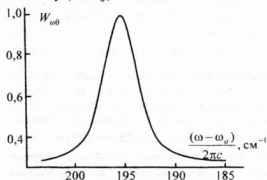


Рис. 4 Спектр випромінювання осової АК.

Висновки

Аналіз результатів роботи показує, що густина енергії АК суттєво залежить від швидкості руху фокальної області. У діапазоні, де швидкість є близькою до фазової швидкості світла, спостерігається чіткий максимум, який реалізується для швидкості фокальної області, рівній фазовій швидкості світла на частоті нелінійної поляризації у фокальній точці і фазовій швидкості самої поляризації.

Лише у цьому випадку ФС лазерного випромінювання, яке попадає в фокальну точку, зміщує частоту нелінійної поляризації, але не впливає на її фазову швидкість – фазова швидкість поляризації залишається такою ж, як і за відсутності СФ. З іншого боку, ФС випромінювання АК на виході з фокальної області не впливає ні на частоту, ні на фазову швидкість випромінювання.

Важливою обставиною, що веде до

зменшення енергії за інших швидкостей, є залежність зміщення частоти антистоксового випромінювання (внаслідок ФС на виході з середовища) від розташування фокальної точки.

Максимальна густина енергії осового випромінювання АК припадає на частоту, яка визначається умовою, подібною до умови виникнення черенковського випромінювання: рівність фазової швидкості електромагнітної хвилі на частоті ω фазовій швидкості нелінійної поляризації на антистоксовій комбінаційній частоті ω_a . Для толуолу зміщення частоти становить $(\omega - \omega_a) / 2\pi c = -197$ см⁻¹.

Список використаних джерел

1. Шен И. Р. Принципы нелинейной оптики / И. Р. Шен. – Москва: Наука, 1989. – 560 с.
2. Сухоруков А. П. Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике / А. П. Сухоруков. – Москва: Наука, 1988. – 232 с.
3. Иванисик А. И. Спектр антистоксового вынужденного комбинационного рассеяния из движущихся фокальных областей самофокусировки / А. И. Иванисик, Г. В. Понежа // Опт. и спек. – 2001. – 90, №4. – С. 699-703.
4. Dudka S. O. Transition Effect at the Medium – Vacuum Interface under the Self-phase Modulation of a Light Pulse / S. O. Dudka, A. I. Ivanisik, A. V. Konopatskiy, P. A. Korotkov // Ukrainian Journal of Physics. – 2006. – 51, N 2. – P. 140 – 146.
5. Иванисик А. И. Пространственно-угловая структура антистоксового излучения при вынужденном комбинационном рассеянии света в керровской жидкости / А. И. Иванисик, В. И. Малый, Г. В. Понежа // Опт. и спек. – 1996. – 80, №2. – С. 212 – 217.
6. Иванисик А. И., Малый В. И., Понежа Г. В. Излучение черенковского типа при вынужденном комбинационном рассеянии света в самофокусирующих жидкостях / А. И. Иванисик, В. И. Малый, Г. В. Понежа // Опт. и спек. – 1997. – 82, №3. – С. 447 – 453.
7. Иванисик А. И. Измерения показателя преломления органических жидкостей в видимой области спектра / А. И. Иванисик, В. И. Малый, Г. В. Понежа. – Киев: Деп. в УкрНИИТИ, 1985. – 7с.

Надійшла до редколегії 25.12.11

УДК 620.18:546.28

Находкін М.Г., акад. НАНУ, доктор ф.-м. наук,
Куліш М.П., чл.-кор. НАНУ, доктор ф.-м. наук,
Родіонова Т.В., канд. ф.-м. наук,

Перетворення фасетування на вершинах двійників всередині зерен полікремнієвих плівки

Методом просвічуючої електронної мікроскопії досліджено перетворення фасетування в зернах полікремнієвих плівок, що отримані методом хімічного осадження в реакторі зниженого тиску. Встановлено, що на вершинах двійників мають місце три типа перетворень фасетування. При температурі відпалювання 1200°C спостерігалась некубічна фасетка 82°9R.

Ключові слова: полікремнієві плівки, вершини двійників, перетворення фасетування.

Nakhodkin N.G., acad. of NAS of Ukraine, Dr. Sci.,
Kulish N.P., Corresp. Member of NAS of Ukraine,
Dr.Sci., Rodionova T.V., Ph.D.,

Faceting transitions in twin tips in the interior of grains in polysilicon films

The faceting transitions of twin tips in the interior of grains in polysilicon films, produced by low-pressure chemical vapor deposition has been investigated by transmission electron microscopy. It has been shown that there three kinds of faceting transition that take place in twin tips. The non-cubic facet 82°9R has been observed at annealed temperature 1200°C.

Key Words: polysilicon films, twin tips, faceting transition

*E-mail: rodtv@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

Вступ

Широке застосування кремнію в сонячній енергетиці викликає необхідність детального дослідження його структури, оскільки вона визначає електрофізичні характеристики та надійність кремнієвих сонячних елементів [2-6]. На сьогодні на долю кремнієвих сонячних батарей батарей приходить 90% ринка фотогальванічних елементів. Кремнієві батареї бувають декількох типів: монокристалічні, полікристалічні та аморфні. Перші мають найбільший коефіцієнт корисної дії (ккд). Для комерційних зразків він звичайно становить 15%, а в лабораторних умовах – до 25%. Але такі батареї мають велику вартість, оскільки в них використовується надчистий напівпровідник. Полікристалічні батареї дешевші, але внаслідок дефектності кристалічної структури їх ккд помітно нижчий. Сонячні батареї на основі аморфного кремнію дешевше, ніж кремнійкристалічні, оскільки використовується значно менше матеріалу. Проте їх ккд малий, всього 8% [5]. У зв'язку з цим актуальними є дослідження, що спрямовані на підвищення ефективності та зниження вартості сонячних елементів.

Зменшити вартість сонячних батарей можливо, якщо застосовувати більш дешеві матеріали та процеси виробництва. А щоб підвищити ефективність батарей, необхідно покращити їх здатність поглинати та перетворювати в електрику як можна більше світла, що падає.

З точки зору підвищення ефективності полі кремнієвих матеріалів актуальними є дослідження, що спрямовані на вдосконалення їх структури. Зокрема, оскільки характер дефектної структури зерен полікремнію визначає рівномірність розподілу легуючих домішок в плівці, що, в свою чергу, визначає стабільність фотогенераційних властивостей плівок та створення ефективних шляхів транспорту носіїв заряду [3], велике значення мають дослідження явищ на границях поділу всередині зерен, зокрема, фасетування вершин двійникових прошарків.

В даній роботі методами просвічуючої електронної мікроскопії та атомної силової мікроскопії досліджено зернограничні перетворення фасетування в зернах полікремнієвих плівок, що леговані фосфором, при відпалюванні.

Методика

Плівки полікристалічного кремнію отримували методом хімічного осадження з газової фази в реакторі зниженого тиску на підкладки Si(100) із шаром окислу SiO₂ товщиною ~ 100 нм. Товщина плівок складала 500 нм. Температура осадження - 630°C. Плівки легували фосфором шляхом термодифузії. Рівень легування - 10²¹см⁻³. Зразки відпалювали в атмосфері N₂ в інтервалі температур 1040-1200°C на протязі 30 хвилин. Інтервал температур відпалювання був вибраний на основі попередніх досліджень [7,8], оскільки саме за цих температур має місце зміна структури плівок, зокрема, ріст зерен та перебудова двійникової структури всередині зерен.

Для дослідження структури методом просвічуючої електронної мікроскопії (ПЕМ), плівки стоншували у площині підкладки (шляхом хімічного травлення в суміші HF:HNO₃ (1:5)).

Результати та обговорення

Як показали попередні дослідження [9,10,16-18], в полікремнієвих плівках процеси фасетування відбуваються як на границях зерен, так і на внутрішніх границях всередині зерен, зокрема, на вершинах двійникових прошарків в зернах. Фасетування границь зерен в легованих фосфором полікремнієвих плівках в залежності від температури відпалювання було досить детально досліджено в роботах [9,16-18]. Зокрема, було показано, що на границях зерен мають місце зернограничні перетворення фасетування. Що стосується фасетування вершин двійників всередині зерен полікремнієвих плівок, воно детально не досліджувалося. В роботі [10] було визначено декілька різновидів фасеток, які спостерігаються на вершинах двійникових прошарків, але процесів зернограничних перетворень проаналізовано не було. В той же час багато таких досліджень проводилось для металів і було встановлено, що на вершинах двійників мають місце декілька типів перетворень фасетування [1,11-13]: 1 – обернений перехід огранювання-втрата огранки границі при підвищенні температури та дисоціація гладкої неограненої границі зерен на фасетки при зниженні температури; 2 – дисоціація вихідної плоскої границі зерен на плоскі фасетки, енергія яких менша, ніж енергія вихідної границі; 3 – зернограничний перехід фасетування, при якому одна фасетка замінюється іншою; 4 – перетворення криволінійної границі в огранену при підвищенні

температури. Останнє перетворення спостерігалось в Zn [13].

Аналіз ПЕМ-зображень показав, що двійникові прошарки в зернах полікремнію розташовані перпендикулярно до поверхні плівки та мають однорідну ширину по всій довжині. Паралельні витягнуті сторони двійникових прошарків утворені когерентними симетричними двійниковими границями (СДГЗ) $\Sigma\{111\}_1/\{111\}_2$ (індекси 1 та 2 відповідають зерну 1 та двійнику 2, відповідно) або площині (100)_{ΣГЗВ} в рамках моделі ґратки вузлів, що збігаються (ГЗВ). Σ – обернена щільність вузлів, що збігаються. Як і в попередніх дослідженнях [10], на вершинах двійникових прошарків спостерігались фасетки наступних типів: $\{211\}_1/\{211\}_2$, або (010)_{ΣГЗВ}; $\{511\}_1/\{111\}_2$, або (120)_{ΣГЗВ}; $\{522\}_1/\{144\}_2$, або (130)_{ΣГЗВ}; $\{411\}_1/\{012\}_2$, або (210)_{ΣГЗВ}, (110)_{ΣГЗВ}. Наявність в зернах фасеток (010)_{ΣГЗВ} та (100)_{ΣГЗВ} (СДГЗ) є переважними з точки зору застосування в сонячних елементах, оскільки такі границі мають низьку щільність пасток для носіїв зарядів та характеризуються слабкою сегрегацією домішок внаслідок високого ступеня впорядкованості [14].

На рис. 1 зображено двійниковий прошарок, вершина якого складається з трьох плоских фасеток. Дві фасетки (110)_{ΣГЗВ} складають кут 54° з симетричними двійниковими границями, а фасетка, що розташована між ними, складає кут 82° із СДГЗ. Фасетки з такою орієнтацією спостерігаються раніш в Cu, Ag та Al [1,11,12]. В цих металах границі з орієнтаціями від 0° до 90° (відповідно, (100)_{ΣГЗВ} та (010)_{ΣГЗВ}) в процесі відпалювання при 0,87 температури плавлення (T_{пл}) завжди розпадаються на фасетки з орієнтаціями 0° та 82°. Було показано [1,11], що плоскі фасетки в міді мають незвичну так звану 9R-структуру. Ця структура являє собою достатньо товсту пластину зернограничної фази з об'ємцентрованою кубичною структурою, яка міститься в матриці з ґранецентрованою кубичною структурою [1]. Аналіз літературних даних свідчить, що фасетка 82°9R спостерігається в Cu тільки при високих температурах. В полікремнієвих плівках такі фасетки спостерігаються також при високих температурах відпалювання, зокрема, при 1200°C (0,85 T_{пл}). При 1150°C мають місце 90°-ні фасетки. Таким чином, в інтервалі температур 1150-1200°C на вершинах двійникових прошарків має місце зернограничний перехід, при якому замість 90°-ної фасетки (010)_{ΣГЗВ} з'являється фасетка 82°9R.

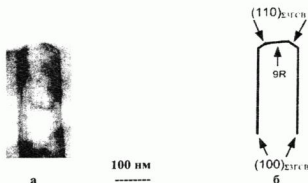


Рис. 1 Мікрофотографія (а) та схематичне зображення (б) двійникового прошарку з трьома фасетками на вершині: $(110)_{\Sigma 13GB}$ та $82^\circ 9R$. Температура відпалювання 1200°C

Діаграма стабільності для фасеток різних типів наведена на рис. 2. Її відмінність від отриманої раніш діаграми [10] полягає в наявності фасетки $82^\circ 9R$. З наведеної діаграми видно, що, по-перше, в різних температурних інтервалах існують фасетки різних типів; по-друге, при одній температурі відпалювання можуть існувати декілька різновидів фасеток. При цьому кількість типів фасеток зменшується зі зростанням температури відпалювання. Такі особливості фасетчатої структури свідчать про те, що на вершинах двійникових прошарків зі зміною температури відпалювання відбуваються зернограничні перетворення фасетування, при яких один тип фасеток замінюється іншим.

Зміна орієнтації фасеток та їх кількості на вершинах двійників обумовлені залежністю

спектра спеціальних границь зерен від температури [1,9]. Як відомо [1,9-13], границі мають спеціальну структуру та властивості в обмеженому інтервалі температур. При підвищенні температури кількість спеціальних границь зменшується. Чим щільність пакування менше, тим вище енергія границі та нижче температури, при яких має місце теплове впорядкування на границі. При високій температурі реалізуються тільки фасетки з максимальною щільністю вузлів, що збігаються, які мають найнижчу енергію. При зниженні температури кількість рівноважних фасеток поступово збільшується, включаючи фасетки зі все меншою щільністю вузлів, що збігаються.

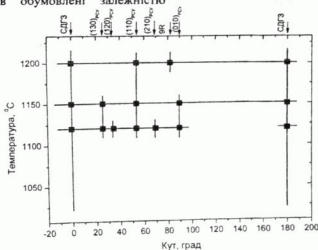


Рис. 2 Діаграма стабільності для фасеток різних типів на вершинах двійникових прошарків в зернах полікремнієвих плівок

Аналіз змін морфології вершин двійникових прошарків зі зростанням температури відпалювання дозволив встановити наявність ще двох різновидів перетворень фасетування. Так, як було відмічено раніш [10], в зернах полікремнієвих плівок, що відпалені при температурі 1120°C , спостерігаються двійникові прошарки, на вершинах яких розташована одна фасетка, яка складає кут 26° з бічною стороною двійникової пластини, тобто з симетричною двійниковою границею. Орієнтація фасетки відповідає $\{522\}_1/\{144\}_2$, або $(130)_{\text{ЗГЗВ}}$ (рис. 3, а, б). В плівках, що відпалені при більш високих температурах, 1150°C , такі двійники відсутні, проте спостерігаються двійникові прошарки, вершини яких містять дві фасетки (рис. 3, в, г).

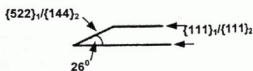


а

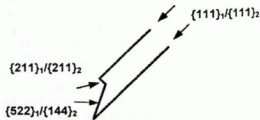


в

100 nm



б



г

Рис. 3 Мікрофотографії (а,в) та схематичні зображення (б,г) вершин двійникових прошарків в зернах полікремнієвих плівок з одною ($T=1120^{\circ}\text{C}$) та двома ($T=1150^{\circ}\text{C}$) фасетками

Крім того, дослідження форми вершин двійникових прошарків дозволило вперше для таких об'єктів спостерігати з підвищенням температури перетворення вихідної криволінійної (закругленої) границі в границю з огранкою. Так, на рис. 4 для температури відпалювання 1120°C наведено зображення двійника, на вершині якого можна визначити ділянку без чітко визначеної огранки (між точками В та С). Зі збільшенням температури відпалювання до 1200°C криволінійні ділянки на вершинах двійникових прошарків не спостерігаються.

Аналіз ПЕМ-зображень свідчить, що при різних температурах відпалювання змінюються не тільки орієнтація фасеток та їх кількість, але й довжина фасеток однакової орієнтації. Зокрема, довжина фасеток однакової орієнтації зменшується зі зростанням температури відпалювання. Наприклад, довжина фасетки $(130)_{\text{ЗГЗВ}}$ при 1120°C дорівнює 100 нм, а при 1150°C зменшується до 30 нм. Аналогічна залежність довжини фасеток від температури спостерігалась в роботах [17-18] для Zn.

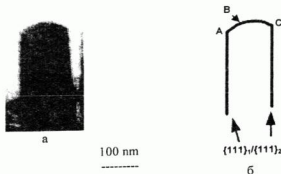


Рис. 4 Мікрофотографія (а) та схематичне зображення (б) вершини двійникового прошарку з закругленою ділянкою (BC)

При детальному дослідженні форми вершин двійникових прошарків залежно від температури відпалювання для Zn було встановлено, що форма вершин двійників визначається двома факторами: 1 – орієнтаційною залежністю зернограничної енергії, згідно якої кристал огранюється площинами з мінімальною поверхневою енергією; 2 – рухливістю границі. Орієнтаційна залежність дозволяє передбачити форму кристала при постійному об'ємі. У випадку рекристалізаційних процесів у полікремнієвих плівках при відпалюванні, поряд із ростом зерен має місце зменшення питомої довжини двійникових границь та щільності двійників у зернах [15]. Таким чином, довжина двійників зменшується, форма їх вершин змінюється, оскільки фасетки різних типів характеризуються не тільки різною питомою енергією, але й різною рухливістю. Отже, як зерногранична енергія, так і рухливість обумовлюють форму вершин двійників. Для того, щоб виявити внесок той чи іншої складової, необхідно провести більш детальні дослідження, зокрема дослідження форми вершин двійникових прошарків та довжини фасеток від часу відпалювання.

Висновки

1. На вершинах двійникових прошарків усередині зерен легованих фосфором полікремнієвих плівок товщиною 500 нм поряд з такими типами фасеток, які спостерігались раніш $\{211\}_1/\{211\}_2$, або $\{010\}_{\Sigma 3\bar{2}V}$; $\{511\}_1/\{111\}_2$, або $\{120\}_{\Sigma 3\bar{2}V}$; $\{522\}_1/\{144\}_2$, або $\{130\}_{\Sigma 3\bar{2}V}$; $\{411\}_1/\{012\}_2$,

або $\{210\}_{\Sigma 3\bar{2}V}$, $\{110\}_{\Sigma 3\bar{2}V}$, вперше була виявлена некубічна фасетка $82^\circ 9'R$.

2. Показано, що кількість різновидів фасеток та довжина фасеток одного типу збільшуються зі зменшенням температури відпалювання.

3. Встановлено, що на вершинах двійників мають місце наступні зернограничні перетворення фасетування:

- дисоціація вихідної плоскої границі на плоскі фасетки, енергія яких менша, ніж енергія вихідної границі;
- зернограничне перетворення фасетування, при якому одна фасетка змінюється на іншу;
- перетворення криволінійної границі в таку, що має огранку при збільшенні температури відпалювання.

Список використаних джерел

1. Страумал Б.Б. Фазовые переходы на границах зерен. Фасетирование, специальные и неспециальные границы, потеря огранки [Текст]: учеб. пособие / Б.Б. Страумал. – М.: МИСиС, 2004. – 65 с.
2. Mukhopadhyay S. Nanocrystalline silicon: A material for thin film solar cells with better stability [Text] / S. Mukhopadhyay, A. Chowdhury, S. Ray // Thin Solid Films. – 2008. – 516, Issue 20. – P. 6824-6828.
3. Liu F. Intragrain defects in polycrystalline silicon thin-film solar cells on glass by aluminum-induced crystallization and subsequent epitaxy [Text] / F. Liu, M.J. Romero, K.M. Jones, A.G. Norman, M.M. Al-Jassim, D. Inns and A.G. Aberle // Thin Solid Films. – 2008. – 516, Issue 18. – P. 6409-6412.
4. Паращук Д. Ю. Современные фотоэлектрические и фотохимические методы

- преобразования солнечной энергии [Текст] / Д.Ю. Парашук, А. И. Кокорин // Рос. хим. ж. (Ж. Рос. хим. об-ва им. Д.И. Менделеева), - 2008, - **LI**, № 6 - С. 107-117.
5. Сычев В.В. Нанотехнологии для энергосбережения: прогноз наиболее значимых областей исследования [Текст] / В.В. Сычев // Рос. хим. ж. (Ж. Рос. хим. об-ва им. Д.И. Менделеева), - 2008, - **LI**, № 6 - С. 118-128.
6. Rath, J.K. Low temperature polycrystalline silicon: a review on deposition, physical properties and solar cell applications [Text] / J.K. Rath // Sol. Energy Mater. Sol. Cells. - 2003. - **76**, № 4. - P. 431-487.
7. Nakhodkin, N.G. Formation of different types of polysilicon film structures and their grain growth under annealing [Text] / N.G. Nakhodkin, T.V. Rodionova // Phys. Status Solidi A. - 1991. - **123**, № 2. - P. 431-439.
8. Nakhodkin N.G. The mechanism of secondary grain growth in polysilicon films [Text] / N.G. Nakhodkin, T.V. Rodionova // J. Cryst. Growth. - 1997. - **171**. № 1-2. - P. 50-55.
9. Nakhodkin, N. Faceting of twin grain boundaries in polysilicon films [Text] / N. Nakhodkin, N. Kulish, T. Rodionova // Phys. Status Solidi A - 2010. - **207**, № 2. - P. 316-320.
10. Находкін, М.Г. Фасетування вершин двійників в зернах полікремнієвих плівок [Текст] / М.Г. Находкін, М.П. Куліш, Т.В. Родіонова, О.М. Сиянський // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. - 2010 - Випуск № 2. - С. 201-205.
11. Straumal B.B. Temperature influence on the faceting of $\Sigma 3$ and $\Sigma 9$ grain boundaries in Cu [Text] / B.B. Straumal, S.A. Polyakov, E.J. Mittemeijer // Acta Materialia. - 2006. - **54**. - P. 167-172.
12. Protasova S.G. Faceting of $\Sigma 3$ Grain boundaries in Al [Text] / S.G. Protasova, O.A. Kogtenkova and B. Straumal // Materials Science Forum. - 2007. - **558-559**. - P. 949-954.
13. Straumal B.B. Reversible transformation of a grain-boundary facet into a rough-to-rough ridge in zinc [Text] / B. B. Straumal, A. S. Gornakova and V. G. Sursaeva // Philosophical Magazine Letters. - 2008. - **88**, No. 1. - P. 27-36.
14. Lee S. B. Correlation between grain boundary faceting-defaceting transition and change of grain boundary properties with temperature [Text] / S. Lee // Materials Letters. - 2003. - **57**. - P. 3779-3783.
15. Находкін, М.Г. Вплив відпалювання на двійникові границі в рівноосьових полікремнієвих плівках [Текст] / М.Г. Находкін, М.П. Куліш, Т.В. Родіонова // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. - 2006. - Випуск № 1. - С. 291-296.
16. Nakhodkin N.G. Features of faceted grain boundaries in polysilicon films [Text] / N.G. Nakhodkin, N.P. Kulish, T.V. Rodionova // Functional Materials (ICFM-2011): international conference, October 3-8, 2011, Krym, Partenid, Ukraine: proceedings. - 2011. - P. 341.
17. Находкін Н.Г. Nanofacet structure of twin boundaries in polysilicon films [Текст] / Н.Г. Находкін, Н.П. Куліш, Т.В. Родіонова // Фізика і технологія тонких плівок та наносистем: XIII Міжнародна конференція, травень 2011, Івано-Франківськ, Україна: матеріали. - 2011. - 2. С. 178.
18. Nakhodkin N.G. Facet transformations of twin boundaries in polysilicon films [Text] / N.G. Nakhodkin, N.P. Kulish, T.V. Rodionova // Multifunctional nanomaterials (NanoEuroMed 2011): Mediterranean-East-Europe Meeting, 12-14 May, 2011, Uzhgorod, Ukraine: materials. - P. 118-119.

Надійшла до редколегії 07.12.2011 р.

УДК 621.315.592

Павлюк* С.П., к.ф.-м.н., Гандзюк В.І., студ.

Pavlyuk* S.P., Ph.D., Gandziuk V. I., stud.

**Механізм утворення високопольового
домена в КСДІ структурах****The mechanism of formation of high-field
domain in SDI**

В роботі досліджено виникнення високопольового домена в структурах, виготовлених за технологією «кремній з діелектричною ізоляцією» (КСДІ). Показано, що за наявності невідновлених електронів і дірок та суттєвому неоднорідному розігріву в структурах КСДІ утворюється високопольова область. Механізм її утворення аналогічний механізму утворення термічного градієнтно-дрейфового домена (ТГД-домена) і пов'язаний з b-дрейфом електронно – діркових пар.

In this work the occurrence of high-field domain in structures produced by the technology "silicon with dielectric isolation" (SDI) was investigated. It was shown that the presence of unbalanced electrons and holes and significant non-uniform heating causes the appearance of high-field region in the SDI structures. The mechanism of its formation is similar to the mechanism of formation of the thermal gradient-drift domain (TGD domain) and is connected with b-drift of electron-hole pairs.

Ключові слова: поле, домен, електронно-діркові пари, b-дрейф.

Key Words: field, domain, electron-hole pairs, b-drift.

*E-mail: pps@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

Introduction

Recently in the design of semiconductor devices the tendency to increase the operating current flowing and reduce the size of devices has appeared. This leads to an increase in the density of flowing currents and significant Joule's heating of semiconductor structures. Under these conditions the injection and thermal generation of the minority charge carriers into the volume of semiconductor structure and the formation quasi-neutral electron-hole pairs are occurring. Significant non-uniform heating and the presence of electron-hole pairs can lead to the appearance of b-drift [3] and the formation of the thermal-drift gradient domain (TGD-domain) [4] and its destruction in the semiconductor structures. Such investigations were described in works [3-5]. The investigations were conducted on large, specially made silicon structures with p-n junctions. The flowing of extremely high currents through the structures produced by the technology "silicon with dielectric isolation" (SDI), was described in work [6,7]. It was revealed the emergence of high-resistance region and the subsequent emergence of the s-shaped plot in current-voltage characteristic. Explanations about the mechanism of high-resistance region in these works

are not given.

That's why the purpose of this work was the study of high-resistance region and the mechanism of its occurrence.

Experimental results.**Experimental samples.**

The experimental samples were silicon diffusion resistors made by technology SDI [2], they are shown on the Fig. 1. They are silicon $n^+ - n - n^+$ structures with aluminium (Al) electrical contacts to n^+ -regions. They are located in "pockets", which are separated by the SiO_2 layer with the thickness of ≈ 2 microns from the polysilicon substrate with a thickness of 300 micron. The "pockets" have different depth h_1 (from 2,8 to 10,5 micron).

$n^+ - n - n^+$ structures are made of monocrystalline n-silicon. n^+ -regions were obtained by ion doping of the n-silicon with phosphorus $P \approx 10^{21} \text{ cm}^{-3}$ with its subsequent thermal flattening to a depth of $h \approx 5$ microns. Depending on the depth h_1 of the "pocket" n^- - region has the same depth, as a "pocket" ($h_1/h \approx 1$), or smaller ($h_1/h > 1$).

It is believed that the current in the SDR, primarily heats the part of the n - silicon, which is located between the n^+ -regions and which we shall

call a "bridge". Clearly, the ohmic resistance of the "bridge" depends on its size h_1 , L , b and w (see Figure 1) and mainly determines the resistance SDR

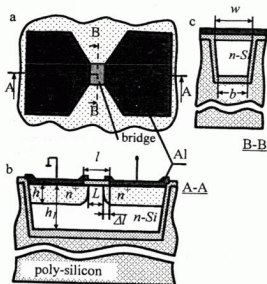


Fig. 1. Schematic representation of studied SDR: a – plane view; b i c – intersection of A-A and B-B respectively. The intersection of B-B is increased for clarity.

R. In the studied samples the magnitude of R was in range from units to tenth of ohms.

$n^+ - n - n^+$ structures differed among themselves mainly on two structural parameters. The first are values h_1 i h , which were different in different samples, but for which the ratio is always executed $h_1/h=1$ or $h_1/h>1$; the second is so-called photographic length of the "bridge" L (Fig.1 b). In different samples $L = 8,0 \pm 13,4$ microns. Let us note, when silicon is accelerated with phosphorus, it "ligates" the silicon under the border of oxide near the surface, and as the result the length of the "bridge" L between n^+ -regions is always less than L on the length of "under-alloying" $2\Delta l$.

Cross section of the "bridge" (Fig.1.c) looks as the trapezoid, in which the size of lower base $b=4,0$ micron and fixed, and the size of upper base w is determined by the depth of the "pocket" h_1 and changes in range $w = 8 \pm 18$ micron. In structures of different type size of the Al contact pads (Fig. 1.a) differed somewhat, but their average length was 200 microns, width - 150 microns.

Experimental device and methods of research.

Block diagram of experimental device is shown in Figure 2.

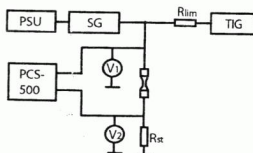


Fig.2 Block-diagram of experimental device

Stationary current-voltage characteristics (VAC) were shot using the current generator, which is realized by the suitable device (SD). Voltage drop V_2 at the calibrated resistor R_{st} , which is an order of magnitude smaller than the resistance of the sample ($R_{st} \ll R_{sam}$), allowed to determine the current I . Voltage drop V_1 on the sample. The values V_1 and V_2 were measured with the help of digital voltmeter and a computer oscilloscope PCS-500. At the same time testing pulses through the limiting resistor R_{lim} were given from the generator TIG. With the help of these pulses by the method «after-injection EMF» lifetime of electron-hole pairs can be determined.

Obtained results.

The VAC of experimental sample is shown on Fig.3.

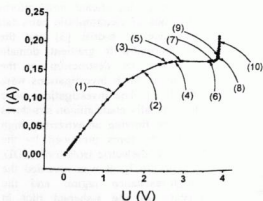


Fig.3 VAC of experimental sample

The oscillograms of the testing pulses in the relevant points on VAC are shown in Fig.4. Number of the diagram corresponds with the number of point on VAC.

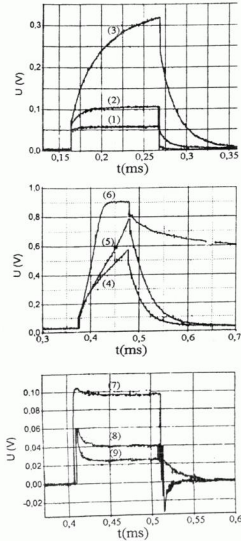


Fig.4 The diagrams of oscillograms of testing pulse

As seen from the graph, VAC is initially linear. Oscillogram (1) has a rectangular shape. Further increase in current (points on VAC and oscillograms 2,3) leads to the emergence of "tail" of after-injection EMF on the oscillograms, suggesting the appearance of electron-hole pairs.

The gradual increase of flowing current leads to the appearance of a sudden change of power. On the oscillograms of 6 and 4 a significant increase of the magnitude of testing impulse and in the relaxation time of after injection EMF signal is observed.

Further increase in current almost does not change the voltage drop on the sample and it remains unchanged when changing the current within 0.16 - 0.21 A. However, the oscillograms 7 and 9 substantially changed their appearance – delaying of the leading edge is disappearing, after-injection EMF is significantly decreasing and gradually disappearing.

Discussion of the results.

The obtained results can be interpreted as follow. For small values of current ($I < 0.13$ A) it is defined by carriers of one sign. This confirms the absence of after-injection EMF. After increasing the current to 0.16 A, the jump of voltage drop is observed. Oscillograms of after-injection EMF change their sight. The gradual increasing of the voltage magnitude and after-injection EMF is occurring. It means, that the time of life of electron-hole pairs and their concentration have significantly increased. The dependence of the resistance of the sample from the current (Fig. 5) is built which shows that the high-field region is formed in the sample. Since it appeared in a large concentration of electron-hole pairs and significant non-uniform heating of the structure, we can confirm that the velocity of electrons and holes [1] had become saturated and TGD

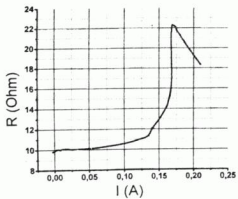


Fig.5 The dependence of the resistance of the sample from the flowing current

domain had formed. Further increasing of the current causes such warming of the high-field region, where it is destroyed by thermo-generated carriers[8].

Conclusions:

Investigations of VAC samples of silicon diffusion resistors showed the formation of high-field region.

Since the high-field region is formed by the appearance of electron-hole pairs and significant non-uniform heating, we can confirm that the mechanism of its formation is connected with the b-drift and the formation of TGD domain.

References:

1. Зи С. Физика полупроводниковых приборов в 2-х т. [Текст]: Пер. с англ. - М.: Мир, 1984. - Т.1. - С. 456-459.
2. Колобов Н.А. Основы технологии электронных приборов[Текст] - М.: Высшая школа, 1980.-С. 345-352.
3. Добровольский В.М. Дрейф электронно-дырочной плазмы, обусловленный градиентами подвижностей носителей заряда [Текст]/ В.М. Добровольский, С.П. Павлюк // ФТП. - 1977. - Т.11, №7. - С. 1377-1380.
4. Добровольский В.Н. Термический градиентно-дрейфовый домен в электронно-дырочной плазме полупроводников [Текст]/ В.Н.Добровольский, С.П.Павлюк //ФТП. - 1981.-Т.15, №1.-С.120-129.
5. Добровольский В.Н. Инжекционные эффекты в неоднородно разогретом кремнии[Текст]/ В.Н.Добровольский, С.П.Павлюк, А.В.Романов//ФТП.-1981г.- № 2.- С. 411-414.
6. Коноваленко Л.Д. Полупроводниковые энерговыделяющие элементы // Фотоэлектроника[текст]/ Л.Д. Коноваленко, Ф.В.Макодей, В.С.Мазуренко, В.И.Андреев// -2003.-, в. 12.-С. 21-27.
7. Кушниренко В.В. Исследование кремниевых диффузионных резисторов при протекании импульса тока большой плотности[Текст]/ В.В. Кушниренко, Г.К. Нинидзе, С.П. Павлюк, Л.Д. Коноваленко //ТКЕА.-2005.- №5(59).-С. 23-26.
8. Павлюк С.П. Механізм переміщення та зникнення термічного градієнтно-дрейфового домену в напівпровідниках // Вісник КНУ, серія: Ф-МН, випуск №1, 2001.-С. 400-401.

Надійшла до редколегії 19.10.2011

УДК 535.345.67

*Первак Ю.О., д.ф.-м.н., проф., Федоров В.В.,
аспірант, Зарембовський К.В., студент**Кутові залежності спектрального про-
пускання багатопшарових структур з
трьома пів хвильовими резонаторами**

Досліджено спектральні властивості чвертьхвильових інтерференційних структур з трьома півхвильовими прошарками при нормальному і похилому падінні світла. Структури складаються з шарів оксиду кремнію (SiO_2) та оксиду титану (TiO_2). Показано, що спектральні характеристики суттєво залежать від поляризації світла при кутах падіння більших 20° . Розщеплення смуг прозорості, обумовлених півхвильовими резонаторами, а також ширина фотонної забороненої зони, зменшуються для s-поляризації і збільшуються для p-поляризації при збільшенні кута падіння. При цьому в обох випадках відбувається короткохвильовий зсув спектральних характеристик.

Ключові слова: багатопшарова тонкоплівкова структура, одновимірний фотонний кристал

*E-mail: yupervak@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

Широкий розвиток оптичних телекомунікаційних систем обумовлює актуальність розв'язку проблеми частотної селекції випромінювання. Ефективним засобом частотної селекції стали багатопшарові інтерференційні структури, включаючи найбільш відомі чверть хвильові (одновимірні) фотонні кристали [1-5]. Останні мають властивість частково або повністю (залежно від товщини) відбивати частотний діапазон світла поблизу довжин хвилі, які вдвічі більші періоду фотонного кристалу [4, 5]. Цей діапазон називають стоп-смугою або фотонною забороненою зоною. Введення в таку фотонну структуру дефектів у вигляді шарів з оптичною товщиною кратною половині довжини хвилі приводить до появи дозволених зон в області фотонної забороненої зони [4, 5]. Структура цих дозволених зон і, відповідно, спектральна характеристика фотонного кристалу з пів хвильовими дефектами залежить від положення цих дефектів в структурі і від їх кількості. Найбільш повно оптичні властивості

Yu.O. Pervak, Dr. Sci., V.V. Fedorov, post grad.
stud., Zarembovskiy K.V., stud.**The angular dependencies of spectral
transmittance for multilayer structures with
three half-wave resonators**

Spectral properties of quarter-wave interference structures with three half-wave layers at normal and slopping light incidence were investigated. Structures consist of layers of silicon oxide (SiO_2) and titan oxide (TiO_2). It was found that spectral descriptions substantially depend on polarization of light at the angles of incidence of greater 20° . Breaking up of transmittance bands, conditioned half wave resonators, and also width of photonic forbidden zone decreased for s-polarization and increased for p-polarization at the increase of angle of incidence. Thus there is a short-wave displacement in both cases.

Key words: multilayer thin-film structure, 1-D photonic crystal

таких структур було вивчено в роботах [6-9], де вони розглядалися як чверть хвильові стопи з багатьма пів хвильовими резонаторами. Там же було показано, що багато резонаторні структури характеризуються високою контрастністю селекції. Саме на базі чверть хвильових стоп з певною кількістю півхвильових прошарків створюють контрастні смугові фільтри [6-9].

Всі можливі структури багато півхвильових фільтрів можна описати виразом

$$S(q)^m v, \quad (1)$$

де S позначає підкладку, на якій розташовано багатопшарову структуру, яка умовно може бути представлена як система з трьох груп шарів w , q і v [6-9]. При цьому група q повторюється m разів. Усе різноманіття півхвильових структур вкладається в чотири підгрупи, залежно від структурування груп шарів w , q і v :

$$w = (AB)^{v+1}, q = (BA)^{k+1}, v = (BA)^{v+1}, \quad (2)$$

$$w = (BA)^N B, \quad q = (BA)^{k+1} B, \quad v = (BA)^N B, \quad (3)$$

$$w = (AB)^{N+1}, \quad q = (BA)^{k+1} (AB)^{k+1}, \quad v = (BA)^{N+1}, \quad (4)$$

$$w = (BA)^N B, \quad q = (BA)^{k+1} (AB)^{k+1}, \quad v = (BA)^N B, \quad (5)$$

де A і B – чвертьхвильові шари відносно довжини хвилі λ_0 з показниками заломлення n_A і n_B ; l і k – цілі числа, причому $k \geq 0$ і $l \geq -1$ для (2), (4), $l \geq 0$ для (3), (5); S – підкладка з показником заломлення n_m .

Для того, щоб в аналітичному вигляді було можливо описати основні властивості таких систем було введемо декілька нових понять. Перше – функція середнього геометричного від обвідних сімейства кривих коефіцієнта пропускання – $T_{\text{серед}}(\delta)$. Друге – середня прозорість смуги $D = (T_{\text{серед}})_{\delta=\pi/2}$. Тут δ позначає фазову товщину.

На довжині хвилі λ_0 фазова товщина шару $\delta = \pi/2$. Було отримано наближені аналітичні вирази, що зв'язують введені поняття і півширину фільтру з параметрами шарів та структурою фільтру.

Аналіз отриманих виразів показав, що при фіксованому значенні n_H/n_L більшим значенням відносної півширини $\Delta\lambda_n/\lambda_0$ відповідають менші значення k , і навпаки. Для потрійних півхвильових систем вибір значень k обмежений діапазоном 2÷8 і тому для $\Delta\lambda_n/\lambda_0$ теж отримується обмежений діапазон. Цей діапазон для потрійних півхвильових систем дорівнює $\Delta\lambda_n/\lambda_0 \approx 0,3 \cdot 10^{-3} \div 0,2$. В свою чергу обмежений вибір $m=1, m=2$ для потрійних півхвильових систем при низьких значеннях n_H/n_L , які відповідають великим значенням $\Delta\lambda_n/\lambda_0$ при фіксованому k , визначають величини загального числа шарів в системі N , недостатньо високі для отримання низького рівня фону і високої контрастності. Таким чином, обмежений набір значень параметрів s, m, l , k або вводить відповідні обмеження на діапазон значень ширини смуги, при задаванні яких можуть бути отримані достатньо контрастні фільтри на класах потрійних півхвильових систем, або роблять взагалі неможливими конструкції потрійних півхвильових систем.

Однак такий підхід до пошуку параметрів структури з бажаними спектральними характеристиками не дозволяє визначити структури, смуга прозорості яких розщеплюється на повністю розділені підсмуги, кількість яких не перевищує чи-

сло півхвильових шарів в структурі. Щоб визначити ці структури, в роботах [10-11] було проведено моделювання спектральних властивостей структур (1)–(5) при нормальному падінні. Було показано, що найбільш чітке розщеплення резонансної смуги прозорості на три окремі смуги отримується в структурах $S[(HL)^{k+1}(LH)^{k+1}]^2$, $S[(HL)^{k+1}H]^4$ та $S[(LH)^{k+1}L]^4$.

В даній роботі досліджувалися спектральні залежності пропускання при похилому падінні. Як і в роботах [10-11] розрахунки проведено за допомогою матричного методу [2]. Метод дозволяє при заданих параметрах багатопарової структури (N – число шарів, n – показник заломлення, k_r – коефіцієнт екстинкції, d_r – товщина r -го шару, n_m і k_m – оптичні сталі підкладки, n_0 і k_0 – оптичні сталі зовнішнього середовища, θ_0 – кут падіння) легко розрахувати спектр пропускання $T(\lambda)$:

$$T = \frac{4n_0 \operatorname{Re}(\eta_m)}{(\eta_0 B + C)(\eta_0 B + C)^*}. \quad (6)$$

де B і C матричні елементи характеристичної матриці структури

$$\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} = \left(\prod_{r=1}^N \begin{bmatrix} \cos \delta_r & (i \sin \delta_r)/\eta_r \\ i \eta_r \sin \delta_r & \cos \delta_r \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \eta_m \end{bmatrix} \quad (7)$$

де

$$\delta_r = (2\pi N_r d_r \cos \theta_r)/\lambda, \quad \eta_{r,m} = \chi_{\text{vac}} N_{r,m} \cos \theta_{r,m}$$

для ТЕ хвиль, $\eta_{r,m} = \chi_{\text{vac}} N_{r,m} / \cos \theta_{r,m}$ для ТМ хвиль, $\chi_{\text{vac}} = 2,6544 \cdot 10^{-3}$ см/с, λ – довжина

хвилі, $N_r = n_r - ik_r$ – комплексний показник заломлення r -го шару, η_0 – провідність зовнішнього середовища, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість світла. Значення кутів θ , визначається законом Снеліуса

$$N_0 \sin \theta_0 = N_r \sin \theta_r = N_m \sin \theta_m. \quad (8)$$

Була врахована дисперсія оптичних параметрів вибраних плівкових матеріалів: оксид кремнію (SiO_2) і титану (TiO_2). Для опису дисперсії матеріалів використовували формулу Коші. Показники заломлення SiO_2 визначали за формулою $n(\text{SiO}_2) = 1,46 + (3,35 \cdot 10^{-3}/\lambda^2) + (1,41 \cdot 10^{-5}/\lambda^4)$, а TiO_2 за формулою $n(\text{TiO}_2) = 2,23 + (2,34 \cdot 10^{-3}/\lambda^2) + (7,69 \cdot 10^{-5}/\lambda^4)$, де λ – довжина хвилі в мкм. Врахована також дисперсія показника заломлення підкладки за формулою $n_s = 1,50 + (5,33 \cdot 10^{-3}/\lambda^2) + (4,92 \cdot 10^{-4}/\lambda^4)$. Поглинання в шарах при розрахунку характеристик не враховувалося.

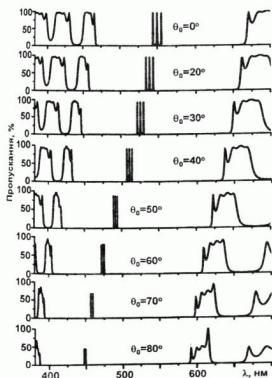


Рис.1. Спектральні залежності пропускання s -поляризованого світла структурами $S[(LH)^6L]^4$ при різних кутах падіння θ_0 .

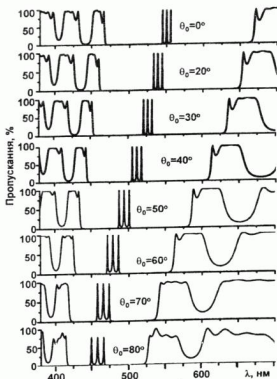


Рис.2. Спектральні залежності пропускання p -поляризованого світла структурами $S[(LH)^6L]^4$ при різних кутах падіння θ_0 .

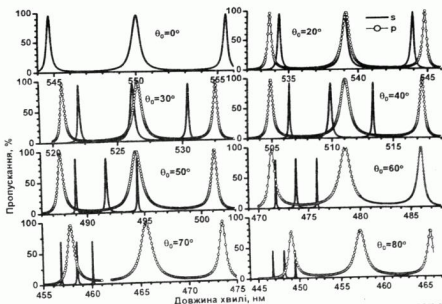


Рис.3. Спектральні залежності пропускання s - і p -поляризованого світла структурами $S[(LH)^6L]^4$ при різних кутах падіння θ_0 в області дозволених зон, обумовлених пів хвильовими резонаторами.

Таблиця 1. Положення смуг прозорості λ_1 , λ_2 , λ_3 , коротко- λ_k та довгохвильової λ_d межі стоп-смуги.

θ_0 , град	λ_1 , нм	λ_2 , нм	λ_3 , нм	λ_k , нм	λ_d , нм
0	544,69	550,00	555,50	470	662
10	542,03 (541,84)	547,12 (547,20)	552,64 (552,75)	467 (468)	660 (658)
20	534,28 (533,60)	539,02 (539,10)	543,91 (544,80)	459 (463)	654 (626)
30	522,06 (520,01)	526,20 (526,59)	530,41 (532,55)	449 (456)	644 (628)
40	506,47 (504,90)	509,88 (511,05)	513,33 (517,40)	435 (447)	631 (605)
50	489,02 (487,69)	491,71 (494,37)	494,42 (501,20)	420 (438)	614 (579)
60	471,70 (471,31)	473,76 (478,55)	475,83 (485,96)	405 (429)	605 (554)
70	456,83 (457,05)	458,49 (465,67)	460,11 (473,59)	395 (423)	592 (532)
80	446,74 (449,04)	448,13 (457,25)	449,50 (465,62)	388 (418)	588 (518)

З приведених на рис. 1 - 3 спектрів пропускання структур $S[(\text{LH})^6\text{L}]^4$ видно, що зі збільшенням кута падіння спектри пропускання зміщуються в короткохвильовій бік; ширина стоп-смуги (λ_d - λ_k), що дорівнює 192 нм при $\theta_0=0^\circ$ зростає до 200 нм і зменшується до 100 нм при $\theta_0=80^\circ$ для s -поляризації і p -поляризації, відповідно. При цьому величина розщеплення між компонентами смуг прозорості λ_1 , λ_2 , λ_3 , обумовлених півхвильовими резонаторами, зростає для s -поляризації і зменшується для p -поляризації (див. табл.1). Вказані закономірності пояснюються зменшен-

ням фазової товщини шарів, збільшенням для s -поляризації і зменшенням для p -поляризації відношення ефективних показників заломлення шарів $N_e(\text{TiO}_2)/N_e(\text{SiO}_2)$ зі збільшенням кута падіння. Зі збільшенням кута падіння відбивання від першої межі поділу (повітря - шар SiO_2) поступово зростає для s -поляризації і спочатку спадає до нуля при куті Брюстера, а потім теж зростає для p -поляризації. Це пояснює відповідні зміни максимального пропускання смуг прозорості λ_1 , λ_2 , λ_3 при зміні кута падіння.

Список використаних джерел

1. *Furman Sh.* Basics of Optics of Multilayer Systems / Sh. Furman Sh., A. V. Tikhonravov // Edition Frontieres, Gif-sur-Yvette. - 1992. - 104p.
2. *MacLeod H.A.* Thin-Film Optical Filters / H.A. MacLeod // Philadelphia: Inst. Phys. Publish., Pa., 2001. - P. 645.
3. *Первак Ю.О.* Оптика багатошарових покриттів / Ю.О. Первак // ВПЦ «Київський університет». - 2005. - 250с.
4. *Шпак А.П.* Фотонні кристали. Фізика та застосування / А.П. Шпак, В.Ю. Первак, Ю.А. Куницький, Ю.О. Первак // К.: Академперіодика. - 2006. - 120с.
5. *Первак В.Ю.* Фізика фотонних кристалів / В.Ю. Первак, А.П. Шпак, Ю.О. Первак, Л.Ю. Куницька // К.: Академперіодика. - 2007. - 304с.
6. *Несмелов Е.А.* К теории отрезающих интерференционных фильтров / Е.А. Несмелов, Г.П. Конохов // Оптика и спектроскопия. - 1971. - 31. - Вып. 1. - С.133-137.
7. *Марков Ю.Н.* К теории полосовых интерференционных фильтров / Ю.Н. Марков, Е.А. Несмелов, А.С. Никитин, И.С. Гайнутдинов // Оптика и спектроскопия. - 1977. - 43. - Вып. 5. - С.984-989.
8. *Марков Ю.Н.* К вопросу оптимизации полосовых интерференционных фильтров / Ю.Н. Марков, Е.А. Несмелов, А.С. Никитин, И.С. Гайнутдинов // ЖПС. - 1980. - 33. - №3. - С.536-540.
9. *Марков Ю.Н.* Синтез контрастных полосовых интерференционных фильтров. Сложнопериодические системы // Оптика и спектроскопия. - 1983. - 54. - Вып. 1. - С.173-178.
10. *Первак Ю.О.* Спектральні властивості багатошарових структур з трьома півхвильовими резонаторами / Ю.О.Первак, В.В.Федоров // Вісник Київського університету, серія фізико-математичних наук. - 2011. - №1. - С. 259-262.
11. *Первак Ю.О.* Особливості спектральних характеристик багатошарових структур з трьома півхвильовими резонаторами / Ю.О.Первак, В.В.Федоров // Вісник Київського університету, серія фізико-математичних наук. - 2011. - №2. - С. 201-204.

Надійшла до редколегії 25.11.11

УДК 537.6/8

Прокопенко О.В.^{*}, к.ф.-м.н., доц.,
Сулименко О.Р., студ.**Взаємна фазова синхронізація декількох
магнітних наноструктур, керованих спін-
поляризованим струмом**

Запропоновано критерії оцінки ефективності взаємної фазової синхронізації декількох магнітних нанорозмірних автогенераторів. Розглянуто застосування одного з критеріїв для опису процесу взаємної фазової синхронізації трьох майже однакових магнітних наноструктур, керованих спін-поляризованим струмом.

Ключові слова: магнітна наноструктура, спін-поляризований струм, фазова синхронізація.

Prokopenko O.V.^{*}, Ph. D., Asc. Prof.,
Sulymenko O.R., stud.**Mutual phase-locking of several spin-torque
nano-oscillators**

Criteria for evaluating the effectiveness of mutual phase-locking of several spin-torque nano-oscillators (STNO) are proposed. An application of one of the criterions to describe the process of mutual phase-locking of the three almost identical STNOs is considered.

Keywords: spin-torque nano-oscillator, spin-polarized current, phase-locking.

^{*}E-mail: ovp@univ.kiev.ua, Oleksandr.Prokopenko@gmail.com
Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов І.О.

Вступ

Ефект переносу спінового магнітного моменту (the spin transfer torque effect) у шаруватих магнітних структурах, теоретично передбачений Слончевським і Берже [1–2] та експериментально спостережений у роботах [3–13], дозволяє керувати напрямом намагніченості у шаруватих магнітних наноструктурах (МНС), пропускаючи крізь них спін-поляризований електричний струм. Зокрема, цей ефект може використовуватись для генерації електромагнітних коливань НВЧ під дією слабого постійного електричного струму [5–8, 14–15], а при більших значеннях струму – для перемикання намагніченості у "вільному" магнітному шарі МНС [3–4] (рис. 1), що є основою для створення якісно нового класу динамічної пам'яті – MRAM пам'яті [16]. Зворотний ефект – поява спін-поляризованого електричного струму при макроскопічних змінах напрямку намагніченості у МНС, стимульованих зовнішнім НВЧ сигналом, може використовуватись для детектування електромагнітних коливань за рахунок так званого діодного ефекту у МНС [9–13, 17–19].

За деякими показниками шаруваті МНС є кращими за аналогічні напівпровідникові наноструктури (детальну інформацію з цього приводу можна знайти в оглядах [14, 20–22]).

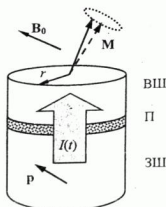


Рис. 1 Поперечний переріз трьохшарової циліндричної МНС радіуса r : ВШ – "вільний" магнітний шар, П – немагнітний прошарок – металевий (зазвичай, Cu) або діелектричний (зазвичай, MgO), ЗШ – "закріплений" магнітний шар. Під дією електричного струму $I(t) = I_{DC} + I_{RF}(t)$ у ВШ збуджується прецесія вектора намагніченості M навколо його рівноважного положення (рівноважне положення вектора намагніченості показано штриховою стрілкою, траєкторію руху намагніченості схематично показано пунктирною лінією). p – одиничний вектор, що визначає напрямок намагніченості у ЗШ у зовнішньому магнітному полі B_0 .

Зокрема зауважимо, що виходячи із загальнофізичних міркувань, збудження динамічних станів у МНС, як правило, потребує менших робочих потужностей, аніж збудження таких станів у напівпровідникових наноструктурах, де для цього необхідно забезпечити умови протікання електричного струму. Щоб проілюструвати цей принцип наведемо лише один блискучий результат, отриманий проф. Криворотовим І.М. разом з колегами [12–13]. Під час експериментальних досліджень ними було встановлено, що детектори мікрохвильового випромінювання на основі МНС (навіть, неоптимізовані) за своїми характеристиками, зокрема за вольт-ватною чутливістю детектора, можуть суттєво (на декілька порядків) перевищувати відповідні характеристики оптимізованих комерційних моделей напівпровідникових детекторів.

Малі розміри МНС (радіус $r \approx 10 + 250$ нм, товщина $h \approx 10 + 100$ нм), сумісність технології їх виготовлення з сучасною мікро- та наноелектронною технологією, широкий діапазон робочих частот (приблизно від 1 до 500 ГГц) та низький рівень робочих потужностей (від 1 пВт до 1 мкВт) дають можливість вважати МНС перспективним базовим елементом для створення швидкодіючих наноелектронних пристроїв обробки інформації [14, 20–22].

Разом з тим у згаданій галузі наноелектроніки існують проблеми, які на сьогоднішній день поки що не вирішені. Основними серед них є недостатньо розвинена технологія виготовлення МНС, відсутність загальної методики розробки та оптимізації мікрохвильових пристроїв на основі МНС, мала потужність вихідного сигналу для окремої МНС, яка складає лише $P \approx 1 + 10$ пВт [3–22], що є недостатнім для переважної більшості практичних застосувань – необхідно, щоб робочий рівень потужності вихідного сигналу становив не менше ніж $P \sim 1$ мкВт. Тому на практиці, для того щоб досягнути більших вихідних робочих потужностей, необхідно застосовувати масиви синхронно працюючих МНС. Відмітимо, що схожа проблема свого часу виникла у надпровідній електроніці при використанні джозефсонівських контактів [23] і була вирішена шляхом їх взаємної синхронізації; що згодом дозволило створити цілу низку мікрохвильових пристроїв на основі масивів синхронізованих джозефсонівських контактів [23–25].

На сьогоднішній день існує нелінійна теорія

взаємної фазової синхронізації двох МНС [26–28], яка узагальнює раніше отримані результати для двох близько розташованих МНС [29–30]. Висновки цієї теорії підтверджені цілою низкою експериментів [31–32]. Однак, останнім часом, з'явилися експериментальні роботи, наприклад див. [8], в яких зроблена спроба синхронізувати більше ніж дві МНС. Відповідно, важливою задачею, як з фундаментальної так і з прикладної точки зору, є розробка теорії взаємної фазової синхронізації декількох МНС. Це і є основною метою даної роботи, в якій зроблено спробу окреслити основний алгоритм побудови відповідної теорії і запропоновано метод оцінки ефективності фазової синхронізації кількох МНС.

Метод оцінки ефективності взаємної фазової синхронізації кількох МНС

Визначимо складність теоретичного аналізу процесу взаємної фазової синхронізації МНС у системі з N МНС $S(N)$ (далі, для спрощення, будемо користуватись цим якісним показником) як добуток $S(N) = K(N) \cdot \zeta(N)$. Можливий також альтернативний варіант $S(N) = K(N) + \zeta(N)$. Тут $K(N)$ – це кількість якісно різних динамічних станів, які можуть бути реалізовані у системі з N взаємодіючих МНС, а $\zeta(N)$ – деяка слабо зростаюча з N функція, яка характеризує кількість зв'язків між МНС, або кількість невідомих у системі рівнянь, що описує взаємодію МНС між собою. Далі нас будуть цікавити тільки якісні зміни величини $S(N)$, тому явний вигляд функцій $S(N)$ та $\zeta(N)$ нас цікавити не буде. Важливо лише щоб функція $\zeta(N)$ була монотонною та слабо залежала від N – тобто залишалась скінченною при $N \rightarrow \infty$. Це означає, що $S(N) = K(N) \cdot \zeta(N) < \infty$ при $N \rightarrow \infty$ і відповідна задача може бути розв'язана з використанням скінченної кількості ресурсів – наприклад див. роботу [33], де $N \gg 1$.

Тоді складність виконання теоретичного аналізу процесу взаємної фазової синхронізації МНС у системі з декількома МНС буде суттєво залежати від кількості взаємодіючих МНС N , оскільки величина $K(N)$ у виразі для $S(N)$ буде суттєво залежати від N .

Зрозуміло, що найбільш просто розглянути встановлення синхронних автоколивань намагніченості у системі двох МНС ($N = 2$), що,



Рис. 2 Типова якісна залежність складності теоретичного аналізу процесу взаємної фазової синхронізації МНС $S(N)$ від кількості N взаємодіючих МНС. Для трьох значень $N = \{2, 3, 9\}$ якісно зображено динамічні стани системи, що можуть бути реалізовані. Точки зафарбовані білим кольором (○) відповідають несинхронізованому стану МНС. Точки зафарбовані сірим кольором (◐) відповідають МНС, що розташовані в кластерних стінках. Точки зафарбовані чорним кольором (●) або заштриховані (◑) відповідають синхронізованим МНС, що належать до різних кластерів.

власне кажучи, було зроблено у роботах [26–29]. На відміну від цього досить простого випадку вже при переході до системи з трьох МНС ($N = 3$) складність теоретичного аналізу стрибкоподібно зростає і залишається майже незмінною для систем із більшою кількістю МНС, коли $N < \infty$ (рис. 2).

Стрибок функції $S(N)$ при $N = 3$ пов'язаний з появою так званого кластерного стану системи [34]. У цьому стані масив з $N \geq 3$ МНС, у результаті взаємодії МНС між собою, розпадається на декілька окремих груп МНС, або на декілька підмасивів чи кластерів МНС з різною кількістю структур N_i у кожному з N_a кластерів ($i = \overline{1, N_a}$, $N_a < N$). Всередині кожного кластеру МНС або синхронізовані, або, навпаки, не синхронізовані (кожну МНС, яка не синхронізована з іншими МНС можна, наприклад, відносити до певного окремого кластеру, що складається лише з одного елементу). Відповідно, хоча деякі з МНС синхронізовані між собою, повна синхронізація усього масиву МНС не відбувається і в системі

існують декілька майже незалежних колективних динамічних станів. Такі стани можуть бути легко спостережені на експерименті: якщо масиву ідеально синхронізованих МНС буде притаманна одна характерна лінія у спектрах випромінювання та/або поглинання (усі МНС працюють на одній частоті), то кластерному стану системи будуть відповідати спектри з декількома, а саме з N_a , спектральними лініями. Досліджуючи положення, ширини та інтенсивності цих спектральних ліній можна зробити висновок про характеристики кластерного стану системи, зокрема, можна визначити кількість МНС N_i у кожному кластері.

Існують і більш складні утворення – так звані кластери з розмитими границями або кластери з так званими кластерними стінками. У таких системах МНС, які розташовані на межі двох кластерів (у кластерній стінці), можуть випадковим чином на короткий період часу синхронізуватись з МНС, що належать до одного кластера, а потім на короткий період часу синхронізуватись з МНС, що належать до іншого кластера, після чого цей процес повторюється знов. Експериментально такий процес може бути спостережений як майже періодична чи хаотична "пульсація" існуючих або поява/зникнення нових характерних спектральних ліній у спектрі системи. Далі такі системи детально розглядатись не будуть, а більш конкретну інформацію з цього приводу можна знайти у роботах [34–37] та у списку літератури до них.

У той же час, зауважимо, що при $N \rightarrow \infty$, складність теоретичного аналізу взаємної фазової синхронізації $S(N)$ у системі з N МНС залишається скінченною. Формально, перехід $N \rightarrow \infty$ відповідає переходу від системи зі скінченною кількістю ступенів вільності до системи з нескінченною кількістю ступенів вільності. Однак, за рахунок того, що для розгляду систем з нескінченною кількістю ступенів вільності застосовуються інші методи аналізу ніж для розгляду систем із скінченною кількістю ступенів вільності (наприклад див. [35]), величина $S(N)$ залишається скінченною при $N \rightarrow \infty$.

На рис. 2 якісно зображено залежність $S(N)$ та певні характерні стани системи при $N \geq 2$. Видно, що критерій взаємної фазової синхронізації $\Delta\phi(t) = \text{const}$, де $\Delta\phi(t)$ – це різниця фаз двох взаємодіючих МНС, вже не може бути сліпо застосованим у системі з $N \geq 3$

МНС, оскільки він не враховує наявності кластерного стану системи. Наприклад, у системі з трьох взаємодіючих МНС, в якій кожна МНС характеризується змінною у часі фазою коливань намагніченості – $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ або $\varphi_3(t)$ – взаємна фазова синхронізація усіх МНС буде відбуватись лише при виконанні умов

$$\frac{d[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)]}{dt} = \frac{d[\varphi_2(t) - \varphi_3(t)]}{dt} = 0. \quad (1)$$

Очевидно, що при порушенні хоча б однієї з цих умов буде відбуватись лише часткова синхронізація усіх МНС, тобто буде виникати кластерний стан системи.

У випадку кластерів МНС з різкими границями (коли немає кластерних стінок) умови взаємної фазової синхронізації можуть бути записані як

$$\frac{d[\varphi_j(t) - \varphi_k(t)]}{dt} = 0 \text{ для } \forall j \neq k = \overline{1, N_j}, \quad (2)$$

де індекси j та k відповідають різним МНС у межах кластеру з N_j елементів. Очевидно, що умови для синхронізації усіх МНС у масиві є просто узагальненням (2) на випадок $N_j = N$.

Для кластерів з розмитими або нечіткими границями умова (2) має бути модифікована, щоб врахувати короткотривалі осциляції стану МНС, які знаходяться у кластерних стінках, між різними динамічними станами системи, кожен з яких відповідає стану кластера на межі котрого утворилась відповідна кластерна стінка. Для таких систем може бути принаймні два критерії оцінки.

Перший з них, досить грубий, полягає у тому, щоб зовсім виключити з розгляду ті МНС, які утворюють кластерні стінки і, за рахунок такого штучного обмеження властивостей системи, розглядати лише МНС, які входять до складу кластерів. Цей підхід, по суті, еквівалентний критерію оцінки ефективності взаємної фазової синхронізації у системі, яка знаходиться у кластерному стані з різкими границями між окремими кластерами. Хоча, скоріш за все, цей метод оцінки ефективності взаємної фазової синхронізації декількох МНС буде легко реалізувати на практиці, він має принципову неусувну похибку, яка вноситься за рахунок виключення з розгляду МНС, що входять до складу кластерних стінок. Іноді наявність такої похибки може бути принциповим недоліком, а використання зазначеного критерію оцінки може нівелювати результати теоретичного аналізу у цілому. Наприклад, для

сильно розбалансованих систем з багатьма МНС (в яких параметри окремих МНС сильно відрізняються від параметрів інших МНС) можливе утворення значної кількості кластерів малого розміру. Це означає, що помітна частина МНС у цьому випадку буде належати до кластерних стінок і за умови використання вище згаданого критерію оцінки ефективності взаємної фазової синхронізації МНС виключення таких МНС з розгляду може призвести до появи занадто великої похибки.

Враховуючи недостатню досконалість технології виготовлення МНС, реальні системи з багатьма МНС є помітно розбалансованими (що, власне кажучи, заважає проведенню успішних експериментальних досліджень явищ взаємної та вимушеної синхронізації у системах з багатьма МНС), а тому перший, достатньо грубий, критерій оцінки ефективності взаємної фазової синхронізації декількох МНС треба застосовувати з деякою обережністю.

Другий критерій оцінки ефективності взаємної фазової синхронізації багатьох МНС полягає у тому, що для кластерів з нечіткими границями замість умови (2) слід застосовувати деяку усереднену умову:

$$\left\langle \frac{d[\varphi_j(t) - \varphi_k(t)]}{dt} \right\rangle_T = 0, \quad \forall j \neq k = \overline{1, N_j}. \quad (3)$$

У цьому виразі $\langle \dots \rangle_T$ означає усереднення величини, що записана у гострих дужках, по часу у межах від t_0 до $t_0 + T$, де t_0 – це момент часу, коли стан системи можна вважати майже стаціонарним (принаймні протягом періоду часу $\Delta t \gg T$), T – це характерний період осциляцій стану МНС, що входять до складу кластерних стінок, між різними динамічними станами різних кластерів.

Критерій оцінки (3) є більш точним та коректнішим, ніж попередній критерій, однак, його використання сильно ускладнюється тим, що величина T , яка входить у (3), як правило, невідома. До того ж ця величина може бути різною для МНС, що розташовані у різних місцях різних кластерних стінок. Наприклад, природним є припущення, що період осциляцій T МНС, що знаходиться на границі двох кластерів може бути іншим ніж у МНС, що знаходиться на границі між трьома кластерами. Все це заважає використанню критерію оцінки (3) на практиці. Разом з тим, можливо, що величину вдасться визначити з експерименту, досліджуючи поведінку у часі спектру системи ("пульсацію"

існуючих або появу/зникнення нових характерних спектральних ліній).

На практиці, враховуючи недостатню кількість експериментальних даних, перевірку результатів теоретичного дослідження взаємної фазової синхронізації багатьох МНС зручно проводити спираючись на числовий експеримент. Зокрема, у тому випадку, коли бажаним станом системи є такий, що відповідає взаємній фазовій синхронізації усіх N МНС, за параметр, що характеризує ефективність фазової синхронізації, можна обрати величину:

$$\Delta\varphi_{\Sigma}(t) = \frac{1}{2N} \sqrt{\sum_{j,k=1}^N [\varphi_j(t) - \varphi_k(t)]^2}. \quad (4)$$

Очевидно, що взаємній фазовій синхронізації усіх елементів масиву МНС буде відповідати умова

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta\varphi_{\Sigma}(t) = 0. \quad (5)$$

На практиці це означає, що після деякого моменту часу t_0 , при $t > t_0$, можна вважати $|\Delta\varphi_{\Sigma}(t)| < \Delta\varphi_{\min}$, де значення $\Delta\varphi_{\min}$ відповідає порогі, для якого можна вважати, що взаємна фазова синхронізація МНС відбулась успішно.

Наприкінці зауважимо, що умова $|\Delta\varphi_{\Sigma}(t)| < \Delta\varphi_{\min}$ буде виконуватись тільки у випадку, якщо будь-який з доданків $[\varphi_j(t) - \varphi_k(t)]^2$ у виразі (4) буде слабко залежати від часу t . У протилежному випадку умова (5) виконуватись не буде.

Також зазначимо, що такий же підхід, лише з несуттєвими змінами, може бути застосований і для аналізу кластерного стану системи. При цьому важливу інформацію про цей стан можна буде одержати аналізуючи частотний спектр системи, тобто поведінку у часі підкореневого виразу у (4). Є підстави вважати, що це дасть змогу визначити характерні періоди осциляцій T стану МНС, що утворюють кластерні стінки.

Теоретичний аналіз взаємної фазової синхронізації трьох майже ідентичних МНС

Порядок проведення теоретичного аналізу взаємної фазової синхронізації для системи з трьох МНС має багато спільних рис з порядком проведення аналогічного дослідження для двох МНС. Тому, враховуючи, що розв'язок задачі про дві слабо взаємодіючі МНС, добре відомий (див. [26–29]), далі основну увагу буде приділено лише особливостям системи з трьох слабо

взаємодіючих МНС.

Як відомо, під дією зовнішнього мікрохвильового сигналу (яким у даному випадку є сигнал, що генерується іншими МНС), у вільному шарі МНС збуджуються коливання намагніченості, які формально можна охарактеризувати комплексною нормованою амплітудою високочастотної складової намагніченості $c = c(t)$. Наприклад, комплексну амплітуду можна ввести за правилом $c = (m_x - i m_y) / 2M_0$ [14], де M_0 – довжина вектора намагніченості у "вільному" магнітному шарі, m_x та m_y – малі високочастотні складові вектора намагніченості, $i = \sqrt{-1}$.

Функція $c(t)$ є розв'язком рівняння:

$$\frac{dc}{dt} - i\omega(p)c + \Gamma(p)c = f(t), \quad (6)$$

де $p = |c|^2$ – нормована потужність коливань намагніченості, $\omega(p)$ – циклічна частота принципово (!) неізохронних (залежних від p) коливань намагніченості, $\Gamma(p)$ – загальний ефективний коефіцієнт згасання системи, який є сумою "звичайного" коефіцієнта згасання $\Gamma_+(p)$ та коефіцієнта ефективного негативного згасання $\Gamma_-(p)$, причиною появи якого є протікання крізь МНС спін-поляризованого струму, $f(t)$ – «зовнішня сила», що описує вплив на МНС зовнішніх чинників (сигналу від інших МНС).

Припустимо, що зв'язок між МНС є слабким. Тоді у цьому наближенні рівняння (6) для довільної i -ї МНС може бути записане у вигляді

$$\frac{dc_i}{dt} + i\omega_i(p_i)c_i + \Gamma_i(p_i)c_i = \Omega_{ij}e^{i\beta_{ij}}c_j + \Omega_{im}e^{i\beta_{im}}c_m, \quad (7)$$

де індекси i, j, n відповідають різним МНС, Ω_{ij} та β_{ij} – амплітуда та фаза коефіцієнту зв'язку i -ї МНС з j -ю МНС. Відмітимо, що оскільки основним механізмом зв'язку між МНС є зв'язок за рахунок взаємодії намагніченості МНС з спіновими хвилями, породженими пресесією намагніченості в іншій МНС [30], величини Ω_{ij} та β_{ij} зручно представити у вигляді [26, 29–30, 38]:

$$\Omega_{ij} = \frac{\Gamma_i}{\sqrt{2k_j t_{ij}}} \exp\left(-\frac{\Gamma_j t_{ij}}{u_j}\right),$$

$$\beta_{ij} = \omega_j \tau_{ij} = l_{ij} \frac{\omega_j}{u_j}, \quad (8)$$

де $\omega_j = \omega_j(p_j)$ – циклічна частота спінової хвилі, що генерується j -ю МНС, k_j – хвильове число цієї спінової хвилі, τ_{ij} – час поширення спінової хвилі від i -ї до j -ї МНС, u_j – групова швидкість поширення спінової хвилі, l_{ij} – відстань між i -ю та j -ю МНС.

У граничному випадку $\Omega_{ij} \rightarrow 0$ (випадок незв'язаних МНС) розв'язок рівняння (7) може бути представлений у вигляді:

$$c_i = \sqrt{p_{0i}} \exp(i\omega_{0i}t + i\varphi_{0i}), \quad (9)$$

де p_{0i} – потужність коливань у стаціонарному режимі роботи МНС, який реалізується за умови $\Gamma_{0i} = \Gamma_i(p_{0i}) = 0$, $\omega_{0i} = \omega_i(p_{0i})$ – частота коливань намагніченості у стаціонарному режимі; φ_{0i} – початкова фаза коливань. Для випадку малих збурень, розв'язок рівняння (7) по аналогії з (9) будемо шукати у вигляді:

$$c_i(t) = \sqrt{p_i(t)} e^{i\varphi_i(t)} \approx \sqrt{p_{0i}} [1 + \rho_i(t)] e^{i\varphi_i(t)}, \quad (10)$$

де $\rho_i(t) \approx [p_i(t) - p_{0i}] / 2p_{0i}$ – безрозмірна мала флуктуація потужності i -го автогенератора на основі МНС, $\varphi_i(t)$ – фаза коливань i -го автогенератора.

Підставляючи (10) у (7) та представляючи величини $\omega_i(p_i)$, $\Gamma_i(p_i)$ у вигляді

$$\begin{aligned} \omega_i(p_i) &\approx \omega_{0i} + 2p_{0i} \frac{d\omega_i(p_{0i})}{dp_i} \rho_i(t), \\ \Gamma_i(p_i) &\approx \Gamma_{0i} + 2p_{0i} \frac{d\Gamma_i(p_{0i})}{dp_i} \rho_i(t), \end{aligned} \quad (11)$$

одержуємо комплексне рівняння для величин $\rho_{i,j}(t)$, $\varphi_{i,j}(t)$, яке може бути записане як система двох рівнянь (враховуються лише величини першого порядку мализни $\sim \Omega_{ij}$):

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_i}{dt} + 2G_i p_{0i} \rho_i &= \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \Omega_{ij} \frac{\sqrt{p_{0j}}}{\sqrt{p_{0i}}} e^{-i\varphi_i} e^{i\varphi_j} e^{i\beta_{ij}} \right\} + \\ &+ \operatorname{Re} \left\{ \Omega_{im} \frac{\sqrt{p_{0m}}}{\sqrt{p_{0i}}} e^{-i\varphi_i} e^{i\varphi_m} e^{i\beta_{im}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_i}{dt} - \omega_{0i} - 2N_i p_{0i} \rho_i &= \\ &= \operatorname{Im} \left\{ -\Omega_{ij} \frac{\sqrt{p_{0j}}}{\sqrt{p_{0i}}} e^{-i\varphi_i} e^{i\varphi_j} e^{i\beta_{ij}} \right\} + \\ &+ \operatorname{Im} \left\{ -\Omega_{im} \frac{\sqrt{p_{0m}}}{\sqrt{p_{0i}}} e^{-i\varphi_i} e^{i\varphi_m} e^{i\beta_{im}} \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

де $N_i = \frac{d\omega_i(p_{0i})}{dp_i}$, $G_i = \frac{d\Gamma_i(p_{0i})}{dp_i}$. Введемо коефіцієнт згасання флуктуацій потужності $\Gamma_i = 2G_i p_{0i}$ та безрозмірний нелінійний зсув частоти $\nu_i = N_i / G_i$, тоді система рівнянь (12) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_i}{dt} + \Gamma_{0i} \rho_i &= \\ &= \Omega_{ij} \frac{\sqrt{p_{0j}}}{\sqrt{p_{0i}}} \cos(\beta_{ij} + \varphi_j - \varphi_i) + \\ &+ \Omega_{im} \frac{\sqrt{p_{0m}}}{\sqrt{p_{0i}}} \cos(\beta_{im} + \varphi_m - \varphi_i), \\ \frac{d\varphi_i}{dt} - \omega_{0i} - \nu_i \Gamma_{0i} \rho_i &= \\ &= -\Omega_{ij} \frac{\sqrt{p_{0j}}}{\sqrt{p_{0i}}} \sin(\beta_{ij} + \varphi_j - \varphi_i) - \\ &- \Omega_{im} \frac{\sqrt{p_{0m}}}{\sqrt{p_{0i}}} \sin(\beta_{im} + \varphi_m - \varphi_i). \end{aligned} \quad (13)$$

Отримана система рівнянь (12) відповідає моделі «потужність – фаза» для взаємодіючих неізохронних автогенераторів. Коректність цієї моделі визначається умовою $|\rho_{i,j}(t)| \ll 1$. Ця модель може бути додатково спрощена, якщо ввести ефективну фазу коливань:

$$\Phi_{i,j}(t) = \varphi_{i,j}(t) + \nu_{i,j} p_{i,j}(t). \quad (14)$$

Рівняння для ефективної фази $\Phi_i = \Phi_i(t)$ має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_i}{dt} - \omega_{0i} &= \\ &= \Omega_{ij} \frac{\sqrt{p_{0j}}}{\sqrt{p_{0i}}} \left(\nu_i \cos(\beta_{ij} + \varphi_j - \varphi_i) - \right. \\ &\quad \left. - \sin(\beta_{ij} + \varphi_j - \varphi_i) \right) + \\ &+ \Omega_{im} \frac{\sqrt{p_{0m}}}{\sqrt{p_{0i}}} \left(\nu_i \cos(\beta_{im} + \varphi_m - \varphi_i) - \right. \\ &\quad \left. - \sin(\beta_{im} + \varphi_m - \varphi_i) \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Якщо тепер знехтувати відмінністю між

звичайними фазами $\varphi_{i,j}(t)$ та ефективними фазами $\Phi_{i,j}(t)$ можна одержати спрощену, так звану, «фазову» модель:

$$\frac{d\Phi_i}{dt} - \omega_{0i} = F_{ij}(\Phi_j - \Phi_i) + F_{in}(\Phi_n - \Phi_i), \quad (16)$$

де

$$F_{ij}(\Phi_j - \Phi_i) = \Omega_{ij} \frac{\sqrt{p_{0j}}}{\sqrt{p_{0i}}} \left(\nu_i \cos(\beta_{ij} + \Phi_j - \Phi_i) - \sin(\beta_{ij} + \Phi_j - \Phi_i) \right). \quad (17)$$

Ця модель є коректною за умови $|\nu_{i,j}| |\rho_{i,j}| \ll 1$.

Саме нею будемо користуватись далі.

Введемо нові величини $\Phi_{ij\pm}(t) = \Phi_i(t) \pm \Phi_j(t)$. Тоді виходячи з (16) одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_{ij+}}{dt} &= \omega_{ij+} + F_{ij+}(\Phi_{ij-}, \Phi_{in-}, \Phi_{jn-}), \\ \frac{d\Phi_{ij-}}{dt} &= \omega_{ij-} + F_{ij-}(\Phi_{ij+}, \Phi_{in+}, \Phi_{jn+}), \end{aligned} \quad (18)$$

де

$$\begin{aligned} \omega_{ij\pm} &= \omega_{0i} \pm \omega_{0j}, \\ F_{ij+}(\Phi_{ij-}, \Phi_{in-}, \Phi_{jn-}) &= \\ &= F_{ij}(-\Phi_{ij-}) + F_{in}(-\Phi_{in-}) \pm \\ &\pm F_{jn}(\Phi_{ij-}) \pm F_{jn}(-\Phi_{jn-}) \end{aligned} \quad (19)$$

Взаємна фазова синхронізація усіх трьох слабо зв'язаних МНС буде відбуватися за умови $\Phi_{ij-}, \Phi_{in-} = \text{const}$ для $\forall i, j, n$. Тоді з другого рівняння (18) відразу ж можна одержати значення величини смуг фазової синхронізації для різних пар МНС:

$$\begin{aligned} |\omega_{0i}(p_{0i}) - \omega_{0j}(p_{0j})| &= |F_{ij-}(\Phi_{ij-}, \Phi_{in-}, \Phi_{jn-})|, \\ |\omega_{0i}(p_{0i}) - \omega_{0n}(p_{0n})| &= |F_{in-}(\Phi_{ij-}, \Phi_{in-}, \Phi_{jn-})|. \end{aligned} \quad (20)$$

Очевидно, що синхронний стан усіх трьох МНС буде відповідати "перекриттю" умов (20). У випадку, коли одна з умов (20) виконується, а інша – ні, система буде знаходитись в кластерному стані.

Розглянемо самий простий варіант системи трьох взаємодіючих МНС – випадок, коли МНС розташовані у вершинах рівнобічного трикутника зі стороною довжиною l (рис. 3). Припустимо також, що усі параметри МНС окрім їх власних частот $\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}$ однакові, тобто виконуються співвідношення:

$$p_{01} = p_{02} = p_{03} = p_0, \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu,$$

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho, \quad \Omega_{12} = \Omega_{13} = \Omega_{23} = \Omega, \quad (21)$$

де ми від індексів i, j, n відразу перейшли до більш зручних індексів 1, 2, 3. Таку систему будемо називати системою трьох слабо взаємодіючих майже ідентичних МНС. Фазові зсуви β_{ij} для такої системи визначаються другим рівнянням (8) і, у першому наближенні, можуть вважатись однаковими для всіх МНС:

$$\beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{23} = \beta, \quad (22)$$

де $\beta = \langle \omega \rangle \tau$, $\langle \omega \rangle$ – характерна частота спінової хвилі, τ – її групово швидкість, $\tau = l/u$.

Для такої системи трьох МНС зручно використати критерії (1)–(2). Покладаючи, наприклад, $i \rightarrow 1, j \rightarrow 2, n \rightarrow 3$, отримаємо з (20):

$$\begin{aligned} |\Delta\omega_{12}| &= |f_{12}(\Delta\Phi_{12}, \Delta\Phi_{13})|, \\ |\Delta\omega_{13}| &= |f_{13}(\Delta\Phi_{12}, \Delta\Phi_{13})|, \end{aligned} \quad (23)$$

де $\Delta\omega_{12} = \omega_{01} - \omega_{02}$, $\Delta\omega_{13} = \omega_{01} - \omega_{03}$, $\Delta\Phi_{12} = \Phi_1 - \Phi_2$, $\Delta\Phi_{13} = \Phi_1 - \Phi_3$. Величину $\Delta\Phi_{23} = \Phi_2 - \Phi_3$ можна не вказувати параметром функцій f у (23), оскільки її можна представити як $\Delta\Phi_{23} = \Delta\Phi_{13} - \Delta\Phi_{12}$.

Ми одержали систему з двох нелинійних рівнянь з двома невідомими $\Delta\Phi_{12}$, $\Delta\Phi_{13}$, яка може бути розв'язана, якщо параметр β відомий. Далі не будемо розглядати конкретні випадки таких систем (що, наприклад, зручно провести у рамках числового експерименту), а спробуємо з'ясувати загальні властивості розв'язків системи рівнянь (23).

Очевидно, що у випадку, коли усі МНС синхронізовані, такий стан системи якісно не

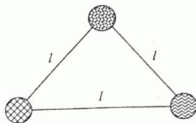


Рис. 3 Система з трьох взаємодіючих майже однакових МНС, розташованих на відстані l одна від одної у момент часу $t=0$ (синхронізація ще не відбулась). Кожна з МНС схематично представлена зафарбованим колом. Різні зафарбування відповідає різним станам МНС.

відрізняється від синхронізованого стану системи з двох МНС. Отже для системи з трьох (і навіть більшої кількості) синхронізованих МНС можна написати узагальнену формулу для смуги фазової синхронізації, яка нагадує відповідну формулу для двох МНС:

$$|\Delta\omega| < 2\Omega_{\text{eff}} \sqrt{1+\nu^2} \left| \cos(\beta_{\text{eff}} - \arctan \nu) \right|, \quad (24)$$

де Ω_{eff} та β_{eff} – ефективні амплітуда та фаза коефіцієнтів зв'язку, які можна знайти шляхом числового моделювання. Враховуючи, що детальний розгляд аналогічного виразу для двох МНС проведений у роботі [28], далі розглянемо лише особливості формули (24) для випадку трьох МНС.

За умови, що $|\Delta\omega_2| < |\Delta\omega|$, $|\Delta\omega_3| < |\Delta\omega|$ усі МНС синхронізовані і працюють на одній частоті. Якщо ж частота однієї з МНС, наприклад, частота ω_{02} другої МНС, буде такою, що умова $|\Delta\omega_2| < |\Delta\omega|$ виконуватись не буде, система перейде до кластерного стану. Відповідна якісна діаграма станів для системи з трьох майже однакових МНС наведена на рис. 4.

Якщо одна з МНС знаходиться у суттєво інших умовах, ніж інші дві МНС, наприклад, за рахунок того, що одна з МНС дуже віддалена від двох інших близько розташованих МНС, динаміка системи з трьох МНС нагадує динаміку системи з двох МНС. Типова якісна залежність для цього випадку зображена на рис. 5. Той факт, що залежність $|\Delta\omega|(I)$ для трьох МНС відрізняється від аналогічної залежності для двох МНС свідчить про вплив третьої віддаленої МНС (див. рис. 5).

Якщо відстань від однієї МНС до двох інших близько розташованих МНС буде зростати, зв'язок з цією віддаленою МНС буде сильно слабшати за рахунок експоненціальної залежності у (8). І при відстанях $l_{13}, l_{23} > 10l_{12}$, де l_{ij} – відстань між i -ю та j -ю МНС, величини Ω_{eff} та β_{eff} у моделі (24) будуть близькі до величин Ω та β для системи двох МНС.

Висновки

Запропоновано критерії оцінки ефективності взаємної фазової синхронізації кількох МНС, проведено теоретичний аналіз для системи трьох майже однакових МНС і встановлено:

1) Синхронізований стан системи з $N \geq 3$ МНС може бути описаний за допомогою тієї ж

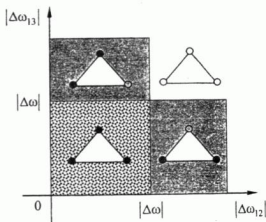


Рис. 4 Діаграма станів для системи з трьох взаємодіючих майже однакових МНС. Кожна з МНС схематично представлена зафарбованим колом (різне зафарбування відповідає різним станам МНС). – область, що відповідає синхронізованому стану системи, – область, що відповідає кластерному стану системи.

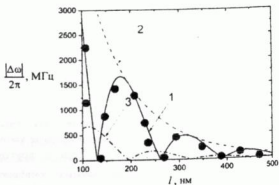


Рис. 5 Типова залежність частотної смуги взаємної фазової синхронізації двох МНС від відстані l між ними (1), залежність коефіцієнта зв'язку від відстані l (2), залежність збільшеної у 10 разів частотної смуги фазової синхронізації двох МНС за відсутності нелінійного зсуву частоти ($\eta = 0$) від відстані l між ними (3). Точки – результати моделювання для трьох майже однакових МНС, дві з яких знаходяться на відстані l , а інша на відстані $10l$.

моделі, що і синхронізований стан для двох МНС, але із заміною у моделі амплітуди Ω та фази β коефіцієнта зв'язку на їх ефективні значення Ω_{eff} та β_{eff} .

2) Запропоновані критерії можуть бути використані для опису як стану системи, в якому

ує МНС синхронізовані, так і кластерного стану системи.

3) Якщо у системі з трьох взаємодіючих МНС, одна з МНС суттєво віддалена від двох інших, наприклад, коли $l_{13}, l_{23} > 10l_{12}$, де l_{ij} – відстань між i -ю та j -ю МНС, величини Ω_{eff} та β_{eff} близькі до відповідних значень Ω та β . Із збільшенням співвідношення $(l_{13}, l_{23})/l_{12}$ Ω_{eff} та β_{eff} асимптотично збігаються до Ω та β .

Робота була підтримана грантом М/212-2011 Державного агентства з питань науки, інновацій та інформатизації України та грантом UU34/008 Державного фонду фундаментальних досліджень України.

Список використаних джерел

1. *Slonczewski J.C.* Current-driven excitation of magnetic multilayers / J.C. Slonczewski // J. Magn. Magn. Mater. – 1996. – 159. – P. L1–L7.
2. *Berger L.* Emission of spin waves by a magnetic multilayer traversed by a current / L. Berger // Phys. Rev. – 1996. – B54. – P. 9353–9358.
3. *Katine J.A.* Current-driven magnetization reversal and spin-wave excitations in Co/Cu / J.A. Katine, F.J. Albert, R.A. Buhrman, E.B. Myers, D.C. Ralph // Phys. Rev. Lett. – 2000. – 84. – P. 3149–3152.
4. *Urazhdin S.* Current-Driven Magnetic Excitations in Permalloy-Based Multilayer Nanopillars / S. Urazhdin, N.O. Birge, W.P. Pratt, Jr., J. Bass // Phys. Rev. Lett. – 2003. – 91. – P. 146803.
5. *Kiselev S.I.* Microwave oscillations of a nanomagnet driven by a spin-polarized current / S.I. Kiselev, J.C. Sankey, I.N. Krivorotov, N.C. Emley, R.J. Schoelkopf, R.A. Buhrman, D.C. Ralph // Nature. – 2003. – 425. – P. 380–383.
6. *Lee K.J.* Excitations of incoherent spin waves due to spin-transfer torque / K.J. Lee, A. Deac, O. Redon, J.-P. Nozieres, B. Dieny // Nature Mater. – 2004. – 3. – P. 877–881.
7. *Krivorotov I.N.* Time-domain measurements of nanomagnet dynamics driven by spin-transfer torques / I.N. Krivorotov, N.C. Emley, J.C. Sankey, S.I. Kiselev, D.C. Ralph, R.A. Buhrman // Science. – 2005. – 307. – P. 228–231.
8. *Ruotolo A.* Phase-locking of magnetic vortices mediated by antivortices / A. Ruotolo, V. Cros, B. Georges, A. Dussaux, J. Grollier, C. Deranlot, R. Guillemet, K. Bouzehouane, S. Fusil, A. Fert // Nature Nanotech. – 2009. – 4. – P. 528–532.
9. *Tulapurkar A.A.* Spin torque diode effect in magnetic tunnel junctions / A.A. Tulapurkar, Y. Suzuki, A. Fukushima, H. Kubota, H. Maehara, K. Tsunekawa, D.D. Djayaprawira, N. Watanabe, S. Yuasa // Nature. – 2005. – 438. – P. 339–342.
10. *Ishibashi S.* Large diode sensitivity of CoFeB/MgO/CoFeB magnetic tunnel junctions / S. Ishibashi, T. Seki, T. Nozaki, H. Kubota, S. Yakata, A. Fukushima, S. Yuasa, H. Maehara, K. Tsunekawa, D.D. Djayaprawira, Y. Suzuki // Appl. Phys. Express. – 2010. – 3. – P. 073001.
11. *Wang C.* Sensitivity of spin-torque diodes for frequency tunable resonant microwave detection / C. Wang, Y.-T. Cui, J.Z. Sun, J.A. Katine, R.A. Buhrman, D.C. Ralph // J. Appl. Phys. – 2009. – 106. – P. 053905.
12. *Cheng X.* Nonadiabatic stochastic resonance of a nanomagnet excited by spin torque / X. Cheng, C.T. Boone, J. Zhu, I.N. Krivorotov // Phys. Rev. Lett. – 2010. – 105. – P. 047202.
13. *Cheng X.* Spin Torque Diode Detectors with Sensitivity Exceeding that of Schottky Diodes / X. Cheng, C.T. Boone, J. Zhu, I.N. Krivorotov // Abstracts of the 55th Annual Conference on Magnetism and Magnetic Materials, EC-3, Atlanta, Georgia, USA, November 2010.
14. *Slavin A.* Nonlinear auto-oscillator theory of microwave generation by spin-polarized current / A. Slavin, V. Tiberkevich // IEEE Trans. on Magn. – 2009. – 45, № 4. – P. 1875–1918.
15. *Prokopenko O.* Spin-torque nano-oscillator as a microwave signal source / O. Prokopenko, E. Bankowski, T. Meitzler, V. Tiberkevich, A. Slavin // IEEE Magnetics Letters. – 2011. – № 2. – P. 3000104.
16. *Tang D.D.* Magnetic Memory. Fundamentals and Technology. / D.D. Tang, Y.-J. Lee. – N.-Y.: Cambridge University Press, 2010. – 208 p.
17. *Prokopenko O.* Noise properties of a resonance-type spin-torque microwave detector / O. Prokopenko, G. Melkov, E. Bankowski, T. Meitzler, V. Tiberkevich, A. Slavin // Appl. Phys. Lett. – 2011. – 99. – P. 032507.
18. *Прокопенко О.В.* Можливість аномальної температурної залежності порога чутливості мікрохвильового детектора на основі магнітних наноструктур в області низьких температур / О.В. Прокопенко, Д.І. Павлов // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2011. – 3. (прийнято до друку)
19. *Prokopenko O., Tiberkevich V., Slavin A.* The influence of thermal noise on a spin-torque microwave detector / O. Prokopenko, V.

- Tiberkevich, A. Slavin // *Phys. Rev. B.* – 2012. (in preparation)
20. *Погорілий А.М.* Спінтроніка. Основні явища. Тенденції розвитку / А.М. Погорілий, С.М. Рябенко, О.І. Товстоліткін // *Укр. фіз. журн. Огляди.* – 2010. – Т. 6, № 1. – С. 37–97.
 21. *Ralph D.C.* Spin transfer torques / D.C. Ralph, M.D. Stiles // *J. Magn. Magn. Mater.* – 2008. – 320. – P. 1190–1216.
 22. *Katine J.A.* Device implications of spin-transfer torques / J.A. Katine, E.E. Fullerton // *J. Magn. Magn. Mater.* – 2008. – 320. – P. 1217–1226.
 23. *Лихарев К.К.* Введение в динамику джозефсоновских переходов / К.К. Лихарев / М.: Наука, 1985. – 320 с.
 24. *Ivanyuta O.M.* Microwave detection using Josephson junction arrays integrated in a resonator / O.M. Ivanyuta, Y.I. Kishenko, O.V. Prokopenko, V.M. Raksha, A.M. Klushin // *Physica Status Solidi.* – 2005. – Vol. 2, № 5. – P.1688–1691.
 25. *Ivanyuta O.M.* The Effect of the External Magnetic Field on the Current-Voltage Characteristic of HTS Josephson Junction Arrays / O.M. Ivanyuta, O.V. Prokopenko, Y.I. Kishenko, V.M. Raksha, A.M. Klushin // *Journal of Low Temperature Physics.* – 2005. – Vol. 139, № 1/2. – P. 97–102.
 26. *Prokopenko O.* Mutual phase-locking of two spin-torque oscillators: Influence of time delay of a coupling signal / O. Prokopenko, V. Tyberkevych, A. Slavin // *Proceedings of the Europe International Magnetism Conference (Intermag 2008, May 4–8, 2008).* – Madrid (Spain). – DP-06. – P.682–683.
 27. *Прокопенко О.В.* Вплив запізнення сигналу на динаміку намагніченості двох зв'язаних магнітних наноконтактів / О.В. Прокопенко, Р.В. Верба // *Збірник наукових праць ІРЕ НАН України.* – 2010. – 6 с. (подано до друку).
 28. *Прокопенко О.В.* Взаємна фазова синхронізація двох нанорозмірних магнітних структур з урахуванням запізнення сигналу / О.В. Прокопенко // *Радіоелектроніка. Інформатика. Управління.* – 2010. – № 2. – С. 11–15.
 29. *Slavin A.N.* Nonlinear self-phase-locking effect in an array of current-driven magnetic nanocontacts / A.N. Slavin, V.S. Tiberkevich // *Physical Review B.* – 2005. – Vol. 72. – P. 092407 (4 p.).
 30. *Slavin A.N.* Theory of mutual phase-locking of spin torque nano-oscillators / A.N. Slavin, V.S. Tiberkevich // *Physical Review B.* – 2006. – Vol. 74. – P. 104401 (4 p.).
 31. *Kaka S.* Mutual phase-locking of microwave spin torque nano-oscillators / S. Kaka, M.R. Pufall, W.H. Rippard, T.J. Silva, S.E. Russek, J.A. Katine // *Nature.* – 2005. – 437. – P. 389–392.
 32. *Mancoff F.B.* Phase-locking in double-point-contact spin-transfer devices / F.B. Mancoff, N.D. Rizzo, B.N. Engel, S. Tehrani // *Nature.* – 2005. – 437. – P. 393–395.
 33. *Tiberkevich V.* Phase-locking and frustration in an array of nonlinear spin-torque nano-oscillators / V. Tiberkevich, A. Slavin, E. Bankowski, G. Gerhart // *Appl. Phys. Lett.* – 2009. – 95. – P. 262505.
 34. *Pikovsky A.* Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences / A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths. – Cambridge: University Press, 2007. – 442 p.
 35. *Анісімов І.О.* Коливання та хвилі: підручник / І.О. Анісімов. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2009. – 399 с.
 36. *Анищенко В.С.* Знакомство с нелинейной динамикой / В.С. Анищенко. – М.: Изд-во ЛКИ, 2008. – 224 с.
 37. *Анищенко В.С.* Регулярные и хаотические автоколебания. Синхронизация и влияние флуктуаций / В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова. – М.: Изд-во "Интеллект", 2009. – 336с.
 38. *Slavin A.* Approximate theory of microwave generation in a current-driven magnetic nanocontact magnetized in an arbitrary direction / A. Slavin, P. Kabos // *IEEE Trans. on Magn.* – 2005. – 41. – P.1264–1273.

Надійшла до редколегії 20.12.2011

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 532.536

Атамас Н.О. др. ф.-м. н., Цханг Фенг-Жой др.
ф.-м. н., Хі Бай-Сонг др. ф.-м. н.**Дослідження впливу фізичних властивостей іонів
на локальну структуру сильно розведених розчинів
електролітів за T=300K**

Метод молекулярної динаміки (МД) використано для дослідження впливу фізичних властивостей іонів на формування локальної структури сильно розведених розчинів електролітів за T=300K. Проведені дослідження підтвердили, що не існує прямої кореляції між масою іонів та їх взаємодією із молекулами води, що і підтверджує експериментальні дані. Встановлено, що за умови відсутності взаємодій між молекулами електроліту у воді, та його повної дисоціації у досліджуваних водних модельних системах можуть утворюватись комплекси $\text{HO} \cdots (\text{HCL})^+$, $\text{HO} \cdots (\text{HBr})^+$ або $\text{HO} \cdots (\text{HI})^+$ між молекулами води та іонами через гідроксильну групу води.

Ключові слова: водні розчини, іони, катіони, електроліти, локальна структура, радіальні функції розподілу.

E-mail: atamasphys@univ.kiev.ua

Вивчення властивостей водних розчинів іонів є важливим для багатьох областей знань, насамперед, для фізичної хімії та біофізики. У межах найпростішої моделі, що описує властивості нескінченно розведених іонних розчинів, вважається, що рухливість іонів пропорційна радіусу іонів, що і враховано у рівнянні Стокса. В свою чергу, експериментальні спостереження показують, що рухливість іонів у водних розчинах не є пропорційною до радіусу іонів. З'ясувати причину розбіжностей між теоретичними уявленнями та одержаними експериментальними даними дозволяє використання комп'ютерного моделювання, яке дає можливість визначити структурні властивості сильно розведених водних розчинів електролітів на молекулярному рівні. Зважаючи на те, що одним із класичних напрямків досліджень фізичної хімії є дослідження руху та взаємодії іонів у розчинах при нескінченному розведенні та залежності властивостей розчину від розміру розчинених іонів представлена робота є актуальною.

N. Atamas Dr. Sci., Zhang Feng-Shou Dr. Sci.
Prof., Xie Bai-Song Dr. Sci. Prof.**The influence physical properties of the ions on
the structure properties water-electrolyte
solutions at T=300K**

The study of the water-electrolytes solution at T=300K and influence the ions on the changing of the net of hydrogen bonds of the water is of particular interest. The variation in the mobility of ions in solution as a functions of the electrolyte properties has been studied by means of molecular dynamics simulations method with using DL POLY program. The present study includes results from MD simulations study of two-component systems water-dissolved molecule (KCl, KBr and KI) at T=300 K. Conducted calculations allowed us to obtain information on the structural characters of diluted water-solute molecule systems. From radial distribution functions (RDF) the analysis of the local structure of water systems were done. The parameters of hydrogen bonds and the size of first and second hydrations sphere were determined.

Key Words: water solutions, molecular dynamics, cation, anion, radial distribution function, local structure.

розчинених іонів представлена робота є актуальною. А використання комп'ютерного моделювання, а саме, методу молекулярної динаміки дозволяє дослідити на молекулярному рівні вплив розміру іонів на формування локальної структури водних розчинів електролітів на структурні властивості досліджуваних водних розчинів за температури T=300K.

Метою представленої роботи є дослідження впливу фізичних властивостей іонів на формування локальної структури сильно розведених водних розчинів електролітів за T=300K.

Метод дослідження

Інформація про локальну структуру рідини та енергетичні властивості розчину може бути одержана як експериментальним так і теоретичним шляхом. Комп'ютерне моделювання дає можливість проводити детальний аналіз локальної структури складних багатокомпонентних систем, якими і є сильно розведені водні розчини електролітів. За допомогою методу молекулярної динаміки були

Представлено: акад. НАН України,
д.ф.-м.н., проф. Л.А. Булавін

розраховані радіальні функції розподілу молекул у рідині, які в свою чергу дають інформацію про довжини міжатомних зв'язків та про число найближчих сусідів. Також цей метод дозволяє розрахувати повну енергію міжмолекулярної взаємодії, її складові та проаналізувати термодинамічні властивості досліджуваних системи.

Модель

При проведенні досліджень вважалося, що міжмолекулярна взаємодія в розчині описується наступним виразом [1]:

$$U = U_L + U_{Coul} = \sum_i 4\epsilon_i \left[\left(\frac{\sigma_i}{r_{ij}} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma_i}{r_{ij}} \right)^6 \right] + \sum_{ij} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (1)$$

де σ_i, ϵ_i - параметри Леннарда-Джонсової взаємодії, r_{ij} - відстань між взаємодіючими частками, q_i - заряд i -го частки. У рівнянні (1) підсумовування відбувається по всіх частках системи. При проведенні розрахунків покладалося, що всі атоми в системі мають розмір, електричний заряд, а міжатомні зв'язки в молекулах є непружинними. Як молекули води так і йони та катіони представлялися Леннарда-Джонсовими частками і взаємодія між ними описувалася за допомогою OPLS-потенціалів.

Деталі комп'ютерного експерименту

При проведенні комп'ютерного експерименту сильно розведений розчин водний розчин було представлено 255 молекулами води та однією молекулою розчиненої речовини (KI, KCL, KBr). Система вода-електроліт моделювалась за температури $T=300K$ з використанням програмного пакету DL_POLY [2]. Взаємодія між атомами розраховувалася за допомогою (2). Всі розрахунки проводились на наступною схемою: $1 \cdot 10^6$ кроків для врівноваження системи в NVT ансамблі, наступні 10^6 кроків – для одержання структурних даних та енергетичних властивостей досліджуваної системи.

У табл.2 дані значення параметрів $\sigma(A)$ та ϵ (к/мол) для атомів молекул електролітів. Для визначення параметрів взаємодії між нетотожними атомами використовувалося комбінаційне правило:

Таблиця 1.

Геометричні параметри для молекули води [3].

Мол.	Зв'язок	Довжина, Å	Кут	Кут, град
H-O-H	ОН	1.00	$\angle \text{НОН}$	109.47

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \quad \epsilon_{ij} = \sqrt{\epsilon_i \epsilon_j} \quad (2)$$

де σ_i - потенціал для атомів "i"-го сорту, σ_j - потенціал для атомів "j"-го сорту, σ_{ij} - потенціал для молекули, що складається з атомів "i"-го і "j"-го сортів.

Таблиця 2.

Заряди q (е) та параметри (Леннард-Джонсовський параметр $\sigma(A)$ та ϵ (к/мол)) для атомів молекул води, KI, KCL, KBr.

Атом	q	σ	ϵ	M
H	0.4238	0.0	0.0	1
O	-0.8436	3.169	0.65	15,99
K	+1	2.35	0.1	9,098
Cl	-1	4.4	0.1	35,45
Br	-1	3.85	0.1	79,904
I	-1	4.168	0.1	126.9

Одержані результати та їх аналіз

Інформація про локальну структуру рідини може бути отримана як експериментальним, а саме методом розсіювання нейтронів або рентгенівського розсіювання, так і теоретичним шляхом за допомогою розрахунків радіальної функції розподілу (РФР), положення піків якої ототожнюються з локальною межмолекулярною структурою рідини. В результаті комп'ютерного експерименту одержували радіальну функцію розподілу (РДФ) $G_{xy}(r)$, що характеризує імовірність перебування атомів сорту "y" навколо атомів сорту "x" і є функцією відстані:

$$G_{xy} = \frac{\langle N_y(r, R + dR) \rangle}{\rho_y 4\pi R^2 dR} \quad (3)$$

де чисельник дорівнює середньому числу атомів сорту "y" у сфері радіуса між R і $R+d$, а знаменник нормалізує розподіл таким чином, що $g_{xy} = 1$ при N_y і дорівнює об'ємної щільності ρ_y у роботі в якості "структурних маркерів".

використовувалися іони та катіони досліджуваних солей.

В результаті проведеного комп'ютерного експерименту одержували РФР, які відповідають усім можливим взаємодіям у досліджуваних системах. Особлива увага приділялась взаємодіям, які можуть суттєво впливати на локальну структуру води в околі іонів та катіонів у воді, а саме взаємодіям між аніонами та катіонами у розглянутому в межах обраної моделі випадку дисоціації солі у воді, взаємодіям $K-O^W$, $K-H^W$ та $Br-O^W$, $Cl-O^W$, $I-O^W$, $Br-H^W$, $Cl-H^W$, $I-H^W$, взаємодіям між атомами молекул води.

Насамперед, розглянемо РФР, що представлені на рис.1, які характеризують взаємодію між іонами та катіонами, дисоційованого електроліту у воді за умови нескінченного розведення. Одержані дані показують, що найбільш ймовірною є взаємодія між іоном та катіоном у системі вода-KCL, а найменш ймовірною є взаємодія між катіоном та іоном у системі вода-KI.

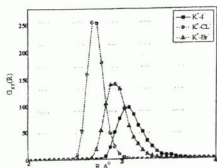


Рис.1. РФР для ймовірності знаходження іонів I^- , Cl^- , Br^- відносно катіону K^+ у нескінченно розведеному водному розчині KI, KCL, KBr за $T=300K$

Наступним класом взаємодій, які призводять до зміни локальної структури води в околі дисоційованих у воді молекул солей є взаємодії між катіоном та молекулами води, а саме взаємодії, $K-O^W$, $K-H^W$, відповідні РФР для яких представлені на рис.2. Представлені на рис.2 результати показують, що ймовірність знаходження аніонів у сильно розведених розчинах калієвих солей зменшується у напрямку $KBr \rightarrow KI \rightarrow KCL$. В цьому ж напрямку збільшується відстань між взаємодіючим аніоном та атомом кисню молекули води. Відстань між

іонами та оточуючими молекулами води складає 3,03 Å у випадку водних розчинів KBr та 3,18 Å та 3,28 Å у випадку розчинів KI та KCL.

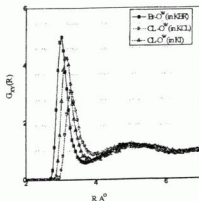


Рис.2. РФР для ймовірності знаходження іонів I^- , Cl^- , Br^- відносно атому кисню молекули води O^W у нескінченно розведених водних розчинах KI, KCL, KBr за $T=300K$

Слід зазначити, що розміри першої гідратаційної оболонки у також збільшуються у напрямку $KBr \rightarrow KI \rightarrow KCL$ з 3,0 Å до 3,3 Å. Розміри другої гідратаційної оболонки співпадають для всіх розглянутих водних систем.

РФР, які надані на рис.3. показують, що взаємодія між атомом водню молекули води та іонами дисоційованих солей у сильно розведених водних розчинах електролітів KI, KCL, KBr, має однакові тенденції як і у випадку взаємодії іонів з атомом кисню молекули води. А саме, найбільш ймовірною є кулонівська взаємодія між іоном Br^- та атомом водню молекули води, а найменш ймовірною взаємодія між іоном Cl^- та атомом водню молекули води. Згідно критерію утворення водневого зв'язку між іонами та оточуючими молекулами води утворюються стійкі воднево-зв'язані комплекси з довжиною 2,0 Å у випадку системи вода - KBr, 2,2 Å у випадку системи вода - KCL та 2,3 Å - KI. Розміри першої гідратаційної оболонки збільшуються при переході $KBr \rightarrow KI \rightarrow KCL$, а положення другої мінімуму, який визначає розміри другої гідратаційної оболонки є однаковими для усіх досліджуваних систем і він розташовується на відстані $R=4,2$ Å.

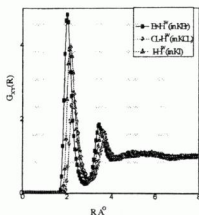


Рис.3. РДФ для ймовірності знаходження іонів Br^- , Cl^- , F^- відносно атому водню молекули води у нескінченно розведених водних розчинах KI, KCl, KBr за $T=300\text{K}$

Зважаючи на те, що перший та другий максимуми РДФ (рис.3) знаходяться на відстані меншій ніж $3,5 \text{ \AA}$ то слід вважати, що між молекулами води, що розташовуються у першій та другій гідратаційних оболонках можуть утворюватись водневі місточки, які призводять до ущільнення локальної структури води у околі іонів Br^- , I^- , Cl^- . Аналіз РДФ, представлених на рис.4 показує існування сильної кулонівська взаємодія між катіонами дисоційованих у воді солей електролітів, на що вказує ймовірність знаходження катіонів розчинених у воді солей KI, KCl, KBr, яка зростає із збільшенням молекулярної маси електроліту.

Таким чином встановлено, що ймовірність взаємодії між іонами та катіонами та взаємодія між катіонами та молекулами води сильно розведених водних розчинах за умови відсутності взаємодії із іншими іонами та катіонами, пропорційна масі та розміру іонів солей KCl, KBr, KI. В свою чергу, проведені розрахунки дозволили чітко встановити, що не існує прямої кореляції між масою іонів та їх взаємодією із молекулами води, що і підтверджує експериментальні дані відносно розчинення електролітів у воді.

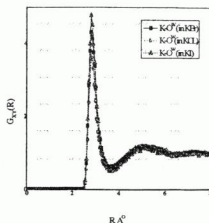


Рис.4. РДФ для ймовірності знаходження катіону K^+ відносно атому кисню молекули води у нескінченно розведених водних розчинах KI, KCl, KBr за $T=300\text{K}$

Встановлено, що ймовірність знаходження іонів у розглянутих водних системах відносно атомів молекул води зменшується при переході у наступному напрямку $\text{KBr} \rightarrow \text{KCl} \rightarrow \text{KI}$, у цьому ж напрямку збільшується значення положення першого максимуму, яке визначає відстань між взаємодіючими атомами. За умови відсутності взаємодій між молекулами електроліту у воді, та його повної дисоціації у досліджуваних водних модельних системах можуть утворюватись комплекси $\text{HO} \cdots (\text{HCl})$, $\text{HO} \cdots (\text{HBr})$ або $\text{HO} \cdots (\text{HI})$ між молекулами води та іонами.

Список використаних джерел

1. Allen MP, Tildesley D.Y. Computer Simulation of Liquids – Oxford: Clarenton Press, 1999. – 620p.
2. Forester T. R. The DL_POLY-2.0. Reference Manual and version 2.0 edition. – Warrington: CCLRC, Daresbury Laboratory, 1995. – 342 p.
3. Kohanoff J. Electronic Structure Calculations for Solids and Molecules: Theory and Computational Methods. – Cambridge: Cambridge University Press. – 2006. – 339 p.

Надійшла до редколегії 19.10.2011

УДК 551.593.9

Вашенко В.М.*, д.ф.м.н., Лоза Є.А., асп.

Вплив стратосферної температури на результати інструментального дистанційного вимірювання загального вмісту озону в атмосфері

В роботі розглянуто вплив температурних ефектів на результати дистанційних озонметричних супутникових та наземних спектрометричних вимірювань. Високий коефіцієнт кореляції між температурою на висотах стратосфери і інструментально визначеним значенням загального вмісту озону вимагає врахування температурної залежності коефіцієнтів поглинання озону та інших характеристик атмосфери при розв'язанні оберненої озонметричної задачі. Зроблено припущення про температурну природу більшості спостережуваних озонових аномалій і трендів.

Ключові слова: озон, температура, кореляція, коефіцієнт поглинання, похибка.

*E-mail: Daniilko@mail.ru

**E-mail: Loza@bmyr.kiev.ua

Вступ

Пасивні дистанційні спостереження складу та стану атмосфери засновуються на спектрометричному аналізі розсіяного в атмосфері Землі сонячного випромінювання, параметри якого залежать від спектральних коефіцієнтів розсіяння атмосферних компонент - кисню, азоту та малих атмосферних компонент, зокрема озону та аерозолів.

Коефіцієнти розсіяння оптичного випромінювання атмосферних газів залежать від багатьох факторів, зокрема, від їх концентрації, тиску, температури [1], зовнішнього електричного та магнітного полів [2], варіацій сонячної постійної [3], тощо. Крім того, виділяються ефекти, пов'язані із фрактальними флуктуаціями в атмосфері [4] і перекриттям спектрів поглинання, випромінювання і розсіяння різних атмосферних компонент.

Дистанційна спектроскопія атмосфери враховує ці та інші ефекти за допомогою

© Вашенко В.М., Лоза Є.А., 2011

Vaschenko V.M., Dr.Sci., Loza Ye.A., PhD stud.

Stratosphere temperature impact on results of instrumental remote total ozone content measurements

This paper considers temperature phenomena impact on results of remote ozone satellite and land spectrometric observations. High correlation between stratospheric temperature and instrumentally determined total ozone content requires taking into account temperature dependency of ozone absorption indexes and other atmosphere characteristics for inverse ozonometric problem solution. The assumption that the majority of observed ozone anomalies and trends are caused by temperature variations is made.

Keywords: ozone, temperature, correlation, absorption index, error.

моделей атмосфери які будуються в регіональних просторових масштабах атмосфери з певним врахуванням їх варіацій в залежності від пори року. Точність вимірювальних результатів, отриманих за допомогою таких моделей, задовільна для широт до 70°, для яких наявна певна кількість контактних експериментальних даних малих атмосферних компонент. Однак, точність озонметричних вимірювань погіршується в результаті аномальних атмосферних явищ, або недостатньої вивченості атмосфери на високих широтах.

Тому, зважаючи на екологічне, кліматичне і соціо-політичне значення озонowego шару Землі, у даній роботі розглядається зв'язок температурних ефектів із аномаліями та трендами інструментально-визначеного загального вмісту озону (ІЗВО), робляться висновки та припущення щодо інших можливих ефектів.

Представлено: член-кор. НАН України,
д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

Постановка задачі

Відомо, що форма спектральної смуги молекулярного поглинання, зокрема, її ширина і висота максимуму, залежать від зовнішніх умов – і, перш за все, від температури. Уширення лінії може бути неоднорідним в наслідок, найперше, ефекту Доплера, який сильно залежить від розподілу швидкостей молекул газу, тобто, від температури, і однорідним, в основному, за рахунок зіткнального уширення, яке також залежить від тиску та температури. В реальних умовах спостерігаються одночасно обидва типи уширення, які описуються контуром Фойхта [5, 6]. Спектральні смуги молекулярного поглинання можуть мати дуже складну форму внаслідок злиття різних коливальних чи обертальних енергетичних рівнів, прослідкувати залежність яких від температури є складною оптико-термодинамічною задачею.

Окрім класичних ефектів також варто відзначити ефект нелінійного збільшення перетину поглинання зі зростанням температури, ефект температурного гістерезису перетину поглинання, найперше, в наслідок гістерезисних змін хімічно-фазового складу атмосфери при зміні температури [7].

На озонOMETРИЧНІ спостереження також впливають температурні зміни оптичних властивостей інших компонент атмосфери в наслідок таких саме температурних ефектів в інших молекулярних і атомарних газах і іонах, а також значно складніше передбачуваних температурних змін у атмосферному аерозолі, наприклад, фазові переходи [7] і зміни хімічного складу внаслідок реакцій із навколишнім середовищем.

Природний діапазон температур атмосфери Землі складає більше 100 градусів – від +50 на екваторі до -70 на полюсах, що призводить до змін коефіцієнтів розсіяння озону і, таким чином, до нелінійного зростання похибок ІЗВО. Зареєстровані температурні рекорди приповерхневого повітря за останнє століття становлять -89,2°C (станція "Восток", Антарктика, 1983) та +57,8°C (Лівійська пустеля, Лівія, 1922). На рівні озонОВОГО максимуму (20-30 км) стратосферна температура менша від приповерхневої на 45-75 градусів, а тиск зменшується з 1000 до 20-100 мБар.

Температурі зміни коефіцієнтів поглинання озону

Багатьма авторами наголошується важливість знання експериментальної залежності ефективного перерізу розсіяння та поглинання озону для точного визначення пропускання атмосфери у видимій та УФ областях спектра [8, 9, 10, 11]. Зміни коефіцієнтів поглинання озону у видимому діапазоні при зміні температури на 80°C оцінюються в 40% на краях смуги поглинання [12] та до 10% в її центрі [13]. Зважаючи на факт що коефіцієнти поглинання, які використовуються у моделях атмосфери, відрізняються від останніх експериментальних результатів [14], з'являється необхідність провести детальні лабораторні дослідження залежності оптичних властивостей озону від температури та тиску, а також проводити синхронні вимірювання озону та температури атмосфери і розробити ефективну методику інтерпретації цих даних.

Теоретичні розрахунки [1] показують, що показники пропускання атмосфери, і, відповідно, коефіцієнти поглинання і розсіяння прямо пропорційні як температурі, так і тиску повітря в приземному шарі атмосфери. Особливо ці зміни актуальні в УФ діапазоні, де похибки визначення ІЗВО сягають порядку 15% при зміні температури на 40 градусів і порядку 6% при зміні тиску на 40 мБар.

Для широт вище 70° в наслідок впливу кліматичних умов і, насамперед, температури стратосфери, виникає неврахована раніше систематична похибка, яка на основі наземних [15] та супутникових [16] експериментальних досліджень оцінюється мінімум в 10% уникнути якої можливо лише за рахунок паралельних вимірів температури атмосфери. Добре відомо, що спектрометр Добсона та інші стандартні прилади для вимірювання озону дають значно занижені значення ІЗВО при зменшенні температури атмосфери на рівні озонОВОГО максимуму [17].

Використовуючи цю залежність можна запропонувати метод, заснований на вимірюванні інтенсивності крил спектральних ліній поглинання озону синхронно з вимірюванням загального вмісту озону [18; 19; 20].

Часові аномалії та тренди інструментально-визначеного загального вмісту озону

Така залежність ІЗВО від температури знаходить своє відображення у кореляції довготривалих тенденцій зниження ІЗВО [21] зі зниженням температури стратосфери на масштабі десятиліть [22, 23, 24]. Для висот озонového максимуму спостерігається висока позитивна кореляція ІЗВО та температури для квазі-дворічних та піврічних осциляцій ІЗВО за спектрометричними [25, 26, 27] та лідарними даними [28]. Короткоперіодична кореляція ІЗВО і температури також спостерігається на масштабах 13-27 діб [29, 30, 31]. Подібні закономірності знайдені і для інших газів [32].

На висотах 30-80 км спостерігається антикореляція ІЗВО з температурою, для інших висот - висока позитивна кореляція без часової затримки [25, 26, 27, 33, 34, 35, 36]. Динаміка ІЗВО і температури описуються однаковими фрактальними закономірностями [4].

В окремих експериментах коефіцієнт кореляції ІЗВО із приземною температурою сягає 0,9 [37, 38], однак така закономірність не є надійною, оскільки приповерхнева температура нелінійно і неоднозначно пов'язана із стратосферною.

Таким чином, велика кількість досліджень показує, що на усіх масштабах часу - від днів до десятиліть спостерігається висока кореляція між ІЗВО і температурою атмосфери, що вказує на їх близьку взаємопов'язаність. При цьому температурна зміна спектральних інтегральних коефіцієнтів розсіяння і поглинання атмосфери може помилково інтерпретуватися, як зміна загального вмісту озону, або інших малих атмосферних компонент в атмосфері.

Просторові аномалії інструментально- визначеного загального вмісту озону

Результати 14-річних досліджень атмосфери за допомогою космічних приладів TOMS (Total Ozone Mapping Spectrometer) та MSU (Microwave Sounding Unit) на висотах 150-50 мБар показали стійку високу просторово-часову кореляцію між стратосферною температурою та ІЗВО як для локальних явищ, так і для глобальних трендів

[39; 40]. Така ж залежність знайдена для раптового потепління стратосфери в Антарктиці у 2002 році, виявленого на основі даних космічного фур'є-спектрометра MIPAS (Michelson Interferometer for Passive Atmospheric Sounding) [41]. Такий ефект був виявлений також іншими наземними і космічними оптичними вимірюваннями [42]. Причому в різних регіонах спостерігається постійність у часі величини цієї кореляції, однак, ступінь кореляції змінюється в залежності від географічного місця спостереження [43].

В період з 30 листопада по 1 грудня 1999р. над Європою спостерігалось явище "міні-озонової діри", положення максимуму якої співпадало із положенням температурного мінімуму в тропопаузі [44]. Такий же локалізований прояв зв'язку ІЗВО-температура спостерігався у полярних областях у жовтні 1987р. та у листопаді 1999р. [45].

Дослідження озонових аномалій над Європою узимку 1991/92 років виявили кореляцію між температурою та інструментально визначеним парціальним тиском озону в атмосфері [46], а також таку саме кореляцію для краю полярного стратосферного вихору. Такий же ефект спостерігається і для Південної осциляції [47]. Синхронні спостереження на станції McMurdo на Антарктичному півострові також показують високу позитивну кореляцію ІЗВО і температури [48].

Локалізація наднизької температури стратосфери над Антарктидою пояснюється у роботі [49]. Отже, можна зробити висновок, що зменшення поглинальної здатності озонového шару в полярних областях впродовж полярної зими може бути спричинене не зменшенням фізичної кількості озону в атмосфері, але впливом стратосферної температури на коефіцієнти розсіяння та поглинання молекул озону та інших атмосферних компонент.

Ефект залежності ІЗВО від температури та інших компонент атмосфери повинен проявлятися для усіх оптичних методів, що базуються на вимірюванні поглинання або розсіювання оптичного випромінювання озonom. Внаслідок температурної зміни всі оптичні методи, включаючи УФ-спектрометрію та лідарні дослідження, будуть

корелювати між собою, але не зважаючи на це будуть мати велику неконтрольовану похибку.

Інерційні температурні ефекти у озоносфері

Варто відзначити, що кореляція між ІЗВО та температурою є нелінійною [50]. Більше того, окрім синхронної залежності ІЗВО в атмосфері від температури існують також інші інерційні температурні явища.

Стан озонного шару суттєво впливає на температуру атмосфери - чим більші коефіцієнти поглинання і вміст озону в атмосфері, тим більшу енергію сонячного випромінювання він поглинає, змінюючи температуру атмосфери. Ще більш інерційні ефекти пов'язані із залежністю хімічних реакцій із участю озону [22], а також його ізотопного складу від температури стратосфери [51; 52].

На коротких проміжках часу при зміні сонячного потоку УФ-випромінювання на низьких широтах за даними SBUV (Solar Backscatter Ultraviolet Instrument) та SAMS (Stratospheric and Mesospheric Sounder) встановлених на Nimbus 7 показана кореляція ІЗВО із варіаціями потоку сонячного випромінювання від 0,3 до 0,6 із фазовим зсувом від 3 до 13 днів на різних висотах [53; 54; 55]. Знайдені 27-денні варіації у просторовому розподілі ІЗВО, пов'язані із обертанням Сонця [56].

Динаміка атмосфери та атмосферний аерозоль

Під час піщаних бурь у пустелях було знайдено, що ІЗВО корелює із аерозольним станом атмосфери [57]. На основі дослідження внутрішньорічних синхронних варіацій ІЗВО і температури виявлено зв'язок цих параметрів із аерозольним станом атмосфери [58, 59]. Існує думка, що температурні та аерозольні зміни у атмосфері і варіації сонячної активності зіграли найбільшу роль у зниженні ІЗВО у 1979-1993 роках [60; 61].

Установлений надійний зв'язок ІЗВО і інтенсивності вітру [62, 63], який деякими авторами пов'язується із паралельним охолодженням стратосфери [64]. Неодноразово в науковій літературі відмічається суттєвий

вплив динаміки атмосфери на ІЗВО [65; 66; 67; 68; 69].

Висновки

1. Температура нижньої стратосфери суттєво впливає на інструментально-визначені значення загального вмісту озону внаслідок температурних змін коефіцієнтів поглинання і розсіювання озону. Сучасні вимірювальні методики не враховують температурний вплив при визначенні загального вмісту озону що призводить до похибок його визначення не менше 15%-20%, особливо у полярних областях. Тому необхідні ретельні експериментальні дослідження температурної залежності коефіцієнтів розсіювання озону і врахування їх у теоретичних моделях.

2. Висока позитивна кореляція між інструментально-вимірним загальним вмістом озону і температурою стратосфери спостерігається як у просторі, так і у часі. Коефіцієнти кореляції інструментально-визначеного загального вмісту озону з температурою стратосфери за оцінками різних авторів мають значення від 0,6 до 0,9, а це означає, що систематична похибка визначення інструментально-визначеного загального вмісту може сягати 90% і більше.

3. Аномальне або сезонне пониження температури стратосфери призводить до ефекту зменшення інструментально-визначеного загального вмісту озону. В результаті, явище «озонових дір» можна пояснити оптико-температурним ефектом за рахунок зміни коефіцієнтів поглинання та розсіювання, а не зміни кількості молекул озону. Особливо це актуально в Антарктиці і Арктиці, де зенітні кути Сонця великі та дуже низькі зимові температури в стратосфері.

4. Виміряні дистанційними оптичними методами інструментальні значення загального вмісту озону також можуть змінюватися в результаті зміни динаміки атмосфери, або через температурну чи сезонну зміну властивостей інших атмосферних компонент, насамперед аерозолі.

5. Для того, щоб уникнути систематичних похибок і уточнити реальну фізико-хімічну природу озонових дір і планетарних хвиль необхідно розробити вимірювальні комплекси для синхронного дослідження загального

вмісту озону, температури і характеристик аерозолі, а також вдосконалити теоретичний апарат озонетрії для врахування цих факторів.

Список використаних джерел

1. Е.І.Терез, Г.А.Терез, В.М.Ващенко, А.В.Козак, Ж.І.Патлашенко, Є.А.Лоза Вплив температури та тиску на точність визначення параметрів атмосфери при фотометричних спостереженнях в Антарктиці // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2009 - №4. – с.229-234.
2. Arthur Adel. Infrared Parameters of Atmospheric Ozone and the Great Geomagnetic Storm of 1953 // Journal of Geophysical Research, Vol. 100, NO. A2, P. 1595–1596, 1995
3. Terez E.I., Terez G.A. The connection between solar activity and long-term trends of total ozone in Northern Hemisphere // J. of Atmosph. and Terr. Phys. - 1996. - V.58 - 1849-1845.
4. A. F. Tuck, S. J. Hovde. Fractal Behavior of Ozone, Wind and Temperature in the Lower Stratosphere // Geophysical Research Letters, Vol. 26, NO. 9, P. 1271–1274, 1999
5. Peach, G. "Theory of the pressure broadening and shift of spectral lines" // Advances in Physics 30 (3): 367–474. doi:10.1080/00018738100101467, 1981
6. Бори М. Вольф Э. Основы оптики // М:Наука, 1973, 713с.
7. C. L. Badger, I. George, P. T. Griffiths, C. F. Braban, R. A. Cox, and J. P. D. Abbatt Phase transitions and hygroscopic growth of aerosol particles containing humic acid and mixtures of humic acid and ammonium sulphate // Atmos. Chem. Phys., 6, 755–768, 2006
8. Parkinson W.H., Yoshino K., Freeman D.E. Absolute Absorption Cross Section Measurements of Ozone and the Temperature Dependence at Four Reference Wavelengths Leading to Renormalization of the Cross Section between 240 and 350 nm. <http://stinet.dtic.mil/oai/oai?&verb=getRecord&metadataPrefix=html&identifier=ADA199737>
9. J. Malicet, D. Daumont, J. Charbonnier, C. Parisse, A. Chakir and J. Brion. Ozone UV spectroscopy. II. Absorption cross-sections and temperature dependence // Journal of Atmospheric Chemistry Volume 21, Number 3 / July, 1995 P.263-273
10. Raymond C. Smith, Zhengming Wan, Karen S. Baker. Ozone Depletion in Antarctica: Modeling Its Effect on Solar UV Irradiance Under Clear-Sky Conditions // Journal of Geophysical Research, Vol. 97, NO. C5, P. 7383–7397, 1992;
11. K. Yoshino, J. R. Esmond, D. E. Freeman, W. H. Parkinson. Measurements of absolute absorption cross sections of Ozone in the 185 to 254 nm wavelength region and the temperature dependence // Journal of Geophysical Research, Vol. 98, NO. D3, P. 5205–5212, 1993
12. James B. Burkholder, Ranajit K. Talukdar. Temperature dependence of the ozone absorption spectrum over the wavelength range 410 to 760 nm // Geophysical Research Letters, Vol. 21, NO. 7, P. 581–584, 1994
13. Shinichi Enami, Junya Ueda, Yukio Nakano, Satoshi Hashimoto, Masahiro Kawasaki. Temperature-dependent absorption cross sections of ozone in the Wulf-Chappuis band at 759–768 nm // Journal of Geophysical Research, Vol. 109, D05309, doi:10.1029/2003JD004097, 2004
14. Bass, A. M.; Paur, R. J. Absorption cross-section of ozone as function of temperature // Quadrennial International Ozone Symposium, Boulder, CO, August 4-9, 1980, Proceedings. Volume 1. (A82-36401 17-46) Boulder, CO, International Association of Meteorology and Atmospheric Physics, 1981, p. 140-145.
15. L. N. Lamsal, M. Weber, G. Labow, J. P. Burrows. Influence of ozone and temperature climatology on the accuracy of satellite total ozone retrieval // Journal of Geophysical Research, Vol. 112, D02302, doi:10.1029/2005JD006865, 2007
16. John J. Olivero, Robert A. Barnes. Satellite Ozone Comparisons: Effects of Pressure and Temperature // Journal of Geophysical Research, Vol. 96, NO. D3, P. 5091–5098, 1991
17. G. Bernhard, R. D. Evans, G. J. Labow, S. J. Oltmans. Bias in Dobson total ozone measurements at high latitudes due to approximations in calculations of ozone absorption coefficients and air mass // Journal of Geophysical Research, Vol. 110, D10305, doi:10.1029/2004JD005559, 2005

18. Clark, C. Canas, T. Clark, A. Determination of ozone temperature by neural network // *Pattern Recognition*, 1994. Vol. 2 - Conference B: Computer Vision & Image Processing., Proceedings of the 12th IAPR International;
19. J. B. Kerr, New methodology for deriving total ozone and other atmospheric variables from Brewer spectrophotometer direct sun spectra // *Journal of Geophysical Research*, Vol. 107, NO. D23, 4731, doi:10.1029/2001JD001227, 2002;
20. James B. Kerr, John M. Davis. New methodology applied to deriving total ozone and other atmospheric variables from global irradiance spectra // *Journal of Geophysical Research*, Vol. 112, D21301, doi:10.1029/2007JD008708, 2007
21. Axel Gabriel, Dieter Peters, Ingo Kirchner, Hans-F. Graf. Effect of zonally asymmetric ozone on stratospheric temperature and planetary wave propagation // *Geophysical Research Letters*, Vol. 34, L06807, doi:10.1029/2006GL028998, 2007
22. Tango in the Atmosphere: Ozone and Climate Change. By Jeannie Allen, NASA Earth Observatory, February 2004 // <http://www.theozonehole.com/climate.htm>
23. Sylvia H. E. Hare, L. J. Gray, W. A. Lahoz, A. O'Neill, L. Steenman-Clark. Can stratospheric temperature trends be attributed to ozone depletion? // *Journal of Geophysical Research*, Vol. 109, D05111, doi:10.1029/2003JD003897, 2004
24. A. J. Miller, R. M. Nagatani, G. C. Tiao, X. F. Niu, G. C. Reinsel, D. Wuebbles, K. Grant. Comparisons of observed ozone and temperature trends in the lower stratosphere // *Geophysical Research Letters*, Vol. 19, NO. 9, P. 929–932, 1992
25. Frank T. Huang, Hans G. Mayr, Carl A. Reber, James M. Russell III, Martin G. Mlyneczek, John G. Mengel. Ozone quasi-biennial oscillations (QBO), semiannual oscillations (SAO), and correlations with temperature in the mesosphere, lower thermosphere, and stratosphere, based on measurements from SABER on TIMED and MLS on UARS // *Journal of Geophysical Research*, Vol. 113, A01316, doi:10.1029/2007JA012634, 2008
26. K. Petzoldt, B. Naujokat, K. Neugeboren. Correlation Between Stratospheric Temperature, Total Ozone, and Tropospheric Weather Systems // *Geophysical Research Letters*, Vol. 21, NO. 13, P. 1203–1206, 1994;
27. F. G. Finger, R. M. Nagatani, M. E. Gelman, C. S. Long, A. J. Miller. Consistency Between Variations of Ozone and Temperature in the Stratosphere // *Geophysical Research Letters*, Vol. 22, NO. 24, P. 3477–3480, 1995
28. Thierry Leblanc, J. Stuart McDermid. Quasi-biennial oscillation signatures in ozone and temperature observed by lidar at Mauna Loa, Hawaii (19.5°N, 155.6°W) // *Journal of Geophysical Research*, Vol. 106, NO. D14, P. 14,869–14,874, 2001
29. G. M. Keating, M. C. Pitts, G. Brasseur. A. De Rudder Response of Middle Atmosphere to Short-Term Solar Ultraviolet Variations: 1. Observations // *Journal of Geophysical Research*, Vol. 92, NO. D1, P. 889–902, 1987;
30. G. Brasseur, A. De Rudder, G. M. Keating, M. C. Pitts. Response of Middle Atmosphere to Short-Term Solar Ultraviolet Variations: 2. Theory // *Journal of Geophysical Research*, Vol. 92, NO. D1, P. 903–914, 1987
31. Басманов Є.І. Озон и внезапные стратосферные потепления // *Вестн. Харьк. ун-та № 212, Геол. и геогр. Лес. Укр. - Харьков: Вища школа, 1981 с. 78-80*
32. V. Ramaswamy, M. D. Schwarzkopf. Effects of ozone and well-mixed gases on annual-mean stratospheric temperature trends // *Geophysical Research Letters*, Vol. 29, NO. 22, 2064, doi:10.1029/2002GL015141, 2002
33. L. N. Lamsal, M. Weber, S. Tellmann, J. P. Burrows. Ozone column classified climatology of ozone and temperature profiles based on ozonesonde and satellite data // *Journal of Geophysical Research*, Vol. 109, D20304, doi:10.1029/2004JD004680, 2004;
34. H. Takashima, M. Shiotani. Ozone variation in the tropical tropopause layer as seen from ozonesonde data // *Journal of Geophysical Research*, Vol. 112, D11123, doi:10.1029/2006JD008322, 2007;
35. Shunwu Zhou, Renhe Zhang. Decadal variations of temperature and geopotential height over the Tibetan Plateau and their relations with Tibet ozone depletion // *Geophysical Research Letters*, Vol. 32, L18705, doi:10.1029/2005GL023496, 2005

36. Kjell Henriksen, Valentin Roldugin. Total Ozone Variations in Middle Asia and Dynamic Meteorological Processes in the Atmosphere // *Geophysical Research Letters*, Vol. 22, NO. 23, P. 3219–3222, 1995
37. Piers M. de F. Forster, Keith P. Shine. Radiative forcing and temperature trends from stratospheric ozone changes // *Journal of Geophysical Research*, Vol. 102, NO. D9, P. 10,841–10,855, 1997;
38. Andrew A. Lacis, Donald J. Wuebbles, Jennifer A. Logan. Radiative Forcing of Climate by Changes in the Vertical Distribution of Ozone // *Journal of Geophysical Research*, Vol. 95, NO. D7, P. 9971–9981, 1990
39. William J. Randel, Janel B. Cobb. Coherent variations of monthly mean total ozone and lower stratospheric temperature // *Journal of Geophysical Research*, Vol. 99, NO. D3, P. 5433–5448, 1994;
40. Shigeru Chubachi Relationship Between Total Ozone Amounts and Stratospheric Temperature at Syowa, Antarctica // *Journal of Geophysical Research*, Vol. 98, NO. D2, P. 3005–3010, 1993
41. D. Y. Wang, T. von Clarmann, H. Fischer, B. Funke, M. Garcia-Comas, S. Gil-López, N. Glatthor, U. Grabowski, M. Höpfner, S. Kellmann, M. Kiefer, M. E. Koukouli, G. Lin, A. Linden, M. López-Puertas, G. Mengistu Tsidu, M. Milz, T. Steck, G. P. Stiller. Longitudinal variations of temperature and ozone profiles observed by MIPAS during the Antarctic stratosphere sudden warming of 2002 // *Journal of Geophysical Research*, Vol. 110, D20101, doi:10.1029/2004JD005749, 2005
42. Ronald J. Vervack Jr., Jeng-Hwa Yee, Robert DeMajistre, William H. Swartz. Intercomparison of MSX/UVISI-derived ozone and temperature profiles with ground-based, SAGE II, HALOE, and POAM III data // *Journal of Geophysical Research*, Vol. 108, NO. D22, 4697, doi:10.1029/2003JD003671, 2003
43. J. L. Sabutis, R. P. Turco, S. K. Kar. Wintertime planetary wave propagation in the lower stratosphere and its observed effect on northern hemisphere temperature-ozone correlations // *Journal of Geophysical Research*, Vol. 102, NO. D18, P. 21,709–21,717, 1997
44. Marc Allaart, Pieter Valks, Ronald van der A, Ankie Pijters, Hennie Kelder, Peter van Velthoven. Ozone mini-hole observed over Europe, influence of low stratospheric temperature on observations // *Geophysical Research Letters*, Vol. 27, NO. 24, P. 4089–4092, 2000
45. L. L. Hood, B. E. Soukharev, M. Fromm, J. P. McCormack. Origin of extreme ozone minima at middle to high northern latitudes // *Journal of Geophysical Research*, Vol. 106, NO. D18, P. 20,925–20,940, 2001
46. K. Petzoldt, B. Naujokat, K. Neugeboren. Correlation Between Stratospheric Temperature, Total Ozone, and Tropospheric Weather Systems // *Geophysical Research Letters*, Vol. 21, NO. 13, P. 1203–1206, 1994
47. M. T. Kayano. Principal modes of the total ozone on the Southern Oscillation timescale and related temperature variations // *Journal of Geophysical Research*, Vol. 102, NO. D22, P. 25,797–25,806, 1997
48. Chris Kröger, Mark Hervig, Bruno Nardi, Larry Oolman, Terry Deshler, Stephen Wood, Sylvia Nichol. Stratospheric ozone reaches new minima above McMurdo Station, Antarctica, between 1998 and 2001 // *Journal of Geophysical Research*, Vol. 108, NO. D17, 4555, doi:10.1029/2002JD002904, 2003
49. Luis Fernandez Ozone Depletion and its Impacts // http://www.globalchange.umich.edu/globalchange2/current/lectures/ozone_deplete/ozone_deplete.html
50. Janusz W. Krzyscin. On the interannual oscillations in the northern temperature total ozone // *Journal of Geophysical Research*, Vol. 99, NO. D7, P. 14,527–14,534, 1994
51. C. Janssen. Intramolecular isotope distribution in heavy ozone (16O18O16O and 16O16O18O) // *Journal of Geophysical Research*, Vol. 110, D08308, doi:10.1029/2004JD005479, 2005;
52. D. Krankowsky, P. Lämmerzahl, K. Mauersberger, C. Janssen, B. Tuzson, T. Röckmann. Stratospheric ozone isotope fractionations derived from collected samples // *Journal of Geophysical Research*, Vol. 112, D08301, doi:10.1029/2006JD007855, 2007
53. L. L. Hood. Coupled Stratospheric Ozone and Temperature Responses to Short-Term Changes in Solar Ultraviolet Flux: An Analysis of Nimbus 7 SBUV and SAMS

- Data // Journal of Geophysical Research, Vol. 91, NO. D4, P. 5264–5276, 1986;
54. A. Ruzmaikin, M. L. Santee, M. J. Schwartz, L. Froidevaux, H. M. Pickett, The 27-day variations in stratospheric ozone and temperature: New MLS data // Geophysical Research Letters, Vol. 34, L02819, doi:10.1029/2006GL028419, 2007;
 55. Shuntai Zhou, Alvin J. Miller, Lon L. Hood. A partial correlation analysis of the stratospheric ozone response to 27-day solar UV variations with temperature effect removed // Journal of Geophysical Research, Vol. 105, NO. D4, P. 4491–4500, 2000
 56. L. Chen, J. London, G. Brasseur. Middle atmospheric ozone and temperature responses to solar irradiance variations over 27-day periods // Journal of Geophysical Research, Vol. 102, NO. D25, P. 29,957–29,979, 1997
 57. P. Bonasoni, F. Calzolari, P. Cristofanelli, U. Bonaf, F. Evangelisti, R. Van Dingenen, Y. Balkanski. Ozone and aerosol correlation during Sahara dust transport episodes at Mount Cimone during MINATROC project // <http://ies.jrc.cec.eu.int/Units/cc/events/torino2001/torinocd/Documents/Terrestrial/TP2.htm>
 58. XueXi Tie, Claire Granier, William Randel, Guy P. Brasseur. Effects of interannual variation of temperature on heterogeneous reactions and stratospheric ozone // Journal of Geophysical Research, Vol. 102, NO. D19, P. 23,519–23,527, 1997
 59. Charles H. Jackman, Anne R. Douglass, Sushil Chandra, Richard S. Stolarski, Joan E. Rosenfield, Jack A. Kaye, Eric R. Nash. Impact of Interannual Variability (1979–1986) of Transport and Temperature on Ozone as Computed Using a Two-Dimensional Photochemical Model // Journal of Geophysical Research, Vol. 96, NO. D3, P. 5073–5079, 1991
 60. Linwood B. Callis, Murali Natarajan, James D. Lambeth, Robert E. Boughner. On the origin of midlatitude ozone changes: Data analysis and simulations for 1979–1993 // Journal of Geophysical Research, Vol. 102, NO. D1, P. 1215–1228, 1997;
 61. Thomas J. McGee, Paul Newman, Michael Gross, Upendra Singh, Sophie Godin, Anne-Marie Lacoste, Gerard Megie. Correlation of ozone loss with the presence of Volcanic aerosols // Geophysical Research Letters, Vol. 21, NO. 25, P. 2801–2804, 1994
 62. Murry Salby, Patrick Callaghan, Philippe Keckhut, Sophie Godin, Marielle Guirlet. Interannual changes of temperature and ozone: Relationship between the lower and upper stratosphere // Journal of Geophysical Research, Vol. 107, NO. D18, 4342, doi:10.1029/2001JD000421, 2002
 63. Ravetta F.; Ancellet G.; Kowol-Santen J.; Wilson R.; Nedeljkovic D. Ozone, temperature, and wind field measurements in a tropopause fold : Comparison with a mesoscale model simulation // Monthly weather review <http://cat.inist.fr/?aMode=afficheN&cpsidt=1983712>
 64. К. Н. Вишератин Межгодовые вариации и тренды среднезональных рядов общего содержания озона, температуры и зонального ветра // Известия РАН. Физика атмосферы и океана - том 43, № 4, Июль-Август 2007, С. 502-520
 65. Басманов Є.І. До таємниці озонної діри // Наука і суспільство, № 4, К.: 1988 с. 32-35
 66. Басманов Є.І. Влияние атмосферной циркуляции на общее содержание озона и опыт его прогноза // Вестн. Харьк. ун-та № 239, Природн. и труд. ресурсы Лев. Укр., 1983 с. 52-54
 67. Басманов Є.І. Озон и макроциркуляционные процессы в атмосфере // Метеорология и гидрология, № 9, 1983, с. 58-63
 68. Басманов Є.І. Долгосрочный прогноз как метод мониторинга озона // Вестн. Харьк. ун-та № 264, Охрана и рац. природопользов. Лев. Укр., 1984 с. 65-68
 69. Басманов Є.І. Влияние атмосферной циркуляции на географическое распределение озона и опыт его прогноза // Атмосферный озон. - Л.: Гидрометеоиздат, 1987 с. 237-242

Надійшла до редколегії 30.12.2011

УДК 534.6; 539.3; 544.173

Горб^{2*} А.М., к. фіз.-мат. н., м.н.с.
Горелов¹ Б.М., д-р фіз.-мат. н.
Валицька¹ С.В., студент
Половина² О.І., к. фіз.-мат. н., м.н.с.A.M. Gorb, PhD
B.M. Gorelov, Dr.Ph
S.V. Valytska, Stud.
O.I. Polovina, PhD**Вплив нанорозмірного діоксиду кремнію
на акустичні, термічні та механічні
властивості ненасиченої поліефірної
смоли****The influence of nanosized silica dioxide
on the acoustic, thermal and mechanical
properties of an unsaturated polyester resin**

Досліджено вплив нанорозмірного діоксиду кремнію на механічні властивості однієї поліефірної смоли, в якій для поперекрестного зв'язування лінійних поліефірних ланцюгів використовується стирол. Показано, що за малих концентрацій наповнювача (до 5 масових %) механічні властивості смоли (межа міцності на стискання, швидкість звуку, статичний та динамічний модулі Юнга) немономонно змінюються зі збільшенням концентрації.

The influence of nanosized silica dioxide on the mechanical properties of a styrene cross-linked polyester resin have been studied. It was shown that the mechanical properties of the resin (ultimate compression strength, sound velocity, static and dynamic Young's module) change non-monotonically with increasing concentration at low filler concentrations (up to 5 mass percent).

Ключові слова: ненасичена поліефірна смола, наночастинки, швидкість звуку

Key Words: unsaturated polyester resin, nanoparticles, sound velocity

¹Інститут хімії поверхні НАН України, вул. Генерала Наумова, 17, Київ 03164

²Київський національний університет ім. Т. Г. Шевченка, проспект Академіка Глушкова, 4

*E-mail: g_ala@ukr.net

1. Вступ

Ненасичена стирол-містка поліефірна смола широко використовується для створення функціональних композиційних матеріалів. Смола має високі експлуатаційні характеристики і досить стійка до зовнішніх впливів [1-4]. В останні роки інтенсивний розвиток нанотехнологій стимулює спроби покращити фізико-хімічні характеристики смоли, використовуючи нанорозмірні наповнювачі. Наночастинки, володіючи високою реакційною здатністю поверхні, в процесі конденсації смоли можуть стабілізувати структуру полімеру завдяки зв'язуванню атомів макромолекул з поверхневими центрами. Закріплення полімерних ланцюгів на наночастинках може призвести до підвищення термостійкості, зменшення токсичних виділень, зокрема стиролу, і покращення механічних параметрів композиційного матеріалу. Можна очікувати, що при наповненні полімерної матриці структура полімерних ланцюгів залежить від концентрації наночастинок. Оскільки розмір наночастинок є

порівняним з довжиною елементарної ланки поліефірного ланцюга, то стабілізація структури смоли більш ймовірна при малих концентраціях наповнювача, коли можливе ефективне хімічне зв'язування фрагментів полімерних ланцюгів з наночастинками, тоді як зі зростанням їх вмісту переважатиме розупорядкування структури смоли.

Одним з наповнювачів, поверхневі центри якого ефективно взаємодіють з макромолекулами поліефірної смоли та молекулами стиролу, є наночастинки діоксиду кремнію (SiO_2) [5]. Так, введення частинок SiO_2 в смолу підвищує термостійкість композиту на кілька градусів, а при наповненні частинками з питомою поверхнею $S \sim 400 \text{ м}^2/\text{г}$ термостійкість зростає на десятки градусів [6]. Механічні параметри композитів, такі як в'язкість, межа міцності на зсув та руйнування, як правило, зростають на ~10-15 % в обмеженому інтервалі концентрації частинок SiO_2 [7]. Покращення таких параметрів дозволяє припустити, що воно обумовлене зміною структури полімеру внаслідок взаємодії

Представлено: член-кор. ІАН України,
д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

макромолекул з активними центрами частинок SiO_2 . Зазначимо, що, хоча позитивний вплив різних наповнювачів на експлуатаційні параметри полімерних матеріалів відомий [7-11], ефект концентрації наночастинок, зокрема частинок кремнезему, на структуру та фізичні властивості поліефірних смол залишається недостатньо визначеним.

Метою даної роботи було дослідження впливу концентрації наночастинок кремнезему та варіації міжфазної взаємодії на механічні, термічні та акустичні параметри ненасиченої поліефірної смоли.

2. Зразки та експериментальні методики

Досліджено полімерні композитні матеріали на основі ненасиченої стирол-місткої ортофталевої поліефірної смоли PolyLite 440-M888, яка характеризується низьким виділенням стиролу. В структурі полімеру молекули стиролу забезпечують поперечне зв'язування поліефірних ланцюгів (рис. 1).

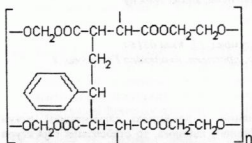


Рис. 1 Структурна формула елементарної ланки поліефірної смоли

В якості наповнювача використаний нанокремнезем А-300 з дисперсністю частинок 5–20 нм, середнім розміром ~ 10 нм та питомою поверхнею $S \sim 280 \text{ м}^2/\text{г}$. Концентрація наповнювача в композитах складала $C \leq 5\%$ (по масі). Композити отримані з розчинів поліефірної смоли, змішаних з наповнювачем до однорідної консистенції. Композиції конденсувалися за кімнатної температури протягом 72 год.

Наявність активних центрів на поверхні частинок SiO_2 проявляється в їх інфрачервоних (ІЧ) спектрах (рис. 2). В ІЧ-спектрі нанокремнезему вузька смуга 3748 см^{-1} пов'язана з вільними ОН-групами, локалізованими на поверхні частинок, а смуга поглинання $3750\text{--}2550 \text{ см}^{-1}$ вказує на наявність зв'язаних

ОН-груп та води на поверхні. В спектрі є смуга 1630 см^{-1} , яка пов'язана з коливаннями вигину в ОН-групах. Смуги $2345\text{--}2140 \text{ см}^{-1}$ з мінімумом при 2255 , 1970 та 1867 см^{-1} зумовлені валентними коливаннями зв'язків Si–H та обертонами коливань остова [12,13], тоді як смуга 1697 см^{-1} свідчить про наявність зв'язаних груп C=O на поверхні частинок SiO_2 .

Отже, поверхня частинок SiO_2 характеризується наявністю вільних ОН-груп, зв'язків Si–H та карбоксильних груп C=O, які можуть зв'язуватися як з фрагментами поліефірних ланцюгів – CO, CON, COO, COOCH₂, так і з фрагментами поперекових стирольних зв'язків – C₂H₄, C₆H₄CHCH₂.

Механічні параметри матеріалів (межа міцності на стискання σ_0 та статичний модуль Юнга E_0) визначали за кривими навантаження, отриманими за допомогою установки "SHOPER" як середні з результатами навантаження 5 зразків. Зразки для навантажень мали циліндричну форму з діаметром та висотою по 10 мм .

Фазову швидкість поширення повздовжніх ультразвукових хвиль (V_L) вимірювали за луна-імпульсною методикою [14]. Для збудження та прийому ультразвукових коливань використані резонансні п'єзокварцові перетворювачі з робочою частотою $f_0 = 1,76 \text{ МГц}$.

Склад летючих продуктів теплової деструкції вихідної смоли та її нанокompозитів визначали за допомогою методу програмованої термодесорбції з мас-спектрометричною реєстрацією продуктів [15]. Вимірювання проводилися за умов, коли положення та форма піків десорбції не залежали

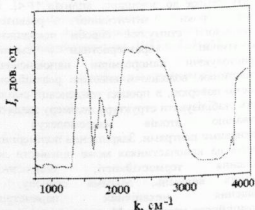


Рис. 2 Спектр дифузійного відбиття наночастинок діоксиду кремнію

від температури інтерфейсу та маси зразка. Такі умови експерименту дозволяли уникнути неоднорідного розподілу температури у зразку та утворення вторинних продуктів за рахунок взаємодії первинних фрагментів розпаду полімерних ланцюгів.

3. Експериментальні результати та їх обговорення

3.1. Межа міцності на стискання та статичний модуль Юнга

Поведінка механічних параметрів зі зростанням концентрації наповнювача (C) характеризується немонотонністю. У наповненій смоли межа міцності на стискання (σ_0) та статичний модуль Юнга (E_0) становлять $1087 \pm 3\%$ та $0.78 \cdot 10^{-4}$ кГ/см², відповідно. Зі зростанням концентрації наночастинок SiO₂ до 0,5% ці параметри зменшуються – $\sigma_0 = 1044 \pm 2\%$ кГ/см² та $E_0 = 0.73 \cdot 10^{-4}$ кГ/см².

Подальше зростання концентрації наповнювача до 1,5% призводить до збільшення механічних

параметрів – $\sigma_0 = 1068 \pm 10\%$ та $E_0 = 0.77 \cdot 10^{-4}$ кГ/см², а зростання концентрації до 5% веде до зменшення таких параметрів – $\sigma_0 = 972 \pm 18\%$ та $E_0 = 0.75 \cdot 10^{-4}$ кГ/см².

Теоретично статичні ефективні модулі частинкового композиту – модуль зсуву (μ) та об'ємний модуль пружності (M) можна розрахувати через параметри матриці та наповнювача, такі як об'ємні модулі (M_m та M_f), модулі зсуву (μ_m та μ_f) та коефіцієнти Пуассона (ν_m та ν_f) згідно моделі Крістенсена та Лоу [16]. У моделі покладено, що структура полімерних ланцюгів в композитах не змінюється на межі фаз. При цьому залежність параметра M від об'ємної концентрації наповнювача C_V має вид:

$$M(C_V) = M_m + \frac{C_V(M_f - M_m)}{1 + (1 - C_V) \frac{M_f - M_m}{M_m + 4\mu_m/3}}, \quad (1)$$

а функція $\mu(C)$ визначається з рівняння

$$A_0(C_V) \cdot (\mu / \mu_m)^2 + 2A_1(C_V) \cdot (\mu / \mu_m) + A_2(C_V) = 0, \quad (2)$$

де коефіцієнти A_0 , A_1 і A_2 описуються наступними формулами:

$$A_0(C_V) = 4N(5\nu_m - 7)\eta_1 C_V^{10/3} - 2(63N\eta_2 + 2\eta_1\eta_3)C_V^{7/3} + 252N\eta_2 C_V^{5/3} + 25N(\nu_m^2 - 7)\eta_2 C_V - (5\nu_m + 7)\eta_1\eta_3,$$

$$A_1(C_V) = 2N(5\nu_m - 1)\eta_1 C_V^{10/3} + 2(63N\eta_2 + 2\eta_1\eta_3)C_V^{7/3} - 252N\eta_2 C_V^{5/3} + 75N(3 - \nu_m)\nu_m\eta_2 C_V + (3/2)(15\nu_m - 7)\eta_1\eta_3,$$

$$A_2(C_V) = 8N(4 - 5\nu_m)\eta_1 C_V^{10/3} - 2(63N\eta_2 + 2\eta_1\eta_3)C_V^{7/3} + 252N\eta_2 C_V^{5/3} - 50N(8\nu_m^2 - 12\nu_m + 7)\eta_2 C_V - 4(10\nu_m - 7)\eta_1\eta_3,$$

$$\eta_1 = N(7 - 10\nu_m)(7 + 5\nu_m) + 105(\nu_f - \nu_m),$$

$$\eta_2 = N(7 + 5\nu_m) + 35(1 - \nu_f),$$

$$\eta_3 = N(8 - 10\nu_m) + 15(1 - \nu_m),$$

$$N = \mu_f / \mu_m - 1.$$

Використовуючи вирази для $M(C_V)$ і $\mu(C_V)$, концентраційна залежність статичного модуля Юнга $E_d(C_V)$ має вид [17]

$$E_0(C_V) = \frac{9\mu(C_V) \cdot M(C_V)}{\mu(C_V) + 3M(C_V)}, \quad (3)$$

де $C_V = \rho_m C / [\rho_m C + \rho_f(1 - C)]$, ρ_m та ρ_f – густини полімерної матриці та наповнювача, відповідно.

У розрахунках покладали, що механічні параметри поліефірної смоли: $\rho_m = 1,20 \cdot 10^6$ г/м³,

$E_m = 3,5 \cdot 10^9$ Н/м², $\mu_m = 1,4 \cdot 10^9$ Н/м², $\nu_m = 0,25$ [18], а M_m обчислювали як [21]:

$$M_m = E_m / [3(1 - 2\nu_m)] = 2,3 \cdot 10^9$$

Н/м². Для кремнезему використані значення параметрів: $\rho_f = 2,2 \cdot 10^6$ г/м³, $M_f = 36,7 \cdot 10^9$ Н/м²,

$\mu_f = 31,3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $\nu_f = 0,17$, які характерні для аморфного кварцового скла [19].

Теоретичні викладки свідчать, в нанокомпозитах за концентрацій наповнювача ($C < 5\%$) без врахування змін полімерної структури на межі фаз E_0 лінійно зростає зі збільшенням C , причому $E_d(0,05)/E_d(0) = 1,052$. Отже, немонотонне зменшення статичного модуля за навантаження можна пов'язати зі зміною структури ланцюгів на між фазній границі.

3.2. Швидкість звуку та динамічний модуль Юнга

У ненаповненій поліефірній смолі ($C = 0$) фазова швидкість поширення поздовжніх пружних хвиль становить $V_L(0) = 2566 \pm 11 \text{ м/с}$, що добре узгоджується з літературними даними [20]. Зі збільшенням концентрації частинок фазова швидкість $V_L(C)$ зменшується. При цьому в діапазоні концентрацій $C \leq 1,5\%$ поведінка $V_L(C)$ є немонотонною та характеризується мінімумом та максимумом, коли C становить $0,005$ та $0,015\%$, відповідно (рис. 3, крива 1).

Отже, зі збільшенням C динамічний модуль Юнга E немонотонно спадає (рис. 3, крива 2), що корелює з поведінкою статичного модуля Юнга E_0 . З іншого боку, теоретичні моделі композиційних матеріалів, які не враховують міжфазної взаємодії між наповнювачем та матрицею [21,22], якщо $\rho_f > \rho_m$, передбачають лінійне зростання модулів пружності зі збільшенням C .

Концентраційну поведінку динамічного модуля Юнга $E(C)$ визначимо з виразу для фазової швидкості пружних хвиль у стрижні [17]:

$$V_L(C) = [E(C) / \rho(C)]^{1/2}, \quad (4)$$

де густина композитного матеріалу

$$\rho(C) = \rho_m \rho_f [C \rho_m + (1 - C) \rho_f]^{-1}. \quad (5)$$

В результаті знаходимо:

$$V_L(f, C) = \frac{2\pi \cdot f}{k_L(f, C)},$$

$$E(C) = V_L^2(C) \rho_m \rho_f [C \rho_m + (1 - C) \rho_f]^{-1}. \quad (6)$$

Отже, за малих концентрацій наповнювача зі збільшенням C густина композиту лінійно зростає (рис. 3, крива 3), а динамічний модуль Юнга E немонотонно спадає (рис. 3, крива 2), що корелює з поведінкою статичного модуля Юнга E_0 . Відзначимо, що при такому розрахунку $E(C)$

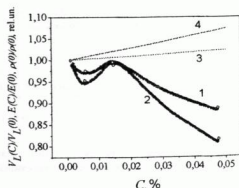


Рис. 3 Концентраційні залежності нормованих механічних параметрів SiO_2 -нанокомпозитів поліефірної смоли: експериментальні - $V_L(C)/V_L(0)$ (кр. 1), $E(C)/E(0)$ (кр. 2), розраховані - $\rho(C)/\rho(0)$ (кр. 3), $E(C)/E(0)$ (кр. 4)

структура полімеру на межі фаз вважається незмінною.

З іншого боку, теоретичні моделі композиційних матеріалів, які не враховують міжфазної взаємодії між наповнювачем та матрицею [21,22], передбачають лінійне зростання модулів пружності зі збільшенням C , якщо $\rho_f > \rho_m$. Дійсно, залежність $E(C)$ для поліефірної смоли, наповненої частинками SiO_2 , отримана за моделлю роботи [21] (крива 4), дає лінійне зростання жорсткості композиту з концентрацією. В моделі покладено, що

$$k_L(f, C) = k_m(f) \cdot \sqrt{1 - C \cdot A(f)},$$

$$A(f) = 2 - \frac{\rho_f}{\rho_m} - \frac{3K_m^2(f)}{k_m^2(f) \cdot \left(4 - 4P + \frac{3P \cdot K_f^2(f)}{k_f^2(f)}\right)} + \frac{5(P-1)}{P-1+1.5(P+1.5) \frac{K_m^2(f)}{k_m^2(f)}}$$

$$P = \frac{\mu_f}{\mu_m}; \quad k_{m,f}(f) = 2\pi \cdot f \cdot \sqrt{\frac{\rho_{m,f}}{2\mu_{m,f} + \lambda_{m,f}}}, \quad K_{m,f}(f) = 2\pi \cdot f \cdot \sqrt{\frac{\rho_{m,f}}{\mu_{m,f}}};$$

де $\lambda_{m,f}$ – перші сталі Ламе, $k_{m,f}$ і $K_{m,f}$ – хвильові числа поздовжньої хвилі та хвилі зсуву, відповідно. При цьому наведений вище вираз для $k_L(f, C)$ справедливий за виконання умови

$$k_L(f, C) \cdot R_f \ll 1,$$

де R_f – радіус частинок наповнювача, тобто, коли довжина хвилі набагато більша за R_f . В експериментах ця умова була виконана, оскільки на частоті вимірювань $f_0 = 1.76$ МГц мінімальне значення k_L складало $k_{L, \min} = 2\pi f_0 / V_L(0) \approx 4309,6 \text{ м}^{-1}$, а максимальне $k_{L, \max} = 2\pi f_0 / V_L(0.05) \approx 4854,4 \text{ м}^{-1}$.

Слід зазначити, що суттєвий вплив міжфазної взаємодії на механічні властивості полімерних нанокомпозиційних матеріалів впливає, зокрема, з розрахунків механічних параметрів композитів поліімід – SiO_2 [23]. Теоретичне моделювання, яке враховує молекулярну структуру наночастинок SiO_2 , полімерної матриці та міжфазної області, показало, що при $R_f < 100$ нм, коли число незакріплених на поверхні частинок полімерних ланцюгів збільшується, пружні модулі знижуються зі зменшенням R_f , проте темп зменшення істотно уповільнюється, якщо зростає сила взаємодії між привитими на поверхню SiO_2 молекулами та полімерними макромолекулами. Одним з наслідків такої взаємодії є ущільнення полімеру у межфазних областях.

Таким чином, немонотонна зміна $V_L(C)$ та $E(C)$ в околі концентрації $C = 1,5\%$ зумовлена немонотонною зміною жорсткості структури композиту на міжфазній межі внаслідок взаємодії макромолекул з поверхневими центрами наночастинок. В інтервалі $C > 1,5\%$ зменшення V_L є плавним, що можна пов'язати з падінням модуля E через збільшення об'єму міжфазних меж при наповненні полімеру.

3.3. Термодеструкція

Наявність міжфазної взаємодії та зміни структури полімерних ланцюгів на межі фаз смола – кремнезем підтверджують дані термодесорбційної мас-спектрометрії. На рис.4 наведено мас-спектри продуктів термодеструкції поліефірної смоли та її композитів з наночастинами діоксиду кремнію при температурі, що відповідає максимальній інтенсивності ліній. Мас-спектр продуктів термодеструкції ненаповненої поліефірної смоли складається з восьми інтервалів m/z (m – маса, z – заряд) інтенсивного виділення фрагментів (рис. 4а). В інтервалі $15 \leq m/z \leq 18$ десорбують продукти CH_3 (15) і H_2O (18). В інтервалі $26 \leq m/z \leq 29$ інтенсивні лінії пов'язані з продуктами CHCH_2 (27), CO (28), CON (29). Фрагменти поліефірних ланцюгів CH_2CO (42), CH_3CO (43), COO (44), COOH (45) і COOCH_2 (58), COOCH_3 (59) проявляються в інтервалі $39 \leq m/z \leq 59$.

В області $m/z > 75$ виділяються продукти розкладання поперечових зв'язків – стирол $\text{C}_6\text{H}_5\text{CHCH}_2$ (104) та фрагменти $\text{C}_6\text{H}_5\text{CHCH}_2$, пов'язані з елементами поліефірних ланцюгів. Основним продуктом розпаду стиролу є бензолне кільце C_6H_6 (78), а лінії його фрагментів $\text{C}_6\text{H}_4\text{CHCHN}$ (102) і $\text{C}_6\text{H}_4\text{CHCH}_2$ (103) мають слабку інтенсивність. Суміші складаються з фрагментів стиролу та поліефірних ланцюгів $\text{C}_6\text{H}_4\text{CHCHN} + \text{CHCHN}$ (128), $\text{C}_6\text{H}_4\text{CHCH}_2 + \text{CHCHN}$ (129), $\text{C}_6\text{H}_5\text{CHCH}_2 + \text{CHCHN}$ (130) і $\text{C}_6\text{H}_4\text{CHCH}_2 + \text{CHCHN} + \text{CO}$ (155), $\text{C}_6\text{H}_5\text{CHCH}_2 + \text{CHCHN} + \text{CO}$ (156) (рис. 4а).

Потрібно відзначити, що продукти розкладання в області $m/z \leq 105$ є характерними для термічного розкладання у вакуумі стиролістких поліефірних смол [24], і є відмінними від продуктів термодеструкції та їхніх температур виділення аналогічних смол за участю кисню. Так, термоокислювальні реакції за температур $T > 300^\circ\text{C}$ призводять до утворення таких продуктів деструкції як вода, вуглекислий газ,

ацетон, фталевий ангідрид, октовий альдегід, перекис водню, метиленові групи. Виділення стиролу, його сумішей з продуктами деструкції поперекових зв'язків та інших ароматичних з'єднань відбувається за температур $T \geq 330^\circ\text{C}$ [25-29].

Наповнення поліефірної смоли наночастинками діоксиду кремнію малої концентрації, коли $C \leq 0.5\%$, призводить до зменшення інтенсивності виділення фрагментів макромолекул з $m/z < 76$ та пригнічує виділення продуктів з $m/z > 105$, які складаються зі стиролу та фрагментів поліефірних ланцюгів. Істотно спадає інтенсивність деструкції складного ефіру з виділенням продуктів CH_3CO , COO і COOCH_2 . При цьому інтенсивність деструкції стиролу та виділення фрагментів бензольного кільця з m/z 76, 77 дещо зростає, з'являються слабкі лінії продуктів з $m/z = 91$ ($\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}_2$) та $m/z = 92$ ($\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}_3$), а також лінія стиролу, асоційованого з атомом водню - $\text{C}_6\text{H}_5\text{CHCH}_3$ ($m/z = 105$). Послаблення деструкції поліефірних ланцюгів та складного ефіру може вказувати на зв'язування їх з поверхневими центрами частинок SiO_2 . Такий зв'язок може здійснюватися через групу C=O складного ефіру (рис. 1). Посилення деструкції молекул стиролу зумовлене частинками SiO_2 , які просторово перешкоджають зв'язуванню стиролу з поліефірними ланцюгами. Останнє призводить до послаблення

поперекового зв'язку ланцюгів та появи незв'язаних з поліефірними ланцюгами молекул стиролу, деструкція яких полегшується [30].

Підвищення концентрації наночастинок SiO_2 у смолі, коли $0,5 < C \leq 5\%$, призводить до істотного зростання терморуїнування поперекових зв'язків та інтенсивності виділення фрагментів деструкції з $m/z = 76-105$ (рис. 5). Проявляються слабкі лінії продуктів з $m/z = 148$ та 163, пов'язані з сумішами стиролу та фрагментів складного ефіру $\text{C}_6\text{H}_5\text{CHCH}_2+\text{COO}$ та $\text{C}_6\text{H}_5\text{CHCH}_2+\text{COOCH}_3$. При цьому різко підвищується інтенсивність руйнування поліефірних ланцюгів та виділення продуктів деструкції з $m/z < 70$. Отже, в області масових концентрацій частинок SiO_2 , що перевищують $0,5\%$, зі збільшенням C поведінка термодеструкції макромолекул нанокмполімеру змінюється: підсилюється руйнування як поліефірних ланцюгів, так і поперекових стирольних зв'язків.

Оскільки поведінка параметрів σ_0 і E_0 пов'язана з міцністю зв'язків в поліефірній макромолекулі та на міжфазній межі в композитах, немонотонну зміну σ_0 і E_0 зі зростанням концентрації наночастинок кремнезему можна пов'язати зі змінами міцності зв'язків на міжфазній межі полімер-наночастинка. Падіння міцності зв'язків за малої

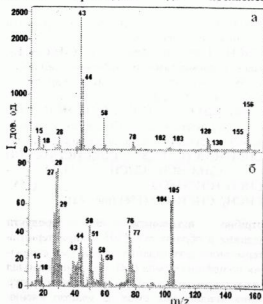


Рис. 4 Мас-спектри ненаповненої (а) та наповненої 0,5 % наночастинок SiO_2 (б) поліефірної смоли

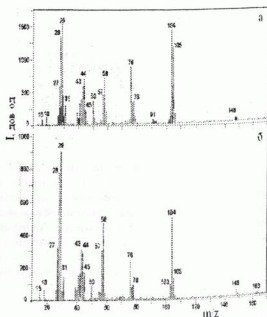


Рис. 5 Мас-спектри поліефірної смоли, наповненої 2,5 % (а) та 5 % (б) частинок SiO_2

концентрації кремнезему, у відповідності з даними мас-спектрометрії, зумовлене перебудовою структури смоли внаслідок зв'язування поліефірних ланцюгів з поверхневими центрами наночастинок SiO_2 . Підвищення концентрації частинок частково відновлює зв'язки в поліефірних ланцюгах, але порушує попереківі стирольні зв'язки в макромолекулі, що не дозволяє відновити початкові значення механічних параметрів. При цьому має місце антикореляція концентраційних залежностей деструкції поліефірних ланцюгів та величин σ_0 і E_0 : немонотонне підвищення термостійкості ланцюгів відповідає немонотонному зниженню межі міцності та статичного модуля Юнга.

Немонотонна поведінка величин $V_L(C)$ і $E(C)$ при наповненні полімеру також узгоджується з немонотонною поведінкою інтенсивності термічного руйнування поліефірних ланцюгів. Поряд з тим, залежності $V_L(C)$ і $E(C)$ не корелюють зі зростанням інтенсивності руйнування попереківих зв'язків між поліефірними ланцюгами при збільшенні концентрації наповнювача.

4. Висновки

Особливостями наповнення стирол-місткої ненасиченої поліефірної смоли наночастинами кремнезему є немонотонна зміна меж міцності на стиснення (σ_0), швидкості ультразвуку, статичного (E_0) та динамічного (E) модулів Юнга, а також термічної деструкції композиту зі збільшенням концентрації наповнювача.

Концентраційні залежності механічних параметрів (σ_0 , E_0 та E) якісно узгоджуються між собою - в діапазоні масових концентрацій наповнювача $C \leq 1.5$ % спостерігаються мінімальне та максимальне значення, коли C становить 0.005 та 0.015 %, відповідно, а при подальшому зростанні C ці параметри зменшуються. Спостережувані концентраційні ефекти можна пояснити взаємодією фрагментів поліефірних ланцюгів (CO , CON , COO , COOCH_2) та фрагментів попереківих стирольних зв'язків (C_6H_4 , $\text{C}_6\text{H}_4\text{CHCH}_2$) з активними поверхневими центрами наночастинок SiO_2 , такими як вільні OH -груп, зв'язки Si-H та карбоксильні групи C=O .

Вплив нанорозмірного наповнювача на термічну деструкцію поліефірних ланцюгів та стиролу, що забезпечує попереківі зв'язки між ланцюгами, є різним при різних концентраціях

наночастинок. Зі збільшенням C інтенсивність деструкції поліефірних ланцюгів змінюється немонотонно: різко спадає при $C \leq 0.5\%$ та зростає при подальшому підвищенні вмісту наповнювача. Інтенсивність деструкції стиролу посилюється зі зростанням C внаслідок того, що наночастинок просторово перешкоджають зв'язуванню стиролу з поліефірними ланцюгами. В цілому, максимальне підвищення термостійкості композитів стирол-місткої ненасиченої поліефірної смоли з кремнеземом реалізується за малих концентрацій наночастинок та супроводжується слабким зниженням модулів пружності.

Список використаних джерел

1. Hanemann T., Szabo D.V. Polymer nanoparticle composites: From synthesis to modern application // *Materials*. – 2010. – 3. – P. 3468-3517.
2. Camargo P.K.C., Satyanarayana K. G., Wypych F. Nanocomposites: synthesis, structure, properties and new application opportunities // *Mater. Res.* – 2009. – 12, №1. – P. 1-39.
3. Pascault J.P., Sautereau H., Verdu J. et al. Thermosetting polymers – New York: Macel Dekker, Inc. – 2002. –
4. Николась А. Ф. Синтетические полимеры и пластические массы на их основе. – М., Л.: Химия, 1964. – 784 с.
5. Горелов Б.М. Влияние оксидных нанонаполнителей на термическую деструкцию ненасыщенной полиэфирной смолы // *Химия, физика та технология поверхності*. – 2011. – 2, №2. – С.201-212.
6. Gornicka B., Prociw E. Polyester and polyetherimide compounds with nanofillers for impregnation of electrical motors // *Acta Physica Polonica A*. – 2009. – 115, № 4. – P. 842- 845.
7. Garcia M., VanVliet G., Jain S. et al. Polypropylene/SiO₂ nanocomposites with improved mechanical properties // *Rev. Adv. Mat. Sci.* – 2004. – 6, №2. – P. 169-175.
8. Chen Y.C., Zhou S.X., Yang H.H. et al. Structure and Properties of Polyurethane/Nanosilica Composites // *J.*

- Appl. Polym. Sci. – 2005. – 95, №5. – P. 1032–1039.
9. Hussain F., Hojjati M., Okamoto M et al. Polymer-matrix nanocomposites. Processing, manufacturing, and application: An overview // J. Comp. Mater. – 2006– 40. – P.1511 – 1574.
 10. Chrissafis K., Autoniatos G., Paraskevopoulos K.M. et al. Comparative study of the effect of different nanoparticles on the mechanical properties and thermal degradation mechanism of in situ prepared poly(-caprolactone) nanocomposites // Comp. Sci. Technol. – 2007. – 67, №10. – P.2165–2174.
 11. Caseri W.R. Nanocomposites of polymers and inorganic particles: preparation, structure and properties // Mater. Sci. Technol. – 2006. – 22, № 7. – P. 807–817.
 12. Lin J.C., Chang L.C., Nien M.H. et al. Mechanical behavior of various nanoparticle filled composites at low-velocity impact // Composite Structures – 2006. – 74. – P. 30–60.
 13. Chukin G.D., Malevich V.G. Infrared spectra of silica // J. Appl. Spectr. – 1977. – 26, №2. – P. 223 – 229.
 14. Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б. Ультразвуковые методы в физике твердого тела. – М.: Мир, 1972. – 307 с.
 15. Покровский В.А. Масс-спектрометрия наноструктурированных систем // Поверхность. – 2010. – 2, №17. – С.63–93.
 16. Christensen R. M., Lo K. H. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models // J. Mech. And Phys. Solids. – 1979. – 27. – P. 315–330.
 17. Исакович М. А. Общая акустика. – М.: Наука, 1973. – 496 с.
 18. Седов Л.Н., Михайлова З.В. Ненасыщенные полиэфир. – М.: Химия. – 1977, 232 с.
 19. Шаскольская М.П. Акустические кристаллы. – М.: Наука. – 1982, 362 с.
 20. Wrobel G., Pawlak S. The effect of fiber content on the ultrasonic wave velocity in glass/polyester composites // J. Achiev. Mater. Manufact. Eng. – 2007. – 20, №1–2. – P. 295–298.
 21. Sayers C. M., and Smith R. L. Ultrasonic velocity and attenuation in an epoxy matrix containing lead inclusion // J. Phys. D: Appl. Phys. – 1983. – 16. – P. 1189–1194.
 22. Sabina F. J., Willis J. R. A simple self-consistent analysis of wave propagation in particulate composite // Wave Motion. – 1988. – 10. – P. 127–142.
 23. Odegard G. M., Clancy T. C., Gates T. S. Modeling of the mechanical properties of nanoparticle/polymer composites // Polymer. – 2005. – 46, №2. – P. 553–562.
 24. Горелов Б.М. Влияние оксидных нанонаполнителей на термическую деструкцию ненасыщенной полиэфирной смолы // Хімія, фізика та технологія поверхні. – 2011. – 2, №2. – С. 201–212.
 25. Kicko-Walczak E. Flame retarded halogenated polyester resins: thermal study // J. Polym. Eng. – 2003. – 23, №3. – P.149–154.
 26. Kicko-Walczak E. Studies on the mechanism of thermal decomposition of unsaturated polyester resins with reduced flammability // Polym. Polym. Compos. – 2004. – 12, №2. – P.127–134.
 27. Evans S.J., Haines P.J., Skinner G.A. The effect blue glycol, aromatic acid partial structure units of structure on the thermal degradation of polyester resins // Thermochim. Acta. – 1996. – 278, № 1–2. – P. 77–90.
 28. Anderson D.A., Freeman E. S. The kinetic of the thermal degradation of the synthetic styrened polyesters // J. Appl. Polym. Sci. – 1959. – 1, № 2. – P. 192–199.
 29. Bansal R.J., Mital J., Singh P. Thermal stability and degradation studies of polyester resins // J. Appl. Polym. Sci. – 1989. – 37, № 7. – P. 1901–1908.
 30. Pielchowski K., Njuguna J. Thermal Degradation of Polymeric Materials. – Shawbury- M.: Rapra Technology Limited, 2005. – 306 p.

Надійшла до редколегії 01.12.11

УДК 530.145

Т.В. Горкавенко, інженер,
С.М. Зубкова, д.ф.-м.н.,
В.А. Макара, д.ф.-м.н., професор,
Л.М. Русіна, к.ф.-м.н.,
О.В. Смельянський, інженер

Температурна залежність електронної структури поверхні (111) Si

Досліджено температурну залежність електронної структури поверхні (111) Si. Чисельний розрахунок проведено самоузгодженим "тривимірним" методом псевдопотенціалу в рамках моделі шаруваті надгратки. Вплив температурної залежності електрон-фононної взаємодії на зонну структуру поверхні кристалу враховувався через фактори Дебая-Валлера, а внесок лінійного розширення ґратки – через температурну залежність коефіцієнта лінійного розширення. Детально проаналізовано температурні залежності прямої та непрямої забороненої зони, а також електронної густини станів поверхні (111) Si. Ключові слова: поверхня, зона структура, густина електронних станів, температура

E-mail: gorka@univ.kiev.ua, svzubkova@ukr.net

1 Вступ

Властивості електронної структури поверхні (зонна структура, густина електронних станів, розподіл зарядової густини валентних електронів) дуже чутливі до різних методів розрахунку, до вибору кристалічного потенціалу, а також до впливу температури зразка. З літератури нам відомо буквально кілька робіт по теоретичному дослідженню температурної залежності електронної структури поверхні, що відносяться в основному до металічних поверхонь.

В [1] досліджувались спектри ультрафіолетової електронної емісії з кутовим розрізненням на (111) поверхні Si в широкому інтервалі температур. Виявилось, що поверхневий стан, який знаходиться на 0.8 eV нижче вершини валентної зони, зникає при збільшенні температури. В [2] методом спектроскопії фототермічного зміщення (photothermal displacement spectroscopy) вимірювалась температурна залежність поверхневої забороненої зони в Si (111) 2x1 в області тем-

T.V. Gorkavenko, engineer,
S.M. Zubkova, PhD,
V.A. Makara PhD,
L.N. Rusina, PhD,
O.V. Smelyansky, engineer

Temperature dependence of the electronic band structure of (111) surface Si

The temperature dependence of the electronic band structure of the (111) surface Si has been investigated. The self-consistent pseudopotential method within bounds of the layered superlattice model was used. Electron-phonon interaction temperature dependence effect on the surface band structure has been taken into account using the Debye-Waller factors. The lattice expansion effect has been taken into consideration using the temperature dependence of the linear expansion coefficient. The peculiarities of the temperature dependences of direct and indirect band gap and electronic density of states of the (111) surface Si are discussed in details.

Key words: surface, band structure, density of states, temperature

ператур 300 – 450 K. На відміну від об'ємного кристалу кремнію на поверхні Si (111) 2x1 не спостерігалось зміни величини та зсуву поверхневої щільності. В [3] в наближенні сильного зв'язку було розраховано температурну залежність оптичного поглинання на поверхні Si (111) 2x1. Виявилось, що величина оптичної щільності слабо залежить від температури, а ширина лінії поглинання змінюється досить сильно.

В [4] шляхом дослідження температурної залежності фотоemisійних спектрів з кутовим розрізненням в інтервалі 90 – 500 K вимірювалась ширина лінії поверхневого стану зв'язку, обіраного на аніоні, та місткового типу (bridge-bond) зв'язку на (110) поверхні ряду III-V-напівпровідників (InSb, GaSb, InAs і GaAs). Отримані величини набагато більше, ніж для металічних поверхонь. Температурні коефіцієнти ширин ліній цих поверхневих станів лежать в межах 0.18 – 0.38 та 0.07 – 0.13 meV/K.

В [5] досліджувалась електронна структу-

ра поверхні ($10\bar{1}0$) Mg методом фотоелектронної емісії з кутвим розрізненням. Отримано енергії зв'язку двох поверхневих станів в т. А ($S_1 = 0.58$ і $S_2 = 1.1$ eV), яким відповідають ефективні маси m^*/m 0.85 та 1.01. Температурна залежність, енергія зв'язку та ширина ліній цих двох поверхневих станів добре корелює з об'ємними даними та з розрахунком з перших принципів для поверхневих станів S_1 і S_2 .

В [6] досліджено спектри оптичного поглинання поверхонь (110) Ag і (110) Cu та проаналізовано різні процеси, що впливають на температурну залежність ширини та інтенсивності RAS (reflection anisotropy spectroscopy) піку 1.7 eV Ag (110) і 2.1 eV Cu (110) RAS піку. Було показано, що вплив цих процесів в кожному окремому випадку регулюється енергетичною щільною між відповідним зайнятим поверхневим станом та енергією Фермі.

В [7] проведено теоретичне дослідження електрон-фононої взаємодії на поверхні Au (111). Для цього незбурена електронна система визначається з розв'язку одночастинкового рівняння Шрьодінгера з модельним потенціалом, що є постійним в площині, паралельній поверхні, і змінюється лише в напрямку, перпендикулярному поверхні. Показано, що врахування температурно-активованих точкових дефектів на поверхні дозволило узгодити вимірювану температурну залежність ширини лінії поверхневого стану з теоретичними результатами.

В даній роботі проведено теоретичне дослідження температурної залежності електронної структури полярної поверхні (111) Si в інтервалі температур 10 – 600 K.

2 Метод розрахунку

Розрахунок проведено методом самоузгодженого псевдопотенціалу в моделі шаруватої надгратки [5]. В цій моделі поверхню можна уявити як систему тонких плівок, що періодично повторюються в напрямку, перпендикулярному поверхні, і розділених вакуумними проміжками. В даній роботі поверхня моделювалась плівкою з 16 атомних шарів (12 – заповнених і 4 – порожніх). Числа 12 і 4 були вибрані з наступних міркувань: 1) плівка повинна мати достатню товщину, щоб можна було знехтувати взаємодією її поверхней; 2) поверхневий потенціал пови-

нен достатньо швидко згасати в "вакуумі", щоб можна було знехтувати взаємодією з сусідніми плівками. Вибір 12 атомних шарів гарантує те, що плівка містить ціле число незвідних кристалічних шарів.

Відомо, що температурна залежність одноелектронних рівнів енергії обумовлена двома ефектами: тепловим розширенням ґратки, що пов'язано з залежністю цих рівнів від об'єму елементарної комірки, та електрон-фононою взаємодією (див. огляд [8]). Згідно теорії Брукса та Ю [9] основний внесок у залежність $E(T)$ одноелектронних зонних рівнів можна врахувати через температурну залежність факторів псевдопотенціалу. Метод псевдопотенціалу зводиться до розв'язання рівняння Шредінгера:

$$[-\nabla^2 + V_p(\vec{r})]\Psi_k(\vec{r}) = E_k\Psi_k(\vec{r}), \quad (1)$$

де $V_p(\vec{r})$ – кристалічний псевдопотенціал. Фур'є-компоненти псевдопотенціалу $V_p(\vec{r})$ повністю визначають зонну структуру кристала. Розглядаючи кристалічний псевдопотенціал у вигляді суперпозиції псевдопотенціалів атомів, що утворюють кристал, отримаємо:

$$V(\vec{G}) = \sum_j S_j(\vec{G})V_j(\vec{G}), \quad (2)$$

де $S_j(\vec{G}) = e^{i\vec{G}\vec{r}_j}$ – структурний фактор, \vec{G} – вектор оберненої ґратки, \vec{r}_j – радіус-вектор j -го атома, $V_j(\vec{G})$ – Фур'є-компонента j -го атомного псевдопотенціалу.

Згідно теорії Брукса та Ю при кінцевих температурах $S_j(\vec{G})$ переходить у

$$S_j(\vec{G}) = e^{i\vec{G}\vec{r}_j} e^{-W_j(\vec{G}, T)}, \quad (3)$$

де $W_j(\vec{G}, T)$ – фактор Дебая-Валлера j -го атома, для визначення якого використовують багато наближень, в т.ч. напівемпіричних формул. Так, для кристалів зі структурою алмазу й сфалериту

$$W_j(\vec{G}, T) = \frac{1}{6} |\vec{G}|^2 \langle u_j^2 \rangle, \quad (4)$$

де $\langle u_j^2 \rangle$ – повне середньоквадратичне зміщення j -го атома при даній температурі. Фактично це рівносильно заміні потенціалу $V_j(\vec{G})$ на потенціал, що залежить від температури

$$V_j(\vec{G}, T) = V_j(\vec{G}) e^{-\frac{1}{6} |\vec{G}|^2 \langle u_j^2 \rangle} \quad (5)$$

Таким чином враховується вплив температурної залежності електрон-фононої взаємодії на зону структуру кристалу.

Теплове розширення ґратки враховується просто через заміну масштабу форм-факторів [10] шляхом множення Фур'є-компонент псевдопотенціалу на $a^3(0)/a^3(T)$ (a – стала ґратки).

На основі (4) і (5) були обраховані форм-фактори псевдопотенціалу кремнію для температур 10, 100, 200, 300, 400, 500 і 600 К, які були використані в першій ітерації самоузгодженого розрахунку системи рівнянь методу псевдопотенціалу. Використаний при проведенні самоузгодження йонний потенціал [11] був нормований для кожної температури на новий атомний об'єм. Розрахунок проводився з використанням 1017 плоских хвиль, що відповідає вибору $|G_{\text{max}}^2| \leq 4.8 \text{ а.е.}$ У вказаному інтервалі температур були розраховані закони дисперсії $E(k)$, а також густини електронних станів (повні та пошарові) для 16-шарової (111) плівки Si.

3 Результати обчислень

Результати розрахунку поверхневої зонної структури показали, що при збільшенні температури ширини прямої та непрямої заборонених зон зменшуються. Так, E_g^{dir} (в т. Г) приймає значення 0.89, 0.81, 0.78, 0.40, 0.75, 0.64 eV; E_g^{ind} – 0.66, 0.51, 0.42, 0.12, 0.38, 0.31 eV при температурах 10, 200, 300, 400, 500 і 600 К відповідно. При температурі 100 К результати розрахунку показують, що заборонена зона зникає, а поверхневі рівні представлені у вигляді резонансів, які важко спостерігати на фоні повної густини електронних станів. Це можна пояснити тим, що кристал Si при $T < 120 \text{ К}$ має від'ємний температурний коефіцієнт лінійного розширення.

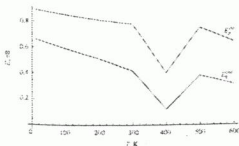


Рис. 1. Температурна залежність прямої та непрямої заборонених зон (111) плівки Si.

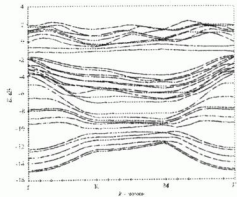


Рис. 2. Зона структура 16-шарової (111) плівки Si.

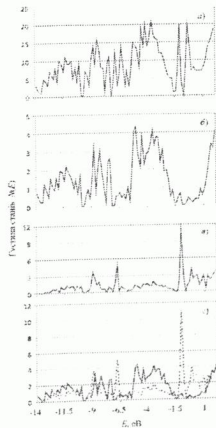


Рис. 3. Густина електронних станів (111) плівки Si при 10 К: а) всієї плівки Si; б) центрального (6 + 7) шару; в) поверхневого (11 + 12) шару; г) центрального (6 + 7) та поверхневого (11 + 12) шарів.

На рис. 1 представлено залежність ширини прямої та непрямої заборонених зон від температури. Зменшення ширин заборонених зон відбувається майже по лінійному закону за винятком температури $T = 400\text{K}$, при якій спостерігається різкий мінімум. В подальшому при температурах 500 і 600 К лінійне зменшення ширин заборонених зон продовжується з майже однаковим кутом нахилу. В експериментальних роботах [1] – [4] відмічено, що при збільшенні температури вище кімнатної відбувається перебудова електронної структури поверхні. Цим можна пояснити появу різкого мінімуму при температурі 400 К. При подальшому збільшенні температури процес зменшення ширин заборонених зон стабілізується.

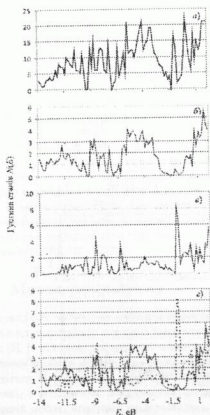


Рис. 4. Густина електронних станів (111) плівки Si при 300 К: а) всієї плівки Si; б) центрального (6 + 7) шару; в) поверхневого (11 + 12) шару; г) центрального (6 + 7) та поверхневого (11 + 12) шарів.

На рис. 2 в якості прикладу представлено двовірну зонну структуру 16-шарової Si-плівки при температурі 200 К, отриману самозгодженням методом емпіричного псевдопотенціалу. Зонна структура представлена для поверхневих векторів k_{\parallel} між точками $\Gamma(0,0)$, M(1/2,0), K(1/3,1/3) та $\Gamma(0,0)$. Добре видно 24 валентних зони, які можна поділити на три об'ємних групи (6 найнижчих s-подібних зон, 6 зон змішаного s – p - типу, 11 p-зон і одну поверхневу p-подібну зону, яка знаходиться в забороненій зоні). Із збільшенням товщини плівки ці три групи зон будуть наближатися до континууму, розділених забороненими зонами, в яких знаходиться більшість поверхневих станів.

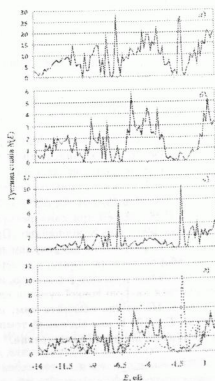


Рис. 5. Густина електронних станів (111) плівки Si при 600 К: а) всієї плівки Si; б) центрального (6 + 7) шару; в) поверхневого (11 + 12) шару; г) центрального (6 + 7) та поверхневого (11 + 12) шарів.

На рис. 3 – 5 (а, б, в, г) показано густини електронних станів при температурах 10, 300 і 600 К: а) повна густина станів всієї 16-шарової плівки Si; б) густина станів в центральному

(6+7) шарі; в) густина станів у верхньому поверхневому та підповерхневому (11+12) атомних шарах; г) порівняння густин станів центрального (6+7) та поверхневого (11+12) шарів.

Як показано в [12], густина станів в центральному (6 + 7) шарі наближається до об'ємної густини станів. Зокрема, поверхневий пік обірваного зв'язку на рис. 3 – 5 (б) майже відсутній, проте його добре помітно на рис. 3 – 5 (в) поблизу рівня Фермі. На рисунках зонної структури (див. рис. 2) видно, що рівень обірваного зв'язку проходить через всю поверхню зони Бріллюєна всередині забороненої зони.

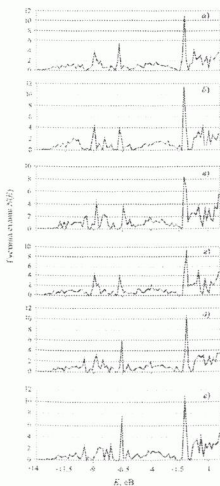


Рис. 6. Густина електронних станів поверхневого (11 + 12) шару (111) плівки Si при температурах: а) 10 К; б) 200 К; в) 300 К; г) 400 К; д) 500 К; е) 600 К.

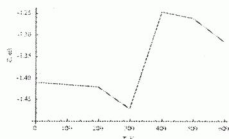


Рис. 7. Температурна залежність поверхневого піку (111) плівки Si.

На рис. 6 (а, б, в, г, д, е) в зручному для порівняння вигляді показано густини електронних станів в двох поверхневих шарах при всіх досліджених температурах. Густина електронних станів, яка відповідає обірваному зв'язку, найбільша при температурах, нижче кімнатної. При 300 – 400 К пік зменшується в середньому на 24.5 %. При подальшому збільшенні температури (500 – 600 К) пік знову зростає, не досягаючи в середньому 8.5 % до значень при 10 – 200 К. На рис. 7 видно зміщення піку по шкалі енергій. При цьому плавна залежність зазнає різкої зміни при температурі 400 К, що узгоджується з даними по температурній залежності прямої та непрямої заборонених зон.

В глибині валентної зони в інтервалі енергій від -6.5 до -9 eV розташовано ще два чітко виражених піка поверхневих електронних станів, величина і розташування яких мало залежить від температури. Лише при температурі 500 – 600 К величина одного з них різко збільшується, досягаючи максимуму густини станів ≈ 7 од. Другий пік, розташований біля дна валентної зони, настільки ж різко зменшується, досягаючи свого мінімуму густини станів ≈ 2 од.

4 Висновки

Таким чином, при збільшенні температури ширина поверхневої забороненої зони зменшується, що узгоджується з теоретичними розрахунками в об'ємі кристалу [13], [14] та з експериментальними даними [5]. Зменшення ширини прямої та непрямої заборонених зон відбувається майже по лінійному закону за винятком температури $T = 400$ К, при якій спостерігається різкий мінімум. В роботах [1] – [4] відмічено, що при збільшенні температури вище

кімнатної відбувається перебудова електронної структури поверхні, чим можна пояснити появу різкого мінімуму при 400 К.

Густина електронних станів, що відповідає об'єднаному зв'язку, найбільша при низьких температурах. При температурах 300 – 400 К пік зменшується в середньому на 24.5 %. При подальшому збільшенні температури (500 – 600 К) пік знову зростає, не досягаючи в середньому 8.5 % до значень при 10 – 200 К. На рис. 7 видно зміщення піку по шкалі енергій. При цьому плавна залежність зазнає різкої зміни при температурі 400 К, що узгоджується з даними по температурній залежності прямої та непрямої заборонених зон. Величина та розташування двох різко виражених піків густини поверхневих станів в глибині валентної зони в інтервалі енергій від –6.5 до –9 еВ мало залежать від температури аж до 400 К. При $T = 500 - 600$ К величина одного з них різко збільшується, досягаючи максимуму густини станів ≈ 7 од. Другий пік, розташований біля дна валентної зони, настільки ж різко зменшується, досягаючи свого мінімуму густини станів ≈ 2 од.

Список використаних джерел

- [1] Yokotsuka T., Kono S., Suzuki S., Sagawa T. Temperature dependence of surface electronic structure of Si (111) surface // Solid state comm. – 1983. – **46**. – P.401.
- [2] Olmstead M.A., Amer N.M. Temperature dependence of the Si and Ge (111) 2x1 surface optical absorption // Phys. Rev. B. – 1986. – **33**. – P.2564.
- [3] Olmstead M.A., Chady D.J. Theory of the temperature dependence of Si (111) 2x1 surface state optical absorption // Phys. Rev. B. – 1986. – **33**. – P.8402.
- [4] Frazedas J., Kelly M.K., Cardona M. Temperature-dependent angle-resolved photoemission study of the linewidth of surface states of III-V semiconductors // Phys. Rev. B. – 1991. – **43**. – P.2159.
- [5] Tang S.-J., Jeng H.-T., Ismail, Sprunger P.T., Plummer E.W. Surface electronic band structure and temperature dependence of the surface state at A on Mg (10 $\bar{1}$ 0) surface // Phys. Rev. B. – 2009. – **80**. – P.085419.
- [6] Isted G.E., Iane P.D., Cole R.J. Simulating the temperature dependence of surface state contributions to reflection anisotropy spectral features // Phys. Status Solidi B. – 2010. – **247**. – P.1965.
- [7] Еремеев С.В., Чулков Е.В. Влияние точечных дефектов на температурную зависимость поверхностного электронного состояния на поверхности Au (111) // Физика твердого тела. – 2009. – **51**. – С.808.
- [8] Соболев В.В., Немошкालенко В.В. // Электронная структура твердых тел в области фундаментального поглощения – К.: Наук. думка, -1992. -566 с.
- [9] Keffer Ch., Hayes T.M., Bienenstock A. PbTe Debye-Waller factors and band-gap temperature dependence // Phys. Rev. Lett. – 1968. – **21**. – P.1676-1678.
- [10] Tsang Y.W., Cohen M.L. Calculation of the temperature dependence of the energy gaps in PbTe and SnTe // Phys. Rev. B. – 1971. – **3**. – P.1254-1261.
- [11] Schluter M., Chelcowsky J.R., Louie S.G., Cohen M.L. Self-consistent pseudopotential calculations for Si (111) surfaces: Unreconstructed (1x1) and constructed (2x1) model structures // Phys. Rev. B. – 1975. – **12**. – P.4200-4214.
- [12] Горкавенко Т.В., Зубкова С.М., Макара В.А., Русіна Л.М., Смельянский О.В. Електронні властивості поверхні (111) в A^3B^5 та A^2B^6 кристалах // Укр. фіз. журн. – 2011. – **56**. – С.148-158.
- [13] Горкавенко Т.В., Зубкова С.М., Русіна Л.Н. Температурная зависимость зонной структуры полупроводниковых соединений типа вюрцита. Нитриды галлия и алюминия // ФТП – 2007. – **41**. – С.661-669.
- [14] Горкавенко Т.В., Зубкова С.М., Макара В.А., Русіна Л.Н. Температурная зависимость зонной структуры полупроводниковых соединений типа вюрцита: ZnS, ZnSe, ZnTe, CdTe // ФТП – 2007. – **41**. – С.908-916.

Надійшла до редколегії 05.12.11

УДК 536

Григор'єв А.М., доц., к.ф.-м.н.,
Королович В.Ф., інж.,
Кузовков Ю.Г., с.н.с., к.ф.-м.н.,
Мороз К.О., доц., к.ф.-м.н.**Термофізичні властивості кількох
нанорозмірних рідинних систем**

Досліджені термофізичні властивості, молекулярна будова нанорозмірних рідинних систем на основі води із вмістом фулерену C_{60} та вуглецевих нанотрубок. Проаналізований вплив тиску та температури в інтервалах від 0,1 МПа до 153 МПа та від 293К до 370 К, встановлений взаємозв'язок пружних властивостей досліджених рідинних систем з перебудовою молекулярної структури.

Ключові слова: водні системи, вуглецеві нанотрубки, молекулярна структура, токсичність.

*E-mail: korolovich@gmail.com

Відкриття різноманітних наночастинок, дослідження їх фізико-хімічних властивостей створили перспективи для їх практичного застосування [1-10]. Однак, спільною рисою більшості практичних застосувань наночастинок є виникнення на етапах впровадження нанорозмірних рідинних систем на основі води [11]. Відомо, що на сьогодні немає статистичної теорії молекулярних рідин та нанорозмірних рідинних систем, яка б описувала залежність пружних властивостей від молекулярної структури. Тому експериментальне дослідження пружних властивостей та молекулярної структури нанорозмірних рідинних систем за різних термодинамічних умов може компенсувати відсутність теоретичної інформації.

Об'єктом цього дослідження були нанорозмірні рідинні системи на основі води з домішками вуглецевих нанотрубок та фулерену C_{60} . Концентрація експериментально досліджених полідисперсних вуглецевих нанотрубок ($X_{\text{внт}}$) і фулерену C_{60} ($X_{\text{ф}}$) у воді становила 0,05 мг/мл.

Методом сільфонного п'єзометра з диференціальним трансформаторним датчиком лінійних переміщень було досліджено P-V-T дані нанорозмірних рідинних систем на основі води з домішками полідисперсних вуглецевих нано-

A.N. Grigoriev, PhD,
V.F. Korolovich, Eng.,
Yu.G. Kuzovkov, Sen.Sci. Res, PhD
K.O. Moroz, PhD**Thermophysical properties of several
nano-scale liquid systems**

It is investigated thermophysical properties and molecular structure of water based nanoscale fluid systems containing fullerene C_{60} and carbon nanotubes. The influence of pressure and temperature is analyzed in the range from 0,1 MPa to 153 MPa and from 293K to 370 K, respectively. It is established the relationship of elastic properties and molecular structure of the fluid systems under investigation.

Key Words: water system, carbon nanotubes, molecular structure, toxicity.

трубок (ВНТ), фулерену C_{60} [4, 12] в інтервалі тисків (0.1+103.0) МПа та температур (293.8+352.8) К. Похибка визначення об'єму становила 0.1%, тиску – 0.05%, температури – 0.1% від вимірної величини.

На основі експериментально отриманих P-V-T даних нами розраховано густину, ізотермічний модуль пружності K_T рідинних систем на основі води з фулереном C_{60} і полідисперсними ВНТ вказаної концентрації. Експериментально отримані результати порівнювались з експериментальними даними для води.

Співставлення ізотерм густини показало, що додавання малих домішок фулерену C_{60} та полідисперсних ВНТ зменшує густину в області високих тисків. Крутизна баричної залежності густини при цьому є найменшою для водної системи з полідисперсними ВНТ у порівнянні з водою. Стисливість досліджених водних системи з нанорозмірними домішками менша за стисливість води, тому при зростанні тиску густина розчину збільшується менш істотно.

Співставлення баричної та температурної залежності ізотермічного модуля пружності K_T води, водної систем з фулереном C_{60} та полідисперсними ВНТ представлено на рис.1. Аналіз залежностей K_T досліджуваних водних

Представлено: акад. НАН України,
д.ф.-м.н., проф. Л.А. Булавін

систем показав, що значення модуля пружності водної системи з полідисперсними ВНТ (на 30%) та водної системи з C_{60} (на 5%) більші за відповідні величини води.

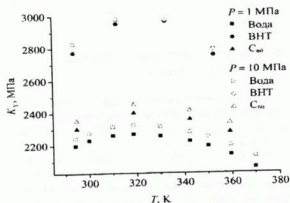


Рис. 1. - Температурна залежність ізотермічного модуля пружності K_T для води (1) нанорозмірних рідинних систем на основі води з фулереном C_{60} (2) та полідисперсними ВНТ (3) при тисках 1 МПа та 10 МПа. $X_{\text{внт}} = X_{\text{ф}} = 0,05$ мг/мл.

Температурна залежність ізотермічного модуля пружності K_T водних систем має особливість — максимум в області температур 320 К. Наявність максимуму на температурній залежності K_T водних систем можна пояснити проявом особливості модуля пружності K_T води поблизу 320 К зумовленого структурною перебудовою у воді. При зростанні тиску максимум ізотермічного модуля пружності як води так і водних систем стає менш вираженим і у воді майже повністю зникає при тисках 150 МПа. Додавання вуглецевих наночастинок у воду збільшує величину максимуму K_T . Можна зробити припущення, що це свідчить про зростання енергії міжмолекулярної взаємодії у воді, зумовлене вищою упорядкованістю молекулярної структури досліджуваних водних систем у порівнянні з водою.

При цьому вплив полідисперсних вуглецевих нанотрубок на величину міжмолекулярної взаємодії у воді виявляється суттєво більшим за вплив фулерену C_{60} .

Вуглецеві нанотрубки гідрофобні [13]. Тому, для створення стабільних у часі нанорозмірних рідинних систем на основі води з вуглецевими нанотрубками необхідно їх функціоналізувати. Однак функціоналізація вуглецевих нанотрубок змінює теплофізичні властивості утворених в

результаті рідинних систем. Вплив функціоналізації ВНТ на теплопровідність нанорозмірних рідинних систем на основі води досліджено у роботі [14].

Нами експериментально досліджено вплив функціоналізації поверхні вуглецевих нанотрубок на ізотермічний модуль пружності нанорозмірної рідинної системи на основі води на прикладі системи вода-функціоналізовані карбоксильними групами -COOH одностінні вуглецеві нанотрубки (ОВНТ). Концентрація функціоналізованих -COOH групами ОВНТ у воді становила 3 г/л, що відповідає 200 молекул води та 1 атом вуглецю у складі ОВНТ.

В експерименті були використані високо-очищені ОВНТ отримані методом піролізу пульверизованого шару при хімічному осадженні з газової фази. На рис. 2 представлено зображення електронної мікроскопії для ОВНТ з діаметром (1 ± 2) нм та довжиною (1 ± 5) мкм [5].

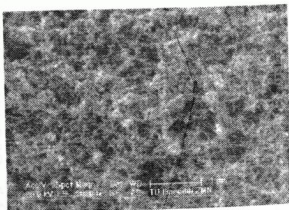


Рис. 2 – Зображення вуглецевих нанотрубок отримане методом електронної-мікроскопії

ОВНТ були функціоналізовані карбоксильними групами завдяки окисленню азотною кислотою протягом 2 год при температурі 1000 С. Максимальне значення концентрації отриманих функціоналізованих ОВНТ у воді становило 3 г/л.

Дослідження ізотермічного модуля пружності рідинної системи вода – функціоналізовані ОВНТ здійснювалося методом сільфонного п'єзометра в інтервалі тисків $(0,1 \pm 152,3)$ МПа та температур $(293,1 \pm 356,8)$ К. На основі P-V-T даних нами були розраховані термобаричні залежності густини та ізотермічного модуля пружності K_T досліджуваної нанорозмірної рідинної системи.

На рис.3 зображено баричну залежність густини водної системи з ОВНТ-СООН та води для трьох температур 293 К, 330 К і 351 К. Густина водної системи з ОВНТ-СООН при тиску 0,1 МПа більша за густину води. В інтервалі тисків (0,1÷152,3) МПа густина водної системи з ОВНТ-СООН, як і води, нелінійно зростає при збільшенні тиску (Рис.3).

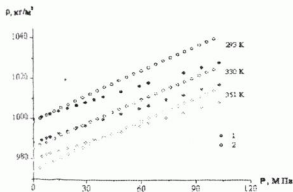


Рис.3 - Барична залежність густини води (2) та нанорозмірної рідинної системи вода - функціоналізовані -СООН групами ОВНТ (1). $X_{\text{ОВНТ}} = 3 \text{ мг/мл}$

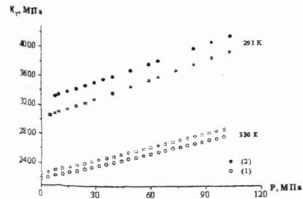


Рисунок 4 - Барична залежність ізотермічного модуля пружності K_T води (1) та нанорозмірної рідинної системи вода - функціоналізовані -СООН групами ОВНТ при температурах 293 К та 330 К. $X_{\text{ОВНТ}} = 3 \text{ мг/мл}$

Збільшення температури зменшує густину досліджуваної водної системи (рис.3). З порівняння баричних залежностей K_T води та водної системи з ОВНТ-СООН випливає, що додавання 3 г/л функціоналізованих -СООН групами ОВНТ призводить до зростання величини K_T водної системи на (30÷50)% у всьому досліджуваному інтервалі тисків

(0,1÷152,3) МПа.

Цей факт разом з дослідженнями впливу вуглецевої нанотрубки на молекулярну структуру води МД методом [11] дозволяє зробити припущення про те, що водна система з ОВНТ-СООН має більш впорядковану структуру, ніж вода.

Таким чином, нами експериментально встановлено зв'язок особливостей температурної залежності ізотермічного модуля пружності досліджених рідинних систем на ізотермах з особливостями молекулярної структури - а саме з існуванням угруповань молекул води зі структурою типу Лід-І при температурі меншій за 320 К та їх руйнуванням при температурі більшій за 320 К.

Також показано, що додавання функціоналізованих карбоксильними групами одностінних вуглецевих нанотрубок до води призводить до зростання на (30÷50) % ізотермічного модуля пружності водної системи. Експериментально знайдено, що починаючи з температури 330 К, в залежності від тиску відбувається або зростання величини ізотермічного модуля пружності з подальшим збільшенням температури, або її зменшення. На нашу думку, ця особливість пов'язана з впливом тиску на молекулярну структуру води у вуглецевих нанотрубках.

Література

1. Kumar P. Dynamic and thermodynamics of water / Kumar P., Franzese G., Stanley H. // J. Phys.: Condensed Matter - 2008 - V.20 - pp.214-226
2. Саркисов Г.Н. Структурные модели воды / Саркисов Г.Н. // Успехи физических наук - 2006 - Т.176(8) - ст. 833-845
3. Grindley T., J.L.Lind // Jour.Chem.Phys.-1971 - v.54 - N9 - pp.3983-3989
4. Адаменко І.І. Фізика рідин та рідинних систем / Адаменко І.І., Булавін Л.А. - К. - 2006. - с. 659.
5. Елецкий А.В. Углеродные нанотрубки / Елецкий А. В.//УФН -1997- 167 - ст. 945-972

6. Булавін Л.А. Мікроструктура, реологічні та кондуктометричні дослідження суспензій вуглецевих нанотрубок у гліцерині / Булавін Л.А., Лебовка М.І., Кислий Ю.А., Храпатий С.В., Гончарук А.І., Мельник І.А., Ковальчук В.І. // Укр. фіз. журн. – 2011 - Т. 56 - №3 - ст. 217-224.
7. I. Adamenko Thermodynamics properties of carbon nanotubes in toluene / I. Adamenko, L.Bulavin, V. Korolovych et al. // J. of Molecular Liquids – 2009 - V.150 - pp.1-3.
8. Bianco A. Biomedical applications of functionalised carbon nanotubes / Bianco A., Kostarelos K., Patridos C.D. and Prato M. // Chem.Comm -2005 -V.571, p.571-577.
9. Prylutska S.V., Grynyuk I.I., Matyshevska O.P., Yashchuk V.M., Prylutskyu Yu.I., Ritter U., Scharff P. Estimation of multi-walled carbon nanotubes toxicity in vitro // Physica E. 2008. – 40, N 7. – P. 2565 – 2569
10. Булавін Л.А. Про можливість впровадження нанофлюїдів як теплоносіїв ядерних реакторів / Булавін Л.А., Гаврюшенко Д.А., Ковальчук В.І., Королович В.Ф. // Ядерна фізика та енергетика – 2010. – Т.11. – №4. – с. 405-409.
11. Королович В.Ф. Водні системи з вуглецевими нанотрубками: молекулярна структура і токсичність / Королович В.Ф., Пур Хосро П., Мороз К.О., Меленевський Д.О., Держипольський А.Г. // Вісник Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. Науки – 2011 – №1 – с. 285-290.
12. Адаменко І.І. Вплив тиску на теплофізичні властивості розчину полідисперсних вуглецевих нанотрубок у воді / Адаменко І.І., Ермоленко І.С., Королович В.Ф., Мороз К.О. // Вісник КНУ. Серія: Фіз.-мат. науки. – 2008. – №2. – С.189-192.
13. Jenny Hilding Dispersion of Carbon Nanotubes in Liquids / Jenny Hilding, Eric A. Grulke, Z. George Zhang, and Fran Lockwood // J. of Dispersion science and technology – 2003 – V. 24 - No.1 - pp. 1-41.
14. Aida Nasiri. Effect of dispersion method on thermal conductivity and stability of nanofluid / Aida Nasiri, Mojtaba Shariaty-Niasar, Alimorad Rashidi, Azadeh Amrollahi, Ramin Khodafarin // Experimental Thermal and Fluid Science - 2011 – 35 - pp.717-723.
15. Королович В.Ф. Особенности теплофизических свойств водных систем с углеродными нанотрубками / В.Ф. Королович, И.И. Адаменко, Ю.И. Прилуцкий, Э.М. Шпилевский // Сборник научных статей «Фуллерены и наноструктуры в конденсированных средах» - 2011. – с. 86-91.
16. Adamenko I.I. Thermodynamics properties of Glycerol-Water Solution / Adamenko I.I., Zelinsky S.O., Korolovich V.F. // Ukrainian Journal of Physics. – 2007. – V.52 - №9. – pp.855 – 859.
17. Адаменко І.І. Молекулярна структура води у вуглецевих нанотрубках/І.І.Адаменко, В.Ф.Королович, С.О.Архіпов, К.О.Мороз // Вісник КНУ. Серія: Фіз.-мат. науки. – 2010. – №3. – ст. 241-248.

Надійшла до редколегії 1.12.2012

УДК 519.9

Демчишин А.Б., асп.
Селищев П.О., д. ф.-м. н., проф.,

Перколяційні параметри розгалужених структур складених з окремих одиночних треків ,створених при проходженні швидких важких іонів під різними кутами.

Формування іонних треків має практичне значення для синтезу різних по морфології і властивостям наноструктур в твердих тілах. В роботі досліджується площа поверхні та перколяційні параметри розгалужених структур складених з окремих одиночних треків в твердому тілі в залежності від характеристик пучка налітаючих іонів і параметрів одиночного треку. Вважалось, що кожний налітаючий іон створює трек у вигляді послідовності певної кількості сферичних областей з речовиною , що відрізняється від речовини матриці. Встановлено, що кутовий розподіл площі поверхні розгалуженої структури при дозі «перколяційного порогу» має чітко виражений максимум.

Ключові слова: швидкі важкі іони, трек, перколяція ,кутова залежність,розгалужені структури.

*E-mail: dem_and@i.ua

Вступ

Вивчення процесів формування і практичного застосування іонних треків має практичне значення для синтезу різних по морфології і властивостям наноструктур в твердих тілах, для так званої, іонно-трекової технології.

Дифракційна картина трекових областей відрізняється від дифракційної картини модифікованої матриці, що вказує на аморфність, сильну дефективність чи зменшену густину речовини всередині цих областей. Треки починаються як з опроміненої поверхні, так і на деякій відстані від неї. В результаті численних експериментів були виявлені неперервні і перервні циліндричні та сферичні трекові області. Домінуюче значення в процесі трекоутворення відіграє релаксація сильних електронних збуджень, які виникають в процесі проходження іона.

A.B.Demchyshyn, PhD student
P.O.Selyschchev, Dr. Sci., Prof.

Percolation parameters of branched structure composed from separate single swift heavy ions induced tracks at different incidence angles.

The formation of ion tracks has practical importance for the synthesis of nanostructures with different morphology and properties in solids .The surface area and percolation parameters of branched structures composed of individual single tracks in solids, depending on the incident ion beam characteristics and parameters of single tracks were investigated. We considered that each incident ion creates a track like a chain of deal spherical regions with substance within them that differs from matrix substance. It was established that the angular distribution of the surface area of branched structure with "percolation threshold" dose has a clearly defined maximum.

Key Words: swift heavy ions, track, percolation, angular dependence, branched structures..

Утворенню розгалужених структур з окремих треків, зміні їх кількісних та якісних характеристик, приділено не достатньо уваги у літературі, не дивлячись на практичну значимість очікуваних результатів детального вивчення даної проблематики. В даній роботі досліджується площа поверхні та перколяційні параметри розгалужених структур складених з окремих одиночних треків в твердому тілі в залежності від характеристик пучка налітаючих іонів і параметрів одиночного треку. Дослідження проведене за допомогою комп'ютерного моделювання.

Постановка задачі

В роботі розглядалось утворення треків у зразку, який має вигляд плоскопаралельної пластинки товщиною 150 нм. Оскільки опромінення й відповідно утворення треків по довжині пластинки - однорідне, то

достатньо проаналізувати лише певний її фрагмент у формі паралелепіпеда з розмірами опроміненої поверхні 50×150 нм. При падінні іонів під кутом до поверхні пластинки були враховані в тому числі й ті треки, що створені іонами, які не входять через поверхню модельованої області. Слід зазначити, що розглядається «отримана» доза іонів, і щоб накопичити незмінну дозу при опроміненні під різними кутами, слід або опромінювати довше, або брати потужніше джерело опромінення.

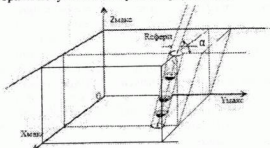


Рис. 1. Схема розподілу сфер по глибині.

Розглядалися треки, які виникають при опроміненні зразка швидкими важкими іонами (ШВИ) з енергією порядку 10-20 МеВ/а.о.м. Розрахунки здійснено до доз порядку 10^{11} іонів/см².

У роботі розглянуто формування структури модифікованої речовини внаслідок утворення треків, подальший рух іонів після утворення ними треків і пов'язані з цим явища в роботі не розглядалися.

В моделі дві поверхні послідовно піддавались радіаційному впливу. Вважалося, що кожний налітаючий іон створює трек у вигляді послідовності певної кількості сферичних областей з речовиною, що відрізняється від речовини матриці (далі, видозміненою) [2].

Виходячи з аналізу експериментальних даних вважалося, що радіуси однакові для всіх сферичних треківих областей. При розрахунках величини радіусів сфер вибирались рівними від 9 до 15 нм, що відповідає результатам робіт [3,4].

Проаналізувавши експериментальні результати [4-9] бачимо, що треки у вигляді ланцюжка сфер створюються на глибинах від 0 до 150 нм для різних матеріалів та умов їхнього опромінення, наприклад для InP опроміненого іонами ксенону, середня відстань між сферичними треками становить в середньому 25 нм, довжина ланцюжка

приблизно 125 нм. З цим корелюють результати моделювання енергетичних спектрів за допомогою SRIM 2008, які вказують, що максимуми енерговиділення при проходженні високоенергетичного іона також розташовуються в середньому через 25 нм.

У даній моделі (на відміну від [10]). вважалося, що перша сфера в ланцюжку знаходиться в середньому на глибині r від точки входу іона в речовину і має рівномірний розподіл по глибині. Наступна сфера ланцюжка розташована в середньому на глибині r від попередньої сфери і також має рівномірний розподіл, вигляд якого не залежить від передісторії (він такий же, як для попередньої сфери, лише зміщений уздовж траєкторії іона в точку появи попередньої сфери) і т.д. (рис. 1) Значення r дорівнює 40 нм у розрахунках. Ми враховували ланцюжки лише з одним, двома та трьома сферичними треками, хоча треки з чотирма і п'ятьма сферами в ланцюжку спостерігались у роботі [9]. Таким чином, максимальна можлива відстань від центра сферичного треку до точки входу в пластинку іона $6r$, а максимальна глибина розташування треків $6r \sin(\alpha)$, де α – кут падіння іонів на зразок.

Кут падіння іонів обраховується від поверхні зразка. Змодельований фрагмент пластинки обмежений площинами $Z = 0$ і $Z = Z_{\max}$, площинами $X = 0$ та $X = X_{\max}$, а також площинами $Y = 0$, $Y = Y_{\max}$. Опроміненню піддавалась поверхня пластинки, що лежить в площині $Z = Z_{\max}$ (далі - верхня поверхня), або послідовно дві поверхні: спочатку верхня поверхня (до половини загальної дози), а потім поверхня пластинки, що лежить в площині $Z = 0$ (далі - нижня поверхня).

Внаслідок опромінення ШВИ кількість треків зростає, області модифікованої речовини окремих треків перекриваються, форма області видозміненої речовини ускладнюється, створюючи розгалужену структуру. Площа поверхні розгалуженої структури модифікованої речовини, що з'єднана з верхньою поверхнею зразку, є одним з основних параметрів, що обраховувались в роботі.

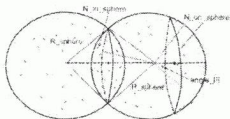


Рис. 2. Перекривання сферичних областей.

Для розрахунку площі поверхні розгалуженої структури модифікованої речовини використовувався метод Монте-Карло.

Розглянемо перетин декількох сфер (рис. 2). Площа частини поверхні будь-якої сфери $S_{\text{модиф}}$, яка не лежить всередині інших сфер має вигляд:

$$S_{\text{модиф}} = \frac{N_{\text{на поверхні}}}{N_{\text{всередині}}} \times 4\pi R_{\text{сфери}}^2 \quad (1)$$

$$N_{\text{на поверхні}} = N_{\text{всередині}} - N_{\text{всередині}} \quad (2)$$

де $N_{\text{всередині}}$ - точки вибрані випадковим чином на сфері, $N_{\text{на поверхні}}$ - точки на поверхні однієї із сфер, що знаходяться всередині інших сфер, $N_{\text{всередині}}$ - точки, що лежать на поверхні цієї сфери і не лежать у жодній іншій сфері чи на її поверхні (обраховуємо її за формулою (2)); $R_{\text{сфери}}$ - радіус сферичного треку з модифікованою речовиною всередині.

Шукане значення площі поверхні структури модифікованої речовини знаходимо, просумувавши величину $S_{\text{модиф}}$ (1) по всіх сферах, що марковані як такі, що з'єднані з приповерхневими модифікованими областями (мають «вихід» на верхню поверхню модельованої області).

Усі значення шуканих величин усереднювалися по 100 реалізаціях і обраховувалася дисперсія цих величин.

Залежність перколяційних параметрів від кута падіння іонів.

В рамках проведеного моделювання досліджувалися умови досягнення перколяційного порогу. Була обрахована площа поверхні розгалуженої структури модифікованих областей при дозі «перколяційного порогу»; доза, при якій відбувається перколяція - «просочування» модифікованої розгалуженої структури від одної поверхні до другої.

Розрахована залежність цієї площі від кута падіння іонів у випадку опромінення двох поверхонь послідовно.

Встановлено, що по мірі набору флюенса динаміка зміни площі поверхні розгалуженої структури опромінюваного зразка має різні стадії (рис. 3). При невеликій дозі і при малому куті опромінення спостерігається повільний ріст площі поверхні розгалуженої структури (так званий інкубаційний період). Збільшення площі проходить за рахунок виникнення областей модифікованої речовини поблизу поверхні зразка. Всередині об'єму зразка створюються і накопичуються модифіковані області, які поки що не мають виходу на поверхню. На графіку (рис. 3) ця стадія відповідає лінійному зростанню площі поверхні розгалуженої структури з ростом дози.



Рис. 3. Залежність площі поверхні структури від дози при різних кутах падіння іонів.

Область нелінійного зростання площі поверхні від дози на рис. 3 дає змогу виділити стадію швидкого зростання, що відбувається за рахунок проростання і виходу на неї модифікованих структур, які сформувались в об'ємі зразка внаслідок накладання областей модифікованої речовини.

Далі при невеликому куті значення площі не залежить від подальшого опромінення протилежної поверхні зразка («полочка») у зв'язку з тим, що при такому куті протяжні структури створені цим опроміненням не дають свій вклад у розгалужену структуру при верхній поверхні. При більших кутах спостерігається «стрибок» величини площі, це пов'язано з тим, що модифікована структура при нижній поверхні уже починає перекриватися зі структурою поблизу верхньої поверхні.

Кутовий розподіл площі поверхні при дозі «перколяційного порогу» має чітко виражений максимум (рис.4). Чим більший кут, тим більше модифікованих областей перекриваються одна з одною, тим більша площа поверхні створеної ними розгалуженої поверхні. При певному значенні кута опромінення ця величина досягає максимуму. При більшому куті перекривання модифікованих областей створених поблизу верхньої поверхні з областями поблизу нижньої поверхні починає зменшуватись, це приводить до зменшення площі поверхні модифікованої розгалуженої структури. Максимум площі поверхні при дозі «перколяційного порогу» зміщується в сторону більших кутів при зростанні радіуса треків областей. Це пояснюється тим, що перекриття модифікованої розгалуженої структури однієї поверхні з структурою другої буде більшим при більшому радіусі або меншому куті.

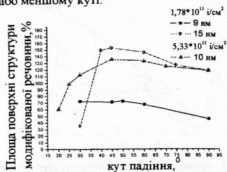


Рис.4. Залежність площі поверхні розгалуженої структури при перколяційному порозі від кута падіння іонів.

Висновки

Встановлено, що кутовий розподіл площі поверхні розгалуженої структури при дозі «перколяційного порогу» має чітко виражений максимум, який при більших радіусах треків областей настає при більших кутах. При опроміненні з двох сторін, чим більший кут, тим менша доза «перколяційного порогу». Залежність площі поверхні від радіуса модифікованих областей при фіксованому куті немонотонна і має чіткий максимум.

Список використаних джерел

- Reimar Spohr. Status of ion track technology—Prospects of single tracks//Radiation Measurements— 2005.— volume № 40— pp.191–202
- Wang Z.G., Dufour Ch., Cabeau B., Dural J., Fuchs G., Paumier E., Pawlak F., Toulemonde M. Velocity effect on the damage creation in metals in the electronic stopping power regime// Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms—1996— Volume 107— Issues 1–4— pp. 175–180.
- Воробьева И.В., Монастыренко В.Е., Перельгизин В.П.// ФТТ. — 1989. — выпуск 31. — стр.1
- Mefiah A., Brisard F., Costantini J. M., Hage-Ali M., Stoquert J.P., Studer F., Toulemonde M. Swift heavy ions in magnetic insulators: A damage-cross-section velocity effect//Physical Review B— 1993. — Volume № 48— pp. 920–925
- Wang Z.G., Dufour Ch., Cabeau B et al. Velocity effect on the damage creation in metals in the electronic stopping power regime // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms.- 1996.- Vol. 107, issues 1–4. — P.175 - 180.
- Herre O., Wesch W., Wendler E. Formation of discontinuous tracks in single-crystalline InP by 250-MeV Xe-ion irradiation // Phys. Rev. B. — 1998. — Vol. 58. — P. 4832.
- Комаров. Ф.Ф. Дефектообразование и трекообразование в твердых телах при облучении ионами сверхвысоких энергий // УФН.— 2003.— Т. 173, № 12.- С.1304.
- Houptert Ch. et al. Transition from localized defects to continuous latent tracks in magnetic insulators irradiated by high energy heavy ions: A HREM investigation // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section B.- 1989. - Vol.39, issue 1–4. — P. 720 - 723.
- Gaiduk P.I., Nylandsted Larsen A. et al. Discontinuous tracks in arsenic-doped crystalline Si0.5Ge0.5 alloy layers // Phys. Rev. B., — 2002. — Vol. 66.— P. 045316-2 - 045316-3.
- Демчишин А.Б., Дідик А.Ю., Селищев П.О. Моделирование образования структуры областей видоизменного вещества при формировании тяжелыми ионами высоких энергий сферических треков // Вопросы атомной науки и техники.- 2010. — № 1(95)—С.3 - 7.

Надійшла до редколегії 06.12.2011

УДК 531.8, 538

В.В. Копитков, к.т.н.
В.П. Селькин, к.т.н.
С.В. Сосновский, асп.
В.Ф. Королович, інж.
К.О. Мороз, к.ф.-м.н.
Л.Ю. Пошивайло, студ.**Метод опису течії та визначення
реологічних констант в'язкопластичних
нафтоматеріалів**

У роботі запропонована модель в'язкопластичного середовища, що описує його реологічні властивості. Модель враховує наявність межі текучості і нелінійну залежність в'язкості середовища.

Ключові слова: реологічні властивості, нафта, нафтопродукти.

E-mail: kapytkou@mail.ru

Вступ

До в'язкопластичних середовищ, що мають межу текучості відноситься нафта та продукти нафтопереробки (гудрон і т.д.) [1]. Для транспортування цих речовин (у трубопроводах) важливо прогнозувати їх реологічні властивості, зокрема в умовах структурних змін адаптаційно-компенсаційного типу при силовому впливі [2, 3]. На даний момент, запропоновано ряд моделей для опису реологічних властивостей нафтоматеріалів [5-8]. Найкраще узгоджується з експериментом модель нелінійної в'язкої рідини, що має нульову межу текучості і модель Шведова-Бінгама з одиничним коефіцієнтом швидкісної чутливості. Проте на даний момент відсутня модель, яка одночасно враховує порогове напруження і нелінійну в'язкість нафтопродуктів. Метою даної роботи і є розробка такої моделі.

**Аналіз експериментальних даних
з реологічних властивостей нафтоматеріалів**

У роботах [1, 2] показано, що нафтопродукти володіють нелінійними реологічними властивостями (нелінійність цих властивостей обумовлена наявністю у складі нафтопродуктів парафінових, нафтових та ароматичних вуглеводнів). Цей факт свідчить про те, що текучість нафтопродуктів погано описується залежностями, запропонованими для Ньютонавської рідини з постійною в'язкістю ($\mu =$ Копитков В.В., Селькин В.П., С.В. Сосновский С.В., Королович В.Ф., Мороз К.О., Пошивайло Л.Ю. 2011

V.V. Kopytkov, PhD,
V.P. Selkin, PhD,
S.V. Sosnovskii, PhD stud.,
V.F. Korolovych, PhD,
K.O. Moroz, PhD,
L. Yu. Poshyvailo, stud.**The method of describing flow and
determination the rheological constants of
viscous-plastic oil materials**

It is presented the method for describing rheological properties of viscous-plastic oil products. The fluidity limit and nonlinear products viscosity behavior are taken into account.

Key Words: rheological properties, oil, oil products

const). Серед більш точних моделей для опису течії в'язкопластичних середовищ, слід виділити метод «ефективної в'язкості» та формулу Кесона. Метод «ефективної в'язкості» у першому наближенні описує течії Куєтта-Тейлора і Пуазейля. Однак для нелінійних середовищ даний метод має малу точність. Це пояснюється тим, що повні рівняння Г. Генки, які описують просторові течії в'язкопластичних середовищ [8], не вдається вирішити через істотно нелінійну залежність тензора напружень від тензора швидкостей деформації. Тому роблять деякі припущення щодо поля швидкостей [6], або використовують заміню рівняння течії в'язкопластичних середовищ рівняннями Нав'є-Стокса. У цьому випадку виникає проблема вибору коефіцієнта в'язкості середовища.

Тому нами, на основі моделі «ефективної в'язкості», була розроблена модель для опису реологічних властивостей нелінійних середовищ і розраховані константи в'язкопластичного середовища τ_0 , n , K в умовах течії Пуазейля при відомих витратах і перепаді тиску.

В'язкопластична модель нафтоматеріалів

Пропонуємо наступний перехід від рівнянь Генки до рівнянь Нав'є-Стокса для нелінійних нестикуваних в'язко-пластичних середовищ. Масмо такі співвідношення [8]:

Представлено: акад. НАН України,
д.ф.-м.н., проф. Л.А. Булавін

$$\begin{cases} S_{ij} = 2 \frac{\tau}{H} \varepsilon_{ij}; \\ \tau = \tau_0 + K \left(\frac{H}{\varepsilon_0} \right)^m \text{ при } \tau > \tau_0 \quad (H = 0 \text{ при } \tau < \tau_0), \end{cases} \quad (1)$$

де S_{ij} – девіатор тензора напружень, ε_{ij} – девіатор тензора швидкостей деформації, K – пластична в'язкість, τ_0 – максимальне напруження зсуву, m – параметр швидкісної чутливості.

Вводячи «еквівалентну в'язкість» в'язкопластичного середовища η_e (в'язкість ньютонівської рідини, що створює такий же опір своєму відносному переміщенню, як і в'язкопластичне середовище) та застосовуючи результати роботи [8] при стаціонарному перепаді тиску отримаємо формулу $V_z(r) =$

$$\frac{1}{K^n} \frac{2l}{|\Delta p|^{n+1}} \left\{ \left(\frac{1}{2} \frac{|\Delta p|}{l} a - \tau_0 \right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2} \frac{|\Delta p|}{l} r - \tau_0 \right)^{n+1} \right\} \quad (2)$$

де η , n – реологічні константи. Тоді для Q маємо:

$$Q = \frac{2nl}{K^n |\Delta p|^{n+1} (n+2)(n+3)} \left(\frac{1}{2} \frac{|\Delta p|}{l} a - \tau_0 \right)^{n+1} \left\{ (n+1)(n+2)x^2 + 2\tau_0^2 + 2ag(n+1) \right\}$$

При $n = 1$ отримаємо відому формулу Букінгема [8], що підтверджує правильність наших припущень.

Для руху нафтоматеріалів через циліндричний переріз при стаціонарному перепаді тиску [8] в області в'язкопластичної течії $r_0 \leq r \leq R$ вираз для швидкості $V_z(r)$ має вигляд:

$$V_z(r) = \left(\frac{4^{n-1}}{\mu} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{\left\{ \frac{dp}{dz} (R + r_0) - 4\tau_0 \right\}^{\frac{1}{n}}}{(R + r_0)} (R^2 - r^2). \quad (3)$$

а для об'ємної втрати:

$$Q_v = \frac{\pi}{(4\mu)^n} \left\{ \frac{dp}{dz} \right\}^n (R - r_0)^{n+1} \left\{ \frac{1}{2} (R^2 + r_0^2) \right\}, \quad (4)$$

Отримані результати корелюють з дослідженнями у роботі [4].

Оцінка похибки $\Delta Q/Q$ показало, що відносна похибка залежить від змінної n (рис. 1). При зміні n в інтервалі (0-1,3) max відносна похибка становить 18% (при $n = 1.2$ і $k = 0.375$), а min 9% (при $n = 0.8$ і $k = 1.99$). Таке значення у прикладних дослідженнях вважається допустимим.

Висновки

Розроблена на основі моделі «ефективної в'язкості», модель в'язкопластичного середовища

описує реологічні властивості нафтопродуктів і може застосовуватися для уточненого опису гідродинамічних процесів у нафтопродуктах.

У першому наближенні, в'язкопластичний опір може бути описаний у термінах «ефективної

в'язкості». При однакових величинах $\frac{\mu H^n}{(\varepsilon_0)}$ і τ_0 запропонований метод не забезпечує необхідної точності.

Для течії Пуазейля метод «ефективної в'язкості» може застосовуватися при n , близькому до одиниці і при значних градієнтах тиску, що справджується для більшості нафтопродуктів.

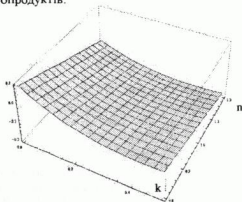


Рис. 1 Залежність відносної похибки від n і k

Список використаних джерел

1. Ким Д.Л., Гумеров А.Г., Захаров Н.П. О влиянии параметров оборудования и режимов перекачки нефти на переходный процесс // Трубопроводный транспорт нефти, 3, 2005: 118-120.
2. Ильинский А.А. К вопросу о вязкопластическом течении материала. Труды конф. по пластичности. Деформации. Москва, Изд-во АН СССР: 5-18, 1936 (in Russian).
3. ГНОВЕВОЙ А.В., КЛИМОВ Д.М., ЧЕСНОВОВ В.М. Об одном методе исследования пространственных течений вязкопластичных сред. МТТ, 4: 150-158, 1993 (in Russian).
4. ГАВРИЛЕНКО С.Л., ШИЛЬКО С.В., ВАСИН Р.А. Идентификация определяющих соотношений вязкопластического материала в условиях течения Куэтта. ПМТФ, Т. 43, 3: 117-124, 2002 (in Russian).
5. ЛОЩИНСКИЙ Л.Г. Механика жидкости и газа. Москва, Наука, 1973 (in Russian).
6. ОГМЕДЖАНОВ М.М., МИРЗОДЖАНЗАДЕ А.Х. Нестационарные движения вязкопластичных сред. Москва, Изд-во МГУ, 1997 (in Russian).
7. Гавриленко С.Л. Метод описания течения и определения реологических констант вязкопластичных биоматериалов // С.Л.Гавриленко, Р.А.Васин, С.В.Шилько // Биомеханика, Т.6, 3: 90-96.
8. Shulman Z.P., Mansurov V.A., Makhanik A.A. Simulation of non-steady flow of linear viscoplastic media. In: J. chem. i. proces, 21(1): 219-224, 2000.

Надійшла до редколегії 20.08.2011

УДК 538.94

Теслик* О.М., к.ф.м.н., інж.

Вплив крутильних коливань на гідродинаміку HeII

В роботі розглянуто вимушені коливання нормальної і надплинної компонент в плівці HeII на внутрішніх поверхнях циліндричної камери «торсійного осцилятора», який здійснює малі крутильні коливання. Показано, що в тому випадку, коли товщина плівки HeII набагато менша, чим товщина приповерхневого в'язкого шару, а амплітуда кутової швидкості крутильних коливань перевищує поріг народження квантових вихорів, в плівках HeII на боковій і на торцевих поверхнях камери, поряд з повним захопленням нормальної компоненти, відбувається також захоплення надплинної компоненти за рахунок взаємодії нормальних серцевин квантових вихорів як з нормальною компонентою, так і з твердою стінкою.

Ключові слова: надплинний гелій, механоелектричний ефект, квантовий вихор.

*E-mail: ten@univ.kiev.ua

В експериментах Рибалко [1] вперше спостерігалася змінна електрична поляризація надплинної рідкого гелію (⁴He) під час збудження стоячих хвиль другого звуку в акустичному резонаторі, зануреному в надплинний гелій (HeII). У роботі Рибалко і Рубця [2] повідомлялося про те, що у так званому «торсійному осциляторі» (який являє собою закріплену на жорсткому пружному підвісі металеву камеру, наповнену HeII, або з тонкою змочуючою плівкою HeII на внутрішніх стінках) при збудженні малих крутильних коливань камери спостерігалася змінна різниця потенціалів з амплітудою $U_0 \cong (10+100)$ нВ між стінками камери і центральним ізолюванням електродом.

Коливання електричного потенціалу містили як основну частоту крутильних коливань $f_0 = 136$ Гц, так і її другу гармоніку $2f_0$ зі значно більшою амплітудою. При цьому в експериментах [2] коливання потенціалу спостерігалися протягом довгого часу (~ 1 хв) після зупинки механічних крутильних коливань камери.

Спостережуваний в [2] ефект електричної активності HeII під впливом механічних

Teslyk* O.M., PhD, Eng.

Influence of rotational oscillations on HeII hydrodynamics

In the paper the induced oscillations of normal and of superfluid components in HeII film located at interior of cylindrical camera of 'torsion oscillator', that executes small rotational vibrations, are considered. It is demonstrated that if the film thickness is much less than the thickness of the surface viscous layer and angular velocity of rotational vibrations exceeds quantum vortex-producing threshold, then in the HeII films located on the side and end walls of the camera together with complete trapping of the normal component the trapping of the superfluid component at the expense of interaction of the normal cores of quantum vortices both with normal component and with solid wall occurs.

Keywords: superfluid helium, mechanoelectrical effect, quantum vortex.

коливань авторами було названо механоелектричним, і в якості можливої причина такого явища було розглянуто запропонований Мельниковським [3] механізм інерційної поляризації діелектриків, аналогічний ефекту Стюарта-Толмена в металах [4].

В умовах експериментів [2] надплинний гелій (HeII) надходить у циліндричну камеру радіусу $R_0 \cong 1$ см і висотою $L \cong 1$ см через металеву голку, яка ізолювана від заземлених металевих стінок камери та грає роль центрального електроду в циліндричному конденсаторі. За певного режиму постачання HeII в камеру всі внутрішні поверхні камери, включаючи торцеві й бічні стінки камери, а також поверхню центрального електроду, вкриті тонкою змочуючою плівкою HeII, товщина якої залежить від висоти (координати z). Максимальну товщину d_0 плівка має на дні камери (при $z = 0$), а мінімальну d_1 ($d_0 -$ на верхній кришці ($z = L$)). На бічній поверхні змінна товщина плівки HeII визначається виразом [5]:

$$d(z) = (\alpha / g(z + d_0))^{1/3}, \quad (1)$$

Представлено: член-кор. НАН України,
д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

де α – коефіцієнт змочування твердої поверхні плівкою HeII, а g – прискорення сили тяжіння.

В умовах експериментів [2] у приповерхневому шарі масивного HeII товщиною $\lambda_n = \sqrt{2\nu_n/\omega_0}$ (де ν_n – коефіцієнт кінематичної в'язкості, а $\omega_0 = 2\pi f_0$ – кругова частота коливань) або в тонкій змочуючій плівці HeII товщиною $d = \lambda_n$, нормальна компонента HeII за рахунок сили тертя (зчеплення) з твердою стінкою та кінцевою об'ємною в'язкістю практично повністю захоплюється крутильними коливаннями камери «торсійного осцилятора» і коливається з кутовою швидкістю

$$\Omega_n(t) = \Omega_0 \sin \omega_0 t, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + (\mathbf{v}_n \cdot \nabla) \mathbf{v}_n = & -\frac{1}{\rho} \nabla P - \frac{\rho_s}{\rho_n} S \nabla T - \nabla W - \mathbf{g} - \frac{\rho_s}{2\rho} \nabla (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2 - (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \frac{1}{\rho_n} \left[\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \text{div}(\rho_n \mathbf{v}_n) \right] + \\ & + \frac{\rho_s}{2\rho} \left\{ B \left[\frac{\Omega_n}{|\Omega_n|} - \nu_n \Delta \mathbf{v}_n; \times [\Omega_n \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)] \right] + B [\Omega_n \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)] \right\} - \nu_n \Delta \mathbf{v}_n; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + (\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s = & -\frac{1}{\rho} \nabla P + S \nabla T - \nabla W - \mathbf{g} + \frac{\rho_n}{2\rho} \nabla (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2 - \\ & - \frac{\rho_n}{2\rho} \left\{ B \left[\frac{\Omega_n}{|\Omega_n|} \times [\Omega_n \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)] \right] + B [\Omega_n \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)] \right\}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s) = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho S) + \text{div}(\rho S \mathbf{v}_n) = 0, \quad (6)$$

де \mathbf{v}_n і \mathbf{v}_s – гідродинамічні швидкості нормальної і надплинної компоненти, P – тиск, S – ентропія (в розрахунку на одиницю маси), T – температура, W – потенціал сил Ван-дер-Ваальса, B і B' – безрозмірні коефіцієнти, введені Холлом і Вайнсом [7], [8], а Ω_n – макроскопічна завихреність надплинної компоненти, обумовлена народженням квантових вихорів.

Якщо товщина змочуючої плівки значно менша за товщину в'язкого приповерхневого шару $\lambda_n = \sqrt{2\nu_n/\omega_0} \approx 5 \cdot 10^{-4}$ см (при $\nu_n \approx 10^{-4}$ см²/сек), то нормальна компонента в плівці HeII повністю захоплюється твердою стінкою та рухається з азимутальною швидкістю (див. (2)):

де Ω_0 – амплітуда кутової швидкості ($\Omega_0 \leq 0,07$ сек⁻¹), $\omega_0 \approx 855$ сек⁻¹ – частота гармонічних крутильних коливань.

Для опису коливань нормальної і надплинної компонент у змочуючій плівці HeII будемо виходити з повної системи рівнянь дворідинної гідродинаміки [6], які з врахуванням скінченної в'язкості нормальної компоненти і Ван-дер-Ваальсових сил взаємодії плівки HeII з твердими стінками, а також тензорних сил Холла-Вайнса-Бекаревича-Халатнікова (ХВБХ) [7]–[9], які описують взаємодію нормальних серцевин квантових вихорів у надплинному гелії, що обертається, з нормальною компонентою, можуть бути представлені в наступному вигляді:

$$V_{np}(r, t) = r \Omega_n(t). \quad (7)$$

В той же час, надплинна компонента з нульовою в'язкістю, здавалося б, не повинна захоплюватися крутильними коливаннями камери. Проте ситуація змінюється, якщо амплітуда кутової швидкості таких коливань Ω_0 перевищує критичну кутову швидкість Ω_c , яка є порогом народження квантових вихорів у HeII й рівна [6, 5]:

$$\Omega_c = \frac{\kappa_0}{2\pi R_0^2} \ln(R_0/a_0), \quad (8)$$

де $\kappa_0 = h/m_4$ – квант циркуляції швидкості, h – стала Планка, а a_0 – радіус нормальної серцевини

квантового вихору, який за порядком величини рівний $a_0 \approx 3E$, тож при $R_0 \approx 1 \text{ см}$ з (8) випливає, що $\Omega_c \approx 2.7 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1}$.

В цьому випадку в пливці HeII, що знаходиться на торцевій поверхні камери, в різні періоди коливань повинні по черзі народжуватися вихори та антивихори (тобто вихори з протилежним обертанням надплинної компоненти), які анігілюють один з одним. В результаті на торцевій поверхні площу $\pi R_0^2 \approx 3 \text{ см}^2$ середня густина вихорів рівна $n_{v0} \approx 8 \text{ см}^{-2}$. Слід зазначити, що квантові вихори можуть народжуватися також у змочуючій пливці HeII на бічній стінці камери, але лише у випадку, якщо її товщина не надто мала.

Нормальні сердцевини квантових вихорів взаємодіють як з нормальною компонентою HeII завдяки тензорним силам ХВБХ [7]-[9], так і з торцевою стінкою камери, в результаті чого надплинна компонента також повинна захоплюватися крутильними коливаннями камери з азимутальною швидкістю:

$$V_{s\varphi}(r, t) = r\Omega_s(t), \quad (9)$$

де $\Omega_s(t)$ – змінна кутова швидкість, яка не співпадає з $\Omega_v(t)$.

Для обрахунку $\Omega_s(t)$ розглянемо радіальну й азимутальну компоненти рівняння (4) у циліндричних координатах із врахуванням азимутальних швидкостей (7) і (9) за нульової радіальної швидкості надплинної компоненти $V_r = 0$ і з врахуванням сил ХВБХ для системи квантових вихорів, паралельних осі z (див. [10]):

$$\frac{V_{s\varphi}^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} - S \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\rho_n}{2\rho} \frac{\partial}{\partial r} (V_{n\varphi} - V_{s\varphi})^2 - \frac{1}{2} B_1 \frac{\rho_n}{\rho} \Omega_v (V_{n\varphi} - V_{s\varphi}), \quad (10)$$

$$\frac{\partial V_{s\varphi}}{\partial t} = \frac{1}{2} B_2 \frac{\rho_n}{\rho} \Omega_v (V_{n\varphi} - V_{s\varphi}), \quad (11)$$

де $B_1 \equiv B'$ і $B_2 \equiv B$, а $\Omega_v(t) = \kappa_0 n_v(t)$ – змінна макроскопічна завихреність надплинної компоненти, обумовлена народженням вихорів у пливці HeII на торцевій поверхні камери з густиною $n_v(t) = N_v(t)/\pi R_0^2$.

Функція $\Omega_s(t)$ з врахуванням зсуву фази φ_0 може бути задана у вигляді:

$$\Omega_v(t) \approx \frac{\Omega_{v0}}{2} \left[1 + \frac{\pi^2}{4} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \right], \quad (12)$$

де $\Omega_{v0} = \kappa_0 n_{v0}$ – амплітуда завихреності ($\Omega_{v0} \approx 8 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1}$). Рівняння (11) з врахуванням (7) і (9) зводиться до вигляду:

$$\frac{d\Omega_s}{dt} = \frac{B_2 \rho_n}{2\rho} \Omega_v(t) [\Omega_n(t) - \Omega_s(t)]. \quad (13)$$

Оскільки в початкові моменти часу $0 < t < t_0$ кутова швидкість надплинної компоненти $\Omega_s(t) = 0$, протягом певного проміжку часу $t > t_0$, поки $|\Omega_s(t)| = |\Omega_n(t)|$, із врахуванням (2) і (12) можна розглядати спрощене рівняння:

$$\frac{d\Omega_s}{dt} \approx \Omega_{v2} \Omega_0 \sin \omega_0 t \left[1 + \frac{\pi^2}{4} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \right], \quad (14)$$

де $\Omega_{v2} = B_2 \rho_n \Omega_{v0} / 4\rho$ – ефективна завихреність надплинної компоненти. При $B_1 \approx B_2 \approx 1$ і $\rho_n \approx \rho_s \approx \rho/2$ отримуємо оцінку $\Omega_{v2} \approx 10^{-3} \text{ сек}^{-1}$.

Інтегруючи (14) по t , отримаємо:

$$\Omega_s(t) \approx \Omega_{v2} \Omega_0 \left[\frac{\pi^2}{8} (t - t_0) \cos \varphi_0 - \frac{1}{\omega_0} \cos \omega_0 t - \frac{\pi^2}{16\omega_0} \sin(2\omega_0 t + \varphi_0) \right] \quad (15)$$

Вираз (15) відповідає монотонному прискоренню обертання надплинної компоненти лінійно з часом, яке модулюється коливаннями на першій та другій гармоніках. Проте, якщо в рівнянні (13) врахувати силу тертя нормальних сердевин квантових вихорів з торцевою поверхнею камери за допомогою модельного дисипативного члена

$$\frac{d\Omega_s}{dt} + \frac{\Omega_s(t)}{\tau_0} = \Omega_{v2} \Omega_0 [\sin \omega_0 t + \frac{\pi^2}{8} (\cos \varphi_0 - \cos(2\omega_0 t + \varphi_0))] \quad (16)$$

де τ_0 – характерний час гальмування вихорів, то замість нестационарного лінійно зростаючого з часом розв'язку (15), покладаючи задалі простоти $t_0=0$ отримуємо:

$$\Omega_z(t) = \Omega_{v2}\Omega_0\tau_0\left\{\frac{\pi^2}{8}\cos\varphi_0[1-e^{-t/\tau_0}]\right\} + \frac{1}{1+\omega_0^2\tau_0^2}(\sin\omega_0 t - \omega_0\tau_0\cos\omega_0 t + \omega_0\tau_0 e^{-t/\tau_0}) -$$

$$-\frac{\pi^2}{8(1+4\omega_0^2\tau_0^2)}[\cos(2\omega_0 t + \varphi_0) + 2\omega_0\tau_0\sin(2\omega_0 t + \varphi_0) - e^{-t/\tau_0}(\cos\varphi_0 + 2\omega_0\tau_0\sin\varphi_0)]. \quad (17)$$

Цей розв'язок при $t \rightarrow \infty$ та за умови виконання нерівностей $\omega_0\tau_0 \gg 1$ і $\varphi_0 \ll 1$ асимптотично приймає вигляд:

$$\Omega_z(t) \approx \Omega_{v2}\Omega_0\tau_0\left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{\omega_0\tau_0}\cos\omega_0 t - \frac{\pi^2}{16\omega_0\tau_0}\sin 2\omega_0 t\right) \quad (18)$$

Вираз (18) описує стаціонарне обертання надплинної компоненти, модульоване відносно слабкими коливаннями на першій та другій гармоніках.

Можна показати, що аналогічний результат, але з нескінченним числом гармонік, впливає з повного рівняння (13) при врахуванні дисипативного члена $\Omega_z(t)/\tau_0$.

Таким чином, у плівці HeII на торцевій поверхні камери, завдяки взаємодії квантових вихорів з нормальною компонентою та з твердою стінкою, надплинна компонента, згідно з (18), втягується у макроскопічне вихрове обертання зі сталою азимутальною швидкістю:

$$V_{sp} \approx \frac{\pi^2}{8}r\Omega_{v2}\Omega_0\tau_0 = r\Omega_{z0}, \quad (19)$$

$$\Omega_{z0} = \frac{\pi^2}{8}\Omega_{v2}\Omega_0\tau_0,$$

яка супроводжується коливаннями на частотах ω_0 і $2\omega_0$. Якщо прирівняти τ_0 характерному часу затухання електричних коливань (~ 1 хв) після зупинки механічних коливань камери «торсійного осцилятора» [2], то для кутової швидкості обертання надплинної компоненти отримуємо оцінку $\Omega_{z0} \approx 7 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1}$. Це відповідає додатковій густині квантових вихорів $\bar{n}_{v0} = 2\Omega_{z0}/\kappa_0 \approx 15 \text{ см}^{-2}$.

Список використаних джерел

1. Рыбалко А.С. Наблюдение электрической индукции, обусловленной волной второго звука в HeII // Физика Низких

Температур. – 2004. – Т. 30, № 12. – С. 1321–1326.

2. Рыбалко А.С., Рубец С.П. Наблюдение механоэлектрического эффекта в HeII // Физика низких температур. – 2005. – Т. 31, № 7. – С. 820–825.
3. Melnikovsky L.A. Polarization of Dielectrics by Acceleration [Електронний ресурс] – 2005. – Р. 1–6. – Режим доступу до статті : <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0505102>.
4. Tolman R.C., Stewart T.D. The Electromotive Force Produced by the Acceleration of Metals // Physical Review. – 1916. – V. 8. – P. 753–757.
5. Паттерман С. [пер. с англ. Г.Ф. Жариков, Ю.Л. Кухаренко, А.А. Собянин] Гидродинамика сверхтекучей жидкости – М.: Мир, 1978. – 520 с.
6. Халатников И.М. Теория сверхтекучести – М.: Наука, 1971. – 158 с.
7. Hall H.E. The rotation of liquid helium II // Advances in Physics. – 1960. – V. 9, № 33. – P. 89–146.
8. Vinen W.F. The Detection of Single Quanta of Circulation in Liquid Helium II // Proceedings of the royal society London A. – 1961. – V. 260. – P. 218–236.
9. Бекаревич И.Л., Халатников И.М. Феноменологический вывод уравнений вихревого движения He II // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – 1961. – Т. 40. – С. 920–932.
10. Папицкий Э.А., Мальнев В.Н., Нарышкин Р.А. Механизм «твердотельного» вращения сверхтекучей и нормальной компонент в процессе расслоения пересыщенного раствора ^3He – ^4He . // Физика низких температур. – 2005. – Т. 31, № 10. – С. 1095–1099.

Надійшла до редколегії 29.11.2011

Підп. до друку 23.12.2011.
Формат 70х100¹/₁₆. Папір офс.
Ум. друк. арк. 37,67. Наклад 350.
Зам. 234.

ДП «Інформаційно-аналітичне агентство»
вул. Еспланадна 4-6, м. Київ, 01601, Україна
тел/факс 287-03-79, 289-77-62
E-mail: iaa@dstati.kiev.ua

001010101

0111011010

00001110

010101011

010101010

00011010

010101010

10000100

010101010

100101010

100010101

10000100

100010010

100001010

100001010

1001010010

100001101

10001010

10001010

10101010

10001010